f2b8a1573c931f1098cfe699d1debd94fcff35d7

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Рязанский институт (филиал)
федерального государственного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

Теория вероятностей
и математическая статистика.
Элементы теории надежности

Учебное пособие

Рязань
2020

УДК 519.2
ББК 22.17
А 35

Азизян, И.А.

А 35 Теория вероятностей и математическая статистика. Элементы теории надежности: учебное пособие/ И.А. Азизян. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2020. – 44 с.

Учебное пособие содержит основные понятия и теоремы теории вероятностей и математической статистики, элементы теории надежности. Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач. Предназначено для студентов очной и заочной формы обучения технических специальностей.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

УДК 519.2
ББК 22.17

Содержание

1 Основы теории вероятностей
1.1 Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей возникла из потребностей практики. Становление теории вероятностей как математической науки связано с именем Я.Бернулли (1654-1705), который ввел классическое определение события.

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. При этом изучаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы. То есть теория вероятностей рассматривает не сами реальные явления, а их упрощенные схемы — математические модели.

Предметом теории вероятностей являются математические модели случайных явлений. При этом под случайным явлением понимают явление, предсказать исход которого невозможно (при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта оно протекает каждый раз несколько по-иному).

Примеры случайных явлений: выпадение герба при подбрасывании монеты, выигрыш по купленному лотерейному билету, результат измерения какой-либо величины, длительность работы телевизора и т.п.

Цель теории вероятностей — осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности. В настоящее время нет практически ни одной области науки, в которой в той или иной степени не применялись бы вероятностные методы.

1.2 Случайные события, их классификация

Случайным событием (или просто: *событием*) называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти.

События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C\ldots$

Опыт: бросание игральной кости: событие A — выпадение 5 очков, событие B — выпадение четного числа очков, событие C — выпадение 7 очков, событие D — выпадение целого числа очков, событие E — выпадение не менее 3-х очков, …

Непосредственные исходы опыта называются *элементарными событиями.*

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступит в результате данного опыта.

Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не произойдет в результате проведения опыта.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте, т. е. не смогут произойти вместе в одном опыте. В противном случае события называются *совместными*.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *попарно-несовместными*, если любые два из них несовместны.

Несколько событий образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и в результате каждого опыта происходит одно и только одно из них.

Несколько событий называются *равновозможными,* если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие, т. е. все события имеют равные «шансы».

1.3 Действия над событиями

Введем основные операции над событиями.

Суммой событий A и *B* называется событие $C=A+B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них (т. е. или A, или B, или A и B вместе).

Произведением событий A и *B* называется событие $C=A\cdot B$, состоящее в совместном наступлении этих событий (т.е. и A и B одновременно).

Разностью событий A и B называется событие $C=A$-B, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B.

Противоположным событию A называется $\overline{\mathrm{A}}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

1.4 Статистическое и классическое определение вероятности

Пусть в nповторяющихся опытах некоторое событие A наступило n_Aраз.

Число n_Aназывается *частотой* события A, а отношение $\frac{n_A}{n} = P^*(A)$ называется *относительной частотой* (или частостью) события A в рассматриваемой серии опытов.

Свойство статистической устойчивости: с увеличением числа опытов частость принимает значения, близкие к некоторому постоянному числу.

Теория вероятностей изучает только те массовые случайные явления с неопределенным исходом, для которых предполагается наличие устойчивости относительной частоты.

Статистической вероятностью события A называется число, около которого колеблется относительная частота события A при достаточно большом числе испытаний (опытов).

Вероятность события A обозначается символом $P(A)$. Согласно данному определению $\frac{n_A}{n} = P^*(A) = P(A)$.

Замечание. Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности. Для надежного определения вероятности нужно проделать большое число испытаний (опытов), что не всегда просто.

Существует простой способ определения вероятности события, основанный на равновозможности любого из конечного числа исходов опыта. Пусть проводится опыт с n исходами, которые можно представить в виде *полной группы несовместных равновозможных событий.* Такие исходы *называются случаями, шансами, элементарными событиями*, опыт – *классическим*. Про такой опыт говорят, что он сводится к *схеме случаев* или *схеме урн*.

Случай, который приводит к наступлению события, называется *благоприятным* (или ─ *благоприятствующим*) ему.

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев, т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Наряду с обозначением $P(A)$ для вероятности события *А* используется обозначение р, т.е. $p = P(A)$.

Из классического определения вероятности вытекают следующие свойства:

1) Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т. е. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2) Вероятность невозможного события равна нулю.
3) Вероятность достоверного события равна единице.
4) Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

1.5 Элементы комбинаторики

Согласно классическому определению подсчет вероятности события *А* сводится к подсчету числа благоприятствующих ему исходов. Делают это обычно комбинаторными методами.

Комбинаторика ─ раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам, в частности задачи о подсчете числа комбинаций (выборок), получаемых из элементов заданного конечного множества. В каждой из них требуется подсчитать число возможных вариантов осуществления некоторого действия, ответить на вопрос «Сколькими способами?».

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью следующих двух важных правил, называемых соответственно *правилами умножения и сложения.*

Правило умножения (основной принцип): если из некоторого конечного множества первый объект (элемент х) можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект (элемент у) можно выбрать n_2 способами, то оба объекта (х и у) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Этот принцип, очевидно, распространяется на случай трех и более объектов.

Пример. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если: а) цифры не повторяются? б) цифры могут повторяться?

Решение. Имеется 5 различных способов выбора цифры для первого места (слева в трехзначном числе). После того как первое место занято, например, цифрой 2, осталось четыре цифры для заполнения второго места. Для заполнения третьего места остается выбор из трех цифр. Следовательно, согласно правилу умножения имеется 5·4·3=60 способов расстановки цифр, т. е. искомое число трехзначных чисел есть 60. (Вот некоторые из этих чисел: 243, 541, 514, 132, …)

Понятно, что если цифры могут повторяться, то трехзначных чисел 5·5·5=125. (Вот некоторые из них: 255, 333, 414, 111,…)

Правило суммы. Если некоторый объект x можно выбрать n_1 способами, а объект y можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (x или y), можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

Пример. В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола?

Решение. По правилу умножения двух девушек можно выбрать 14·13=182 способами, а двух юношей ─ 6·5=30 способами. Следует выбрать двух студентов одного пола: двух студенток или двух юношей. Согласно правилу сложения таких способов будет 182+30=212.

Решение вероятностных задач часто облегчается, если использовать комбинаторные формулы. Каждая из них определяет число всевозможных исходов в некотором опыте (эксперименте), состоящем в выборе наудачу m элементов из n различных элементов рассматриваемого множества.

Существуют две схемы выбора m элементов $(0 < m \leq n)$ из исходного множества: *без возвращения* (без повторений) и *с возвращением* (с повторением). В первом случае выбранные элементы не возвращаются обратно; можно отобрать сразу все m элементов или последовательно отбирать их по одному. Во второй схеме выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге.

Схема выбора без возвращений

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

Размещением из n *элементов по* m *элементов* $(0 < m \leq n)$ называется любое упорядоченного подмножество данного множества, содержащее m элементов.

Размещения ─ это выборки (комбинации), состоящие из m элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m элементов обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot … \cdot (n-m+1)$

или $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot … \cdot n$, $1! = 1$, $0! = 1$.

Пример. Составить различные размещения по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$; подсчитать их число.

Решение. Из трех элементов можно образовать следующие размещения по два элемента: (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (c, b), (b, c).

Согласно формуле $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ их число: $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов.

Из определения вытекает, что перестановки — это выборки (комбинации), состоящие из n элементов и отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов. Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле $P_n = n!$.

$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$.

Пример. Составить различные перестановки из элементов множества $E = \{2,7,8\}$; подсчитать их число.

Решение. Из элементов данного множества можно составить следующие перестановки: (2,7,8); (2,8,7); (7,2,8); (7,8,2); (8,7,2); (8,2,7). По формуле $P_n = n!$ имеем: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Пример. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 5 элементов (книг), т. е. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Сочетанием из *n элементов по m элементов* $(0 < m \leq n)$ называется любое подмножество, которое содержит m элементов данного множества.

Из определения вытекает, что сочетания — это выборки (комбинации), каждая из которых состоит из *m элементов,* взятых из данных *n элементов*, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, т. е. отличаются только составом элементов.

Число сочетаний из *n элементов по m элементов* обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Имеют место формулы:

$C_n^m = C_n^{n-m}$ $(m \leq n)$?

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$,

$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$, $(1 < m < n)$.

Числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, …, C_n^n являются коэффициентами в разложении бинома Ньютона: $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n a^0 b^n$.

Пример. Составить различные сочетания по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$; подсчитать их число.

Решение. Из трех элементов можно образовать следующие сочетания по два элемента: (a, b); (a, c); (b, c). Их число: $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}$=3.

Схема выбора с возвращением

Если при выборе m элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это *размещения с повторениями.*

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов. Число всех размещений из n элементов по m *элементов* обозначается символом $\overline{\text{A}}_n^m$ и вычисляется по формуле $\overline{\text{A}}_n^m = n^m$.

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания, то говорят, что это *сочетания с повторениями.* Число всех сочетаний из n элементов по m с повторениями обозначается символом $\overline{\text{C}}_n^m$ и вычисляется по формуле $\overline{\text{C}}_n^m = \text{C}_{n+m-1}^m$.

Перестановки из n элементов данного множества называют *перестановками с повторениями из* n *элементов.*

Число перестановок с повторениями из из n элементов обозначается символом $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ и вычисляется по формуле $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$.

1.6 Геометрическое определение вероятности

Геометрические вероятности – вероятность попадания точки в область (часть плоскости, отрезок и т.д.).

Вероятность попадания точки, брошенной наудачу в область g – часть области G, определяется равенством:

$P = \dfrac{mesg}{mesG}$, где $mes\ g$ - мера области g (площадь, объем, длина и т.д.),

$mes\ G$ - мера области G.

1.7 Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой $A + B$ двух событий A и B называют событие, которое имеет место тогда и только тогда, когда произошло хотя бы одно событие A или B.

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, то есть

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Произведением двух событий A и B называется событие $AB = A \cap B$, состоящее в одновременном появлении как события A, так и события B.

Вероятность события A при условии, что произошло событие B, называется *условной вероятностью* $P_B(A)$ события А.

Теорема. Вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого в предположении, что первое имеет место, то есть

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого.

Теорема. Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий, то есть

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

1.8 Формула полной вероятности, формулы Бейеса

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. События полной группы называют *гипотезами*.

Теорема. Сумма вероятностей событий полной группы равна 1, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1.$$

Теорема. Вероятность события A равна сумме попарных произведений вероятностей всех гипотез, образующих полную группу, на соответствующие условные вероятности данного события, то есть

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A).$$

Теорема. Если события $B_1, B_2, ...B_n$ образуют полную группу, то справедливы формулы Бейеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P_{Bj}(A)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

1.9 Схема независимых испытаний

Пусть вероятность появления события A в единичном испытании равна p. Тогда вероятность появления события A в n испытаниях ровно m раз вычисляется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

При достаточно больших значениях n применяют локальную или интегральную *теоремы Муавра-Лапласа*, используя следующие приближенные формулы:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(t),$$

где $t = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}.$

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где $t_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $t_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-t^2/2} dt$.

Значения функций $\varphi(t)$ и $\Phi(t)$ приведены в конце тетради.

При достаточно больших значениях *n*, но малых значениях *p* применяют приближенную *формулу Пуассона*:

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m \cdot e^{-\mu}}{m!}, \text{ где } \mu = np.$$

1.10 Законы распределения и числовые характеристики случайных величин

Случайной называется величина, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Дискретной называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Законом распределения случайной величины *X* называется соответствие между возможными ее значениями и их вероятностями. Законы распределения полностью характеризуют случайную величину.

Функцией распределения называется функция *F(x)*, определяющая вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, меньшее *x*, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Функции распределения существуют для непрерывных и для дискретных случайных величин.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины *X* называется функция *f(x)*, такая что

$$f(x) = F'(x).$$

Для непрерывной случайной величины *X* выполняются равенства:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = 1.$$

Числовыми характеристиками случайных величин называются числа:

1) *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины X называется сумма парных произведений всех возможных ее значений на их возможные вероятности

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \ .$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$.

Для непрерывной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле: $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \right)^2$.

2) *Дисперсией* случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}.$$

Для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле:

$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2.$

3) *Среднее квадратическое отклонение* случайной величины (как дискретной, так и непрерывной) определяется равенством

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \ .$$

Вероятность того, что случайная величина X примет значение в заданном числовом промежутке, вычисляется по формулам:

$$P(a \le X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Дискретные распределения

Биноминальное распределение $P(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$.

Распределение Пуассона $P(m) = \dfrac{\mu^m \cdot e^{-\mu}}{m!}$.

Геометрическое распределение

$$P(m) = p \cdot (1 - p)^{m-1} \ .$$

Непрерывные распределения

Равномерное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b. \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a = M(X), \quad \sigma = \sqrt{D(X)}$.

Показательное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

2. Основы математической статистики

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных – результатов наблюдений.

Математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие задачи.

Задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов. Математическая статистика возникла в XVII веке и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX в.) обязано П.Л. Чебышеву, А.А. Маркову, К. Пирсону и др.

В XX веке наиболее существенный вклад в математическую статистику был сделан советскими математиками (А.Н. Колмогоров, Н.В. Смирнов и др.), а также английскими (Стьюдент, Р. Фишер и др.) и американскими (Ю. Нейман, А.Вальд) учеными.

2.1 Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты.

Выборочной совокупностью или просто выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности называют число объектов этой совокупности.

2.2 Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная выборка. Способы отбора

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности, то есть выборка должна быть *репрезентативной* (представительной).

На практике применяются различные способы отбора.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части.

Механическим называют отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию.

2.3 Статистическое распределение выборки

В теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, относительными частотами.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_i наблюдалось n_i раз. Наблюдаемые значения x_i называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, − *вариационным рядом*. Числа наблюдений называют *частотами*, а их отношения к объему выборки – *относительными частотами*.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

2.4 Графическое изображение статистического распределения. Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_i; n_i)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Точки $(x_i; n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $-\dfrac{n_i}{h}$ (плотность частоты).

Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты численно равны плотности относительной частоты.

2.5 Числовые характеристики статистического распределения

Для выборки можно определить ряд числовых характеристик, аналогичным тем, что в теории вероятностей определялись для случайных величин.

Выборочным средним $\overline{x_B}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i .$$

Выборочное среднее можно записать и так:

$$\overline{x_B} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i^* , \text{ где } p_i^* = \frac{n_i}{n} \text{ – частость.}$$

Выборочной дисперсией D_B называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\overline{x_B}$, т. е. $\overline{D_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2 \cdot n_i$, или $\overline{D_B} = \sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2 \cdot p_i^*$.

Выборочное среднее квадратическое отклонение выборки определяется формулой $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Особенность выборочного с.к.о. состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и изучаемый признак.

При решении практических задач используется и величина $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2 \cdot n_i$, т. е. $S^2 = \frac{1}{n-1}D_B$, которая называется исправленной выборочной дисперсией.

Величина $S = \sqrt{S^2}$ называется исправленным выборочным средним *квадратическим отклонением*.

Размахом вариации называется число $R = x_{\max} - x_{\min}$, где $x_{\max}$ – наибольший, $x_{\min}$ – наименьший вариант ряда.

Модой вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Медианой вариационного ряда называется значение признака, приходящегося на середину ряда.

2.6 Задачи статистической проверки гипотез

Одна из часто встречающихся на практике задач, связанных с применением статистических методов состоит в решении вопроса о том, должно ли на основании данной выборки быть принято или, напротив, отвергнуто некоторое предположение (гипотеза) относительно генеральной совокупности.

Процедура сопоставления высказанного предположения (гипотезы) с выборочными данными называется *проверкой гипотез*. Задачи статистической проверки гипотез ставятся в следующем виде: относительно некоторой генеральной совокупности высказывается та или иная гипотеза H. Из этой генеральной совокупности извлекается выборка. Требуется указать правило, при помощи которого можно было бы по выборке решить вопрос о том, следует ли отклонить гипотезу H или принять ее. Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки.

Под статистической гипотезой понимают всякое высказывание о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Проверка гипотез о законе распределения

Во многих случаях закон распределения изучаемой случайной величины неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет вполне определенный вид: нормальный, биномиальный или какой-либо другой.

Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. (Он используется для проверки согласия предполагаемого вида распределения с опытными данными на основании выборки).

Наиболее часто употребляемый критерий для проверки простой гипотезы о законе распределения – критерий согласия Пирсона:

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^{\ 2}}{np_i} - n$.

К. Пирсон (1857-1936; англ. математик, статик, биолог, философ) предложил величину («критерий Пирсона»). Согласно теореме Пирсона, при n стремящемся к бесконечности, статистика имеет χ-квадрат распределение с $k = m - r - 1$ степенями свободы, где m – число групп (интервалов) выборки, r – число параметров предполагаемого распределения.

Правило применения критерия χ-квадрат сводится к следующему: сначала вычисляют выборочное значение статистики критерия χ-квадрат наблюдения; выбрав уровень значимости критерия, находят критическую точку (квантиль); если χ-квадрат наблюдения меньше или равно критическому значению, то выдвинутая гипотеза о законе распределения принимается, в противном случае, гипотеза отклоняется.

Необходимым условием применения критерия Пирсона является наличие в каждом из интервалов не менее 5 наблюдений.

Если в отдельных интервалах их меньше, то число интервалов надо уменьшить путем объединения соседних интервалов.

Пример. Измерены 100 обработанных деталей: отклонения от заданного размера приведены в таблице:

$[x_i; x_{i+1})$	$[-3;-2)$	$[-2;-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
n_i	3	10	15	24	25	13	7	3

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0.01$ гипотезу H_0 о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

Решение.

Число наблюдений в крайних интервалах меньше 5, поэтому объединим их с соседними. Получим следующий ряд распределения ($\mathrm{n} = 100$):

$[x_i; x_{i+1})$	$[-3;-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;5)$
n_i	13	15	24	25	13	10

Случайную величину – отклонение – обозначим через X. Для вычисления вероятностей p_i необходимо вычислить параметры, определяющие нормальный закон распределения (a, σ). Их оценки вычислим по выборке:

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(-2 \cdot 13 + (-0{,}5) \cdot 15 + 0{,}5 \cdot 24 + 1{,}5 \cdot 25 + 2{,}5 \cdot 13 + 4 \cdot 10) = 0{,}885 \approx 0{,}9.$$

$$D_B = \frac{1}{100}(4 \cdot 13 + 0{,}25 \cdot 15 + 0{,}25 \cdot 24 + 2{,}25 \cdot 25 + 6{,}25 \cdot 13 + 16 \cdot 10) - (0{,}885)^2 \approx 2{,}809.$$

$\sigma \approx 1{,}676 \approx 1{,}7$.

Находим $p_i\ (i = \overline{1,6})$. Так как с. в. X$-N(a, \sigma)$ определена на $(-\infty; \infty)$, то крайние интервалы в ряде распределения заменяем, соответственно, на $(-\infty; -1)$ и $(3; \infty)$. Тогда $p_1 = P\{-\infty < X < -1\} = \Phi_0\left(\frac{-1 - 0{,}9}{1{,}7}\right) - \Phi_0(-\infty) = \frac{1}{2} - \Phi_0(1{,}12) = 0{,}1314$.

Аналогично получаем: $p_2 = 0{,}1667$, $p_3 = 0{,}2258$, $p_4 = 02183$, $p_5 = 0{,}1503$,
$p_6 = P\{3 \le X < \infty\} = \Phi_0(\infty) - \Phi_0\left(\frac{3-0{,}9}{1{,}7}\right) = \frac{1}{2} - \Phi_0(1{,}24) = 0{,}1075$.

Полученные результаты приведем в следующей таблице:

$[x_i;x_{i+1})$	$(-\infty;-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;\infty)$
n_i	13	15	24	25	13	10
$n' = np_i$	13,14	16,67	22,58	21,83	15,03	10,75

Вычисляем $\chi^2_{набл}$:

$$\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{{n_i}^2}{np_i} - n = \left(\frac{13^2}{13{,}14} + \frac{15^2}{16{,}67} + \cdots + \frac{10^2}{10{,}75}\right) - 100 = 101{,}045 - 100 \approx 1{,}045 \text{ т.е.}$$

${\chi_{набл}}^2 \approx 1{,}045$.

Находим число степеней свободы: по выборке рассчитаны два параметра, значит, $r = 2$. Количество интервалов 6, т.е. $m = 6$. Следовательно, $k = 6-2-1 = 3$. Зная, что $\alpha = 0.01$ и $k = 3$, по таблице χ^2-распределения находим $\chi^2_{\alpha,k} = 11{,}3$. Итак, ${\chi_{набл}}^2 < \chi^2_{\alpha,k}$, следовательно, нет оснований отвергнуть проверяемую гипотезу.

2.7 Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a -$ математическое ожидание, $\sigma -$ среднее квадратическое отклонение X. Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$, $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ − функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ, $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

В частности, при $a = 0$ справедливо равенство $P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Пример. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12,14).

Решение. Воспользуемся формулой $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$.

Подставив $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$ и $\sigma = 2$, получим $P(12 < X < 14) = \Phi(2) - \Phi(1)$. По приложению находим: $\Phi(2) = 0{,}4772$, $\Phi(1) = 0{,}3413$. Искомая вероятность $P(12 < X < 14) = 0{,}1359$.

Пример. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

Решение. Математическое ожидание случайных ошибок равно нулю, поэтому применима формула $P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Положив $\delta = 15$, $\sigma = 10$, находим $P(|X| < 15) = 2\Phi(1{,}5)$. По таблице приложения находим: $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$. Искомая вероятность $P(|X| < 15) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8684$.

2.8 Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки

Статистической оценкой θ^* неизвестного параметра θ теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\theta^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - результаты n наблюдений над количественным признаком X.

Несмещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Смещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя $\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i$.

Замечание. Если первоначальные варианты x_i − большие числа, то для упрощения расчета целесообразно вычесть из каждой варианты одно и то же число С, то есть перейти к условным вариантам (в качестве С выгодно принять число, близкое к выборочной средней). Тогда $\overline{x_B} = C + \frac{\sum n_i u_i}{n}$.

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная средняя $\overline{D_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2 \cdot n_i$. Эта оценка является смещенной, так как $M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_Г$.

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{n-1}{n} D_B$.

Пример. По выборке объема $n = 41$ найдена смещенная оценка $D_B = 3$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Решение. Искомая несмещенная оценка равна исправленной дисперсии: $S^2 = \frac{n-1}{n} D_B = \frac{41}{40} \cdot 3 = 3{,}075$.

2.9 Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности. Дисперсия генеральной совокупности неизвестна

Если дисперсия генеральной совокупности неизвестна (например, в случае малых выборок), то в качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину $T = \frac{(\overline{X} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{S}$, где $S = \sqrt{\frac{\sum n_i \cdot x_i^2 - \frac{\left(\sum n_i x_i\right)^2}{n}}{n-1}}$ – исправленное среднее квадратическое отклонение. Величина T имеет распределение Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: a = a_0$ о равенстве неизвестной генеральной средней a (нормальной совокупности с неизвестной дисперсией) гипотетическому значению a_0 при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq a_0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия $T = \frac{(\overline{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{S}$ и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы найти критическую точку $t_{двуст.кр(\alpha;k)}$.

Если $|T_{набл}| < t_{двуст.кр.}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $|T_{набл}| > t_{двуст.кр.}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе $H_1: a > a_0$ по уровню значимости α, и числу степеней свободы $k = n-1$ находят критическую точку $t_{правост.кр(\alpha;k)}$ правосторонней критической области. Если $T_{набл} < t_{правост.кр.}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $T_{набл} > t_{правост.кр.}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: a < a_0$ сначала находят «вспомогательную» критическую точку (по правилу 2) $t_{правост.кр(\alpha;k)}$ и полагают границу левосторонней критической области $t_{левост.кр(\alpha;k)} = -t_{правост.кр.(\alpha;k)}$. Если $T_{набл} > -t_{правост.кр.}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $T_{набл} < -t_{правост.кр.}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Пример. Проектный контролируемый размер изделий, изготовляемых станком-автоматом, $a = a_0 = 35$ мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

Контролируемый размер x_i	34,8	34,9	35,0	35,1	35,3
Частота (число изделий) n_i	2	3	4	6	5

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0 $a = a_0 = 35$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 35$.

Решение. Найдем средний размер изделий выборки:

$$\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i = \frac{34{,}8 \cdot 2 + 34{,}9 \cdot 3 + 35{,}0 \cdot 4 + 35{,}1 \cdot 6 + 35{,}3 \cdot 5}{20} = 35{,}07.$$

Найдем исправленную дисперсию. Для упрощения расчета перейдем к условным вариантам $u_i = 10 \cdot x_i - 351$. В итоге получим распределение:

u_i	-3	-2	-1	0	2
n_i	2	3	4	6	5

Найдем исправленную дисперсию условных вариант:

$$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{\left(\sum n_i u_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{54 - \frac{(-6)^2}{20}}{19} = 2{,}747.$$

Следовательно, исправленная дисперсия первоначальных вариант $s_X^2 = \frac{2{,}747}{100} = 0{,}027$. Отсюда, «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s_X = \sqrt{0{,}027} = 0{,}16$.

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$T = \frac{\left(\bar{x} - a_0\right) \cdot \sqrt{n}}{S} = \frac{(35{,}07 - 35{,}0)\sqrt{20}}{0{,}16} = 1{,}96.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $a \neq a_0$, поэтому критическая область – двусторонняя. По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и по числу степеней свободы $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$ находим критическую точку $t_{двуст.кр(0{,}05;19)} = 2{,}09$. Так как $|T_{набл}| < t_{двуст.кр.}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, станок обеспечивает проектный размер изделий.

2.10 Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей с неизвестными дисперсиями (зависимые выборки)

Пусть генеральные совокупности X и У распределены нормально, причем их дисперсии неизвестны. Из этих совокупностей извлечены выборки одинакового объема n, варианты которых равны x_i и y_i. Введем следующие обозначения:

$d_i = x_i - y_i$ – разности вариант с одинаковыми номерами,

$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$ – средняя разностей вариант с одинаковыми номерами,

$s_d = \frac{\sum d_i^2 - \frac{\left(\sum d_i\right)^2}{n}}{n-1}$ – «исправленное» среднее квадратическое отклонение.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$ о равенстве двух средних нормальных совокупностей Х и У с неизвестными дисперсиями (в случае зависимых выборок одинакового объема) при конкурирующей гипотезе $H_1: M(\overline{X}) \neq M(\overline{Y})$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия: $T_{набл} = \dfrac{\overline{d}\sqrt{n}}{s_d}$ и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости и числу степеней свободы найти двустороннюю критическую точку. Если $|T_{набл}| < t_{двуст.кр.}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $|T_{набл}| > t_{двуст.кр.}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Пример. Двумя приборами в одном и том же порядке измерены шесть деталей и получены следующие результаты измерений (в сотых долях миллиметра):

$x_1 = 2, x_2 = 3,\ x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10$;

$y_1 = 10, y_2 = 3,\ y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4$.

По уровню значимости 0,05 установить, значимо или незначимо различаются результаты измерений, в предположении, что они распределены нормально.

Решение. Найдем разности $d_i = x_i - y_i$; вычитая из чисел первой строки числа второй, получим: $d_1 = -8, d_2 = 0,\ d_3 = -1, d_4 = 5, d_5 = 1, d_6 = 6$.

Найдем выборочную среднюю, учитывая, что $\sum d_i = 3,\ \overline{d} = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$.

Найдем «исправленное» среднее квадратическое отклонение, учитывая, что $\sum d_i^{\,2} = 127$ и $\sum d_i = 3$: $s_d = \dfrac{\sum d_i^2 - \dfrac{\left(\sum d_i\right)^2}{n}}{n-1} = \sqrt{\dfrac{127 - \dfrac{9}{6}}{6-1}} == \sqrt{25{,}1}$.

Найдем наблюдаемое значение критерия: $T_{набл} = \dfrac{\overline{d}\sqrt{n}}{s_d} = \dfrac{0{,}5 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{25{,}1}} = 0{,}24$.

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $k = n - 1 = 6 - 1 = 5$ находим критическую точку $t_{двуст.кр(0,05;5)} = 2{,}57$.

Так как $T_{набл} < t_{двуст.кр.}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, средние результаты измерений различаются незначительно.

3. Основы теории надежности

Теория надежности как научная дисциплина изучает закономерности возникновения и устранения отказов объектов. В Большой Энциклопедии теория надежности определяется так: «научная дисциплина, в которой разрабатываются и изучаются методы обеспечения эффективности работы объектов в процессе эксплуатации». Теория надежности изучает критерии и характеристики надежности, методы анализа надежности, синтеза сложных систем по критериям надежности, повышения надежности, методы испытаний объектов на надежность, методы эксплуатации объектов с учетом их надежности.

Теория надежности является прикладной технической наукой. Математические основы теории надежности направлены на проведение расчетов количественных показателей надежности по результатам исследований закономерности возникновения отказов объектов, восстановления их работоспособности, влияния внешних и внутренних воздействий на процессы и т. д., а также для сбора, учета и анализа статистических данных, характеризующих надежность.

3.1 Термины и понятия надежности. Показатели надежности устройств

Безотказность — свойство устройства сохранять работоспособность в течение заданного интервала времени в определенных условиях эксплуатации.

Вероятность отказа — вероятность того, что в течение заданного интервала времени работы в определенных условиях эксплуатации возникнет хотя бы один отказ устройства.

Внезапный отказ — отказ, возникший в результате скачкообразного изменения значений одного или нескольких основных параметров устройства.

Восстанавливаемое устройство — устройство, работа которого после отказа может быть возобновлена в результате проведения необходимых восстановительных работ.

Восстанавливаемость — свойство устройства, которое заключается в возможности его использования после проведения ремонта или каких-либо других мероприятий по устранению отказов.

Восстановление — процесс обнаружения и устранения отказа с целью восстановления работоспособности устройства.

Время восстановления — продолжительность перерыва в работе восстанавливаемого устройства при обнаружении и устранении отказа.

Время работы — время, в течение которого устройство, выполняя свои функции, должно безотказно работать.

Время работы до отказа — случайный интервал времени от начала работы устройства до первого отказа.

Время работы между отказами — случайный интервал времени от начала работы устройства с момента окончания очередного восстановления до момента следующего отказа.

Интенсивность восстановления — условная плотность распределения времени восстановления в некоторый момент времени при условии, что к этому моменту устройство не восстановлено.

Интенсивность отказов — условная плотность вероятности отказа устройства в некоторый момент времени при условии, что до этого момента отказа не было.

Исправность — состояние устройства, при котором оно соответствует всем требованиям, установленным как в отношении основных параметров устройства, так и в отношении второстепенных параметров (характеризующих удобства эксплуатации, внешний вид и т. п.).

Коэффициент готовности — вероятность того, что восстанавливаемое устройство будет работоспособно в любой, произвольно выбранный момент времени в стационарном процессе функционирования.

Коэффициент надежности — вероятность того, что восстанавливаемое устройство проработает в течение интервала времени заданной длительности, начиная с произвольного момента времени в стационарном процессе функционирования.

Коэффициент простоя — вероятность того, что восстанавливаемое устройство будет неработоспособно в любой, произвольно выбранный момент времени в стационарном процессе функционирования.

Нагруженный резерв — способ резервирования, при котором резервное устройство находится в рабочем режиме.

Надежность — свойство устройства, обеспечивающее выполнение им требуемой задачи в установленном для него объеме в определенных условиях эксплуатации.

Наработка — продолжительность или объем работы устройства в определенных условиях.

Невосстанавливаемое устройство — устройство, работа которого после отказа считается невозможной (по крайней мере, в условиях рассматриваемой математической модели).

Неисправность — состояние устройства, при котором оно не соответствует хотя бы одному из предъявляемых требований.

Ненагруженный резерв — способ резервирования, при котором резервное устройство не может отказать до момента включения.

Нестационарный коэффициент готовности — вероятность того, что устройство будет работоспособно в некоторый определенный момент времени.

Нестационарный коэффициент надежности — вероятность того, что устройство будет неработоспособно в некоторый определенный момент времени.

Облегченный резерв — способ резервирования, при котором резервное устройство находится в неполном рабочем режиме.

Общее резервирование — способ резервирования, при котором резервируется устройство в целом.

Отказ — событие, заключающееся в полной или частичной утрате работоспособности устройства.

Полный отказ — отказ, до устранения которого использование устройства по назначению становится невозможным.

Последовательное соединение — совокупность устройств, для которой необходимым и достаточным условием отказа является отказ хотя бы одного любого устройства, входящего в данную совокупность.

Постепенный отказ — отказ, возникший в результате постепенного изменения значений одного или нескольких основных параметров устройства.

Постоянное резервирование — резервирование, при котором резервные устройства присоединены к основным в течение всего времени работы.

Работоспособность — состояние устройства, при котором оно в данный момент времени соответствует всем требованиям, установленным для рабочих параметров.

Раздельное резервирование — метод резервирования, при котором резервируются отдельные части устройства.

Резервирование — метод повышения надежности устройств путем применения дополнительных (резервных) устройств.

Резервирование замещением — резервирование, при котором резервные устройства замещают основные после их отказа.

Ремонтопригодность — свойство устройства, выражающееся в приспособленности его к обнаружению и устранению отказов, а также к их предупреждению.

Система — совокупность совместно действующих объектов, которая предназначена для самостоятельного выполнения установленного задания.

Скользящий резерв — способ резервирования группы основных устройств группой резервных, когда любое из резервных устройств может быть подключено вместо любого отказавшего основного устройства.

Среднее время безотказной работы — краткое название для математического ожидания случайного времени до любого очередного отказа в случае, когда понятия среднего времени работы до отказа и среднего времени работы между отказами полностью эквивалентны.

Среднее время восстановления — математическое ожидание величины перерыва в работе восстанавливаемого устройства при устранении отказа.

Среднее время работы до отказа — математическое ожидание случайного времени работы до первого отказа.

Среднее время работы между отказами — математическое ожидание случайного времени работы между отказами.

Суммарная наработка — сумма наработок одного или нескольких устройств за определенный период времени.

Частичный отказ — отказ, до устранения которого остается возможность хотя бы частичного использования устройства по назначению.

Частота отказов — плотность распределения времени работы устройства до его отказа.

Элемент системы — часть системы, предназначенная для выполнения определенных функций.

Эффективность функционирования — мера качества собственно функционирования устройства, степень целесообразности использования устройства для выполнения заданных функций. Основным количественным показателем эффективности функционирования обычно выбирается вероятность выполнения устройством своих функций в определенных условиях.

3.2 Количественные характеристики надежности

Критерии надежности невосстанавливаемых изделий

Вероятность безотказной работы по статистическим данным об отказах: $\overline{P}(t)=\dfrac{N_0-n(t)}{N_0}$, где N_0 — число изделий в начале испытания; $n(t)$ — число отказавших изделий за время t.

Отказ и безотказная работа являются событиями несовместными и противоположными, поэтому $Q(t)=P(T\le t)$, $\overline{Q}(t)=\dfrac{n(t)}{N_0}$, $Q(t)=1-P(t)$.

Частота отказов: $\overline{a}(t)=\dfrac{n(\Delta t)}{N_0\Delta t}$, где $n(\Delta t)$ — число отказавших образцов в интервале времени от $t-\dfrac{\Delta t}{2}$ до $t+\dfrac{\Delta t}{2}$.

Интенсивность отказов: $\overline{\lambda}(t)=\dfrac{n(\Delta t)}{N_{ср}\Delta t}$, где $N_{ср}=\dfrac{N_i+N_{i+1}}{2}$ — среднее число исправно работающих изделий в интервале Δt; N_i — число изделий, исправно работающих в начале интервала Δt; N_{i+1} — число изделий, исправно работающих в конце интервала Δt.

Вероятностная оценка интенсивности отказов: $\lambda(t)=\dfrac{a(t)}{P(t)}$.

Средняя наработка до первого отказа по статистическим данным : $\overline{T_{ср}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N_0}t_i}{N_0}$, где t_i — время безотказной работы i-го образца; N_0 — число испытуемых образцов.

При изучении надежности технических устройств наиболее часто применяются следующие законы распределения времени безотказной работы: экспоненциальный, усеченный нормальный, Релея, Гамма, Вейбулла.

Критерии надежности восстанавливаемых изделий

Параметром потока отказов называется отношение числа отказавших изделий в единицу времени к числу испытываемых изделий при условии, что все вышедшие из строя изделия заменяются исправными (новыми или отремонтированными).

$\overline{\omega}(t)=\dfrac{n(\Delta t)}{N\Delta t}$, где $n(\Delta t)$ — число отказавших образцов в интервале времени от $t-\dfrac{\Delta t}{2}$ до $t+\dfrac{\Delta t}{2}$; N — число испытываемых образцов; Δt — интервал времени.

Наработкой на отказ называется среднее значение времени между соседними отказами. $\overline{t_{cp}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$, где t_i — время исправной работы изделия между $(i-1)$-м и i-м отказами; n — число отказов за некоторое время t.

Если на испытании находится N образцов в течение времени t, то наработка на отказ: $\overline{t_{cp}}=\dfrac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j} t_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} n_j}$, где t_{ij} — время исправной работы j-го образца изделия между $(i-1)$-м и i-м отказом; n_j — число отказов за время t j-го образца.

Коэффициент готовности: $K_Г=\dfrac{t_p}{t_p+t_П}$, где t_p — суммарное время исправной работы изделия; $t_П$ — суммарное время вынужденного простоя. Времена t_p и $t_П$ вычисляются по формулам $t_p=\sum_{i=1}^{n} t_{pi}$, $t_П=\sum_{i=1}^{n} t_{Пi}$, где t_{pi} — время работы изделия между $(i-1)$-м и i-м отказом; $t_{Пi}$ — время вынужденного простоя после i-го отказа; n — число отказов (ремонтов) изделия.

Пример. На испытание поставлено $N_0=400$ изделий. За время $t=3000$ ч вышло из строя $n(t)=200$ штук изделий. За последующий интервал времени $\Delta t=100$ ч вышло из строя $n(\Delta t)=100$ изделий. Необходимо вычислить вероятность безотказной работы за время $t=3000$ ч, $t+\dfrac{\Delta t}{2}=3050$ ч и $t+\Delta t=3100$ ч, частоту отказов и интенсивность отказов на интервале $\Delta t=100$ ч.

Решение. По формуле $\overline{P}(t)=\dfrac{N_0-n(t)}{N_0}$ найдем вероятность безотказной работы: $\overline{P}(3000)=\dfrac{N_0-n(3000)}{N_0}=\dfrac{400-200}{400}=0{,}5$;

$$\overline{P}(3100)=\frac{N_0-n(3100)}{N_0}=\frac{400-(200+100)}{400}=0{,}25.$$

Определим среднее число исправно работающих образцов в интервале Δt:

$$N_{cp} = \frac{N_i + N_{i+1}}{2} = \frac{200+100}{2} = 150.$$

Число отказавших изделий за время $t = 3050$ ч $n(3050) = N_0 - N_{cp} = 400 - 150 = 250$, $\overline{P}(3050) = \frac{N_0 - n(3050)}{N_0} = \frac{400-250}{400} = 0{,}375$,

$$\overline{a}(3050) = \frac{n(\Delta t)}{N_0 \Delta t} = \frac{100}{100 \cdot 400} = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{час},$$

$$\overline{\lambda}(3050) = \frac{n(\Delta t)}{N_{cp}\Delta t} = \frac{100}{100\frac{200+100}{2}} = 6{,}7 \cdot 10^{-3} \frac{1}{час}.$$

Интенсивность отказа можно также определить по формуле $\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)}$:

$$\overline{\lambda}(t) = \frac{\overline{a}(3050)}{\overline{P}(3050)} = \frac{0{,}0025}{0{,}375} = 6{,}7 \cdot 10^{-3} \frac{1}{час}.$$

Пример. Система состоит из 5 приборов, причем отказ любого одного из них ведет к отказу системы. Известно, что первый прибор отказал 34 раза в течение 952 ч работы, второй — 24 раза в течение 960 ч работы, а остальные приборы в течение 210 ч работы отказали 4, 6 и 5 раз соответственно. Требуется определить наработку на отказ системы в целом, если справедлив экспоненциальный закон надежности для каждого из пяти приборов.

*Решение***.** Для решения данной задачи воспользуемся следующими соотношениями: $\lambda_c = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$ и $t_{cp} = \frac{1}{\lambda_c}$. Определим интенсивность отказов для каждого прибора: $\overline{\lambda}_1 = \frac{34}{952} = 0{,}0357 \frac{1}{час}$, $\overline{\lambda}_2 = \frac{24}{960} = 0{,}025 \frac{1}{час}$,

$\overline{\lambda}_{3,4,5} = \frac{4+6+5}{210} = 0{,}0714 \frac{1}{час}$. Интенсивность отказов системы будет

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{3,4,5} = 0{,}0357 + 0{,}025 + 0{,}0714 = 0{,}1321 \frac{1}{час}.$$

Средняя наработка на отказ системы равна $t_{cp} = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{0{,}1321} = 7{,}57$ ч.

Пример. Пусть время работы элемента до отказа подчинено экспоненциальному закону распределения с параметром $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{1}{ч}$. Требуется вычислить количественные характеристики надежности элемента $P(t), a(t), T_{cp}$, если $t = 1000$ ч.

Решение. Вычислим вероятность безотказной работы и частоту отказа:

$$P(t)=e^{-\lambda t}=e^{-2{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 1000}=e^{-0{,}025}=0{,}9753\,,\quad a(1000)=2{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 0.9753=2{,}439\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{ч}\,.$$

Вычислим среднюю наработку до первого отказа: $T_{ср}=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2{,}5\cdot 10^{-5}}=40000$ ч.

Пример. Время работы изделия до отказа подчиняется закону распределения Релея. Требуется вычислить количественные характеристики надежности изделия $P(t), a(t), \lambda(t), T_{ср}$ для $t=1000$ ч, если параметр распределения $\sigma=1000$ ч.

Решение. Вероятность безотказной работы, используя формулу: $P(t)=e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, $P(1000)=e^{-\frac{1000^2}{2\cdot 1000^2}}=e^{-0{,}5}=0{,}606$.

Частота отказа: $a(t)=\frac{t}{\sigma^2}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, $a(1000)=\frac{1000}{1000^2}e^{-\frac{1000^2}{2\cdot 1000^2}}=0{,}606\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{ч}$.

Интенсивность отказа: $\lambda(t)=\frac{t}{\sigma^2}$, $\lambda(1000)=\frac{1000}{1000^2}=10^{-3}\,\frac{1}{ч}$. Средняя наработка до первого отказа: $T_{ср}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$, $T_{ср}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot 1000=1253$ ч.

Пример. Время безотказной работы устройства подчиняется закону Вейбулла с параметрами $k=1{,}5$ и $\lambda_0=10^{-4}\,\frac{1}{ч}$, а время его работы $t=100$ ч. Требуется вычислить количественные характеристики надежности такого устройства $P(t), a(t), \lambda(t), T_{ср}$.

Решение: Определим вероятность безотказной работы по формуле $P(t)=e^{-\lambda_0 t^k}$. $P(100)=e^{-10^{-4}\cdot 100^{1{,}5}}=0{,}9$. Частота отказов определяется по формуле $a(t)=\lambda_0 k t^{k-1}\cdot e^{-\lambda_0 t^k}$, тогда $a(100)=10^{-4}\cdot 1{,}5\cdot 100^{0{,}5}\cdot 0{,}9=1{,}35\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{ч}$. Интенсивность отказов $\lambda(t)=\frac{a(t)}{P(t)}=\frac{1{,}35\cdot 10^{-3}}{0{,}9}=1{,}5\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{ч}$. Средняя наработка до первого отказа $T_{ср}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}{\lambda_0^{\frac{1}{k}}}$. Вначале вычислим значение гамма-функции. В нашем случае аргумент x равен $\frac{1}{k}+1=\frac{1}{1{,}5}+1\approx 1{,}67$, тогда $\Gamma(x)=0{,}9033$.

$$T_{ср}=\frac{0{,}9033}{\left(10^{-4}\right)^{\frac{1}{1{,}5}}}\approx 418\ \text{ч.}$$

3.3 Расчет характеристик надежности невосстанавливаемых изделий при основном соединении элементов

Если отказ технического устройства наступает при отказе одного из его элементов, то говорят, что такое устройство имеет основное соединение элементов. Тогда вероятность безотказной работы изделия в течение времени t равна произведению вероятностей безотказной работы ее элементов в течение того же времени. При экспоненциальном законе распределения, т. е. $\lambda = const$:

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t} = e^{-\frac{t}{T_{cpc}}},\ \lambda_c = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i,\ a_c(t) = \lambda_c e^{-\lambda_c t},\ T_{cpc} = \frac{1}{\lambda_c}.$$

Если все элементы данного типа равнонадежны, интенсивность отказов системы будет $\lambda_c = \sum_{i=1}^{r} N_i \lambda_i$, где N_i — число элементов i-го типа; r — число типов элементов. Вероятность безотказной работы высоконадежных систем:

$$P_c(t) \approx 1 - t\sum_{i=1}^{r} N_i \lambda_i = 1 - \lambda_c t,\ \lambda_c = \sum_{i=1}^{r} N_i \lambda_i,\ T_c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} N_i \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_c},\ a(t) \approx \lambda_c (1 - \lambda_c t).$$

При расчете надежности систем часто приходится перемножать вероятности безотказной работы отдельных элементов расчета, возводить их в степень и извлекать корни. При значениях $P(t)$, близких к единице, эти вычисления можно с достаточной для практики точностью выполнять по следующим приближенным формулам:

$$p_1(t) p_2(t) p_3(t) \cdot \ldots \cdot p_N(t) \approx 1 - \sum_{i=1}^{N} q_i(t),\ p_i^N(t) = 1 - N q_i(t),\ \sqrt[N]{p_i(t)} = 1 - \frac{q_i(t)}{N},$$ где $q_i(t)$ — вероятность отказа i-го блока.

Пример. Изделие состоит из $N = 5200$ элементов, средняя интенсивность отказов которых $\lambda_{cp} = 0{,}16 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{ч}$. Требуется вычислить вероятность безотказной работы в течение $t = 200$ ч и среднюю наработку до первого отказа. Справедлив экспоненциальный закон надежности.

Решение. Учитывая, что справедлив экспоненциальный закон надежности, то вероятность безотказной работы находится по формуле $P_c(t) = e^{-\lambda_c t}$.

Интенсивность отказов системы будет $\lambda_c = \lambda_{cp} N = 0{,}16 \cdot 10^{-5} \cdot 5200 = 832 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{ч}$

Тогда $P_c(200) = e^{-832 \cdot 10^{-5} \cdot 200} = e^{-1{,}664} = 0{,}19$.

Средняя наработка до первого отказа вычисляется по формуле $T_{cpc} = \frac{1}{\lambda_c}$.

$$T_{cpc} = \frac{1}{832 \cdot 10^{-5}} = 120\ ч.$$

3.4 Расчет характеристик надежности невосстанавливаемых резервированных изделий

1.Общее резервирование с постоянно включенным резервом и с целой кратностью:

$P_c(t)=1-\left[1-\prod_{i=1}^{n}p_i(t)\right]^{m+1}$, где $p_i(t)$ — вероятность безотказной работы i-го элемента в течение времени t; n — число элементов основной или любой резервной цепи; m — число резервных цепей (кратность резервирования).

При экспоненциальном законе надежности, когда $p_i(t)=e^{-\lambda_i t}$, $P_c(t)=1-\left[1-e^{-\lambda_0 t}\right]^{m+1}$, $T_{cpc}=\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1}=T_{cp0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1}$, где $\lambda_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ — интенсивность отказов нерезервированной системы или любой из m резервных систем; T_{cp0} — среднее время безотказной работы нерезервированной системы или любой из m резервных систем. При резервировании неравнонадежных изделий $P_c(t)=1-\prod_{i=0}^{m}q_i(t)=1-\prod_{i=0}^{m}(1-p_i(t))$, где $q_i(t)$, $p_i(t)$ — вероятность отказов и вероятность безотказной работы в течение времени t i-го изделия соответственно.

2. ***Раздельное резервирование с постоянно включенным резервом и с целой кратностью***: $P_c(t)=\prod_{i=1}^{n}\left\{1-\left[1-p_i(t)\right]^{m_i+1}\right\}$, где $p_i(t)$ — вероятность безотказной работы i-го элемента; m_i —кратность резервирования i-го элемента; n — число элементов основной системы.

При экспоненциальном законе надежности, когда $p_i(t)=e^{-\lambda_i t}$,

$P_c(t)=\prod_{i=1}^{n}\left\{1-\left[1-e^{-\lambda_i t}\right]^{m_i+1}\right\}$. При равнонадежных элементах и одинаковой кратности их резервирования $P_c(t)=\left\{1-\left[1-e^{-\lambda t}\right]^{m+1}\right\}^{n}$.

$$T_{cpc}=\int_0^\infty P_c(t)dt=\frac{(n-1)!}{\lambda(m+1)}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{\nu_i(\nu_i+1)\ldots(\nu_i+n-1)},\ \text{где}\ \nu_i=\frac{i+1}{m+1}.$$

3. ***Общее резервирование замещением с целой кратностью:*** $P_{m+1}(t)=P_m(t)+\int_0^t P(t-\tau)a_m(\tau)d\tau$, где $P_{m+1}(t)$, $P_m(t)$ — вероятности безотказной работы резервированной системы кратности $m+1$ и m соответственно; $P(t-\tau)$ — вероятность безотказной работы основной системы в течение времени $(t-\tau)$; $a_m(\tau)$ — частота отказов резервированной системы кратности m в момент времени τ.

При экспоненциальном законе надежности и ненагруженном состоянии резерва $P_c(t)=e^{-\lambda_0 t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}$, $T_{cpc}=T_{cp0}(m+1)$, где λ_0, T_{cp0} — интенсивность отказов и средняя наработка до первого отказа основного (нерезервированного устройства) устройства.

При экспоненциальном законе и недогруженном состоянии резерва $P_c(t) = e^{-\lambda_0 t}\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)^i\right]$,

$T_{cpc} = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{1+ik}$, где $a_i = \prod_{j=0}^{i-1}\left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)$; $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$; λ_1 — интенсивность отказов резервного устройства до замещения.

4. ***Раздельное резервирование замещением с целой кратностью:*** $P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t)$, где $p_i(t)$ — вероятность безотказной работы системы из-за отказов элементов i-го типа, резервированных по способу замещения. Вычисляется $p_i(t)$ по формулам общего резервирования замещением.

5. Общее резервирование с дробной кратностью:

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{l-h} C_l^i \, p_0^{\,l-i}(t) \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j \, p_0^j(t), \quad T_{cpc} = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{l-h}\frac{1}{h+i},$$

где $p_0(t)$ — вероятность безотказной работы основного или любого резервного элемента; l — общее число основных и резервных систем; h — число систем, необходимых для нормальной работы резервированной системы.

В данном случае кратность резервирования $m = \frac{l-h}{h}$.

6. Скользящее резервирование:

Рассмотрим скользящее резервирование при экспоненциальном законе надежности

$$P_c(t) = e^{-n\lambda t}\left[1 + n\lambda t + \frac{(n\lambda t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(n\lambda t)^{m_0}}{m_0!}\right] = e^{-n\lambda t}\sum_{i=0}^{m_0}\frac{(n\lambda t)^i}{i!} = e^{-\lambda_0 t}\sum_{i=0}^{m_0}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} \qquad T_{cpc} = T_{cp0}(m_0+1),$$

где $\lambda_0 = n\lambda$ — интенсивность отказов нерезервированной системы; λ — интенсивность отказов элемента; n — число элементов основной системы; T_{cp0} — среднее время безотказной работы нерезервированной системы; m_0 — число резервных элементов. В этом случае кратность резервирования $m = \frac{m_0}{n}$.

Пример. Цифровая вычислительная машина состоит из 1024 однотипных ячеек и сконструирована так, что имеется возможность заменить любую из отказавших ячеек. В составе ЗИП имеется 3 ячейки, каждая из которых может заменить любую отказавшую. Требуется определить вероятность и среднюю наработку до первого отказа ЦВМ в течение 10000 ч, если известно, что интенсивность отказов ячейки равна $0{,}12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{ч}$. Под отказом будем понимать событие, когда ЦВМ не может работать из-за отсутствия ЗИПа, т.е. когда весь ЗИП израсходован и отказала еще одна ячейка памяти ЦВМ.

Решение. Так как любая ячейка из состава ЗИПа может заменить любую. Отказавшую ячейку ЦВМ, то имеет место «скользящее» резервирование. Вероятность безотказной работы может быть вычислена по формуле $P_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{m_0} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}$. В нашем случае число элементов основной системы $n = 1024$, интенсивность отказов нерезервированной системы $\lambda_0 = n\lambda = 1024 \cdot 0{,}12 \cdot 10^{-6} \approx 1{,}23 \cdot 10^{-4} \frac{1}{ч}$, число резервных элементов $m_0 = 3$.

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 t}\left(1 + \lambda_0 t + \frac{\lambda_0^2 t^2}{2} + \frac{\lambda_0^3 t^3}{6}\right) = e^{-1{,}23 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + 1{,}23 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 + \frac{\left(1{,}23 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4\right)^2}{2} + \frac{\left(1{,}23 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4\right)^3}{6}\right) \approx 0{,}96$$

Средняя наработка до первого отказа на основании $T_{срс} = T_{ср0}(m_0 + 1)$ будет $T_{срс} = \frac{1}{\lambda_0}(m_0 + 1) = \frac{1}{1{,}23 \cdot 10^{-4}}(3 + 1) \approx 32500$ ч.

Пример. Система электроснабжения состоит из четырех генераторов, номинальная мощность каждого из которых $W = 18квт$. Безаварийная работа еще возможна, если система электроснабжения может обеспечить потребителя мощностью $30квт$. Необходимо определить вероятность безотказной работы системы электроснабжения в течение времени $t = 600$ ч, если интенсивность отказов каждого из генераторов $\lambda = 0{,}15 \cdot 10^{-3} \frac{1}{ч}$. Необходимо также найти среднюю наработку до первого отказа системы электроснабжения.

Решение. Мощности двух генераторов достаточно для питания потребителей, так как их суммарная мощность составляет $36квт$, а по условию задачи достаточно лишь $30квт$.

Это значит, что отказ системы электроснабжения еще не наступит, если откажут один или два любых генератора. Здесь имеет место случай резервирования с дробной кратностью, когда общее число устройств $l = 4$, число устройств, необходимых для нормальной работы, $h = 2$, а кратность резервирования $m = \frac{2}{2}$. На основании формулы $P_c(t) = \sum_{i=0}^{l-h} C_l^i p^{l-i}(t) \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j p_0^j(t)$

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{2} C_4^i p^{l-i}(t) \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j p_0^j(t) = 6p^2 - 8p^3 + 3p^4 = 6e^{-2\lambda t} - 8e^{-3\lambda t} + 3e^{-4\lambda t}.$$

Для данных задачи $\lambda t = 0{,}15 \cdot 10^{-3} \cdot 600 = 0{,}09$.

Тогда $P_c(600) = 6e^{-0{,}18} - 8e^{-0{,}27} + 3e^{-0{,}36} \approx 0{,}997$.

Средняя наработка до первого отказа на основании формулы $T_{cpc} = \dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{l-h}\dfrac{1}{h+i}$ будет $T_{cpc} = \dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{2}\dfrac{1}{2+i} = \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{13}{12\lambda} = \dfrac{13}{12\cdot 0{,}15\cdot 10^{-3}} \approx 7220$ ч.

*Пример.*Радиопередатчик имеет интенсивность отказов $\lambda_0 = 0{,}4\cdot 10^{-3}\,\dfrac{1}{ч}$. Его дублирует такой же передатчик, находящийся до отказа основного в режиме ожидания (в недогруженном состоянии резерва). В этом режиме интенсивность отказов передатчика $\lambda_1 = 0{,}06\cdot 10^{-3}\,\dfrac{1}{ч}$. Требуется вычислить вероятность безотказной работы передающей системы в течение $t = 100$ ч.

Решение. В нашем случае кратность резервирования $m = 1$, тогда на основании формулы $P_c(t) = e^{-\lambda_0 t}\left[1 + \sum_{i=1}^{m}\dfrac{a_i}{i!}\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)^i\right]$, где $a_i = \prod_{j=0}^{i-1}\left(j + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)$, λ_1 — интенсивность отказов резервного устройства до замещения, для случая общего резервирования при недогруженном состоянии резерва имеем

$P_c(t) = e^{\lambda_0 t}\left[1 + \sum_{i=1}^{1}\dfrac{a_i}{i!}\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)^i\right] = e^{\lambda_0 t}\left[1 + a_1\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)\right]$, где $a_1 = \prod_{j=0}^{0}\left(j + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) = \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}$, или окончательно $P_c(t) = e^{-\lambda_0 t}\left(1 + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1} - \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}\right)$.

Подставляя в эту формулу значения неизвестных из условия задачи, получим

$$P_c(100) = e^{-0{,}4\cdot 10^{-3}\cdot 100}\left(1 + \frac{0{,}4\cdot 10^{-3}}{0{,}06\cdot 10^{-3}} - \frac{0{,}4\cdot 10^{-3}}{0{,}06\cdot 10^{-3}}e^{-0{,}06\cdot 10^{-3}\cdot 100}\right) = 0{,}998.$$

3.5 Расчет надежности восстанавливаемых изделий

К восстанавливаемым относятся такие изделия, которые после отказов могут быть отремонтированы и снова выполнять свои функции. Восстановление возможно с прекращением выполнения изделием своих функций и без нарушения выполнения своих функций.

*Пример.*Восстанавливаемая резервированная система (резерв замещением кратности m) состоит из одинаковых по надежности элементов, интенсивности их отказов $\lambda = 0{,}1\dfrac{1}{ч}$, $\mu = 0{,}5\dfrac{1}{ч}$. Определить кратность резервирования, при которой наработка на отказ системы удовлетворяет требованию надежности: $t \geq 9000$ ч. Рассмотреть случаи полностью ограниченного и неограниченного восстановления.

Решение. Случай ограниченного восстановления (одна ремонтная бригада). Наработка на отказ резервированной системы кратности m вычисляется по формуле $t = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{m}\gamma^i$, где $\gamma = \frac{\mu}{\lambda}$. $\gamma = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{0{,}5}{0{,}1} = 5$.

При $m=1$ $t = 10(1+5) = 60$ ч; при $m=2$ $t = 10(1+5+25) = 310$ ч;

при $m=3$ $t = 10(1+5+25+125) = 1560$ ч; $m=4$ $t = 10(1+5+25+125+625) = 7810$ ч;

при $m=5$ $t = 10(1+5+25+125+625+3125) = 39060$ ч.

Требуемая надежность обеспечивается только при кратности резервирования $m=5$.

В случае неограниченного восстановления наработка на отказ вычисляется по формуле $t = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{(m-i)!}\cdot\gamma^i$, где $\gamma = \frac{\mu}{\lambda}$.

В результате расчетов получим: при $m=1$ $t = 10(1+5) = 60$ ч;

$m=2$ $t = 10(1+2\cdot5+2\cdot1\cdot25) = 610$ ч; $m=3$ $t = 10(1+3\cdot5+3\cdot2\cdot25+3\cdot2\cdot1\cdot125) = 9160$ ч. В данном случае требуемая надежность достигается уже при кратности резервирования $m=3$.

3.6 Оценка и контроль надежности технических устройств по результатам их испытаний

Экспоненциальное распределение

Экспоненциальное распределение характерно для внезапных отказов элементов и систем. Плотность вероятности экспоненциального распределения задается уравнением $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, где λ — интенсивность отказов есть величина, обратная средней наработке до отказа $\lambda = \frac{1}{T}$.

Учитывая, что при экспоненциальном распределении $P(t) = e^{-\lambda t}$, $T = \frac{1}{\lambda}$, получим $P_H(t) = e^{-\lambda_B t} = e^{-\frac{t}{T_H}}$, $P_B(t) = e^{-\lambda_H t} = e^{-\frac{t}{T_B}}$, $T_H = \frac{1}{\lambda_B}$, $T_B = \frac{1}{\lambda_H}$.

Усеченное нормальное распределение

Средняя наработка до отказа и параметр T_1 усеченного нормального распределения связаны зависимостью $T = T_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}F\left(\frac{T_1}{\sigma}\right)}e^{-\frac{T_1^2}{2\sigma^2}}$.

При испытании выборки объемом в n изделий с наработкой $t_1, t_2, \ldots, t_n$ параметры распределения T и σ оцениваются по формулам $\overline{T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$, $\overline{\sigma} = S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \overline{T}\right)^2}$,

С целью экономии времени и уменьшения ошибок при подсчетах S, когда n велико, а t_i — большие или нецелые числа, следует использовать тождество $\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \overline{T}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2$.

Доверительные границы T: $T_H = \overline{T} - t_{\alpha_1(n-1)}\frac{S}{\sqrt{n}}$, $T_B = \overline{T} + t_{\alpha_2(n-1)}\frac{S}{\sqrt{n}}$, где $t_{\alpha(n-1)}$ — квантиль распределения Стьюдента для вероятности α или уровня значимости $\beta = 1 - \alpha$ и числа степеней свободы $f = n - 1$; величина $t_{\alpha(n-1)}$ находится по таблице (Приложение 1).

В случае двустороннего определения доверительных границ $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1-\alpha}{2}$.

Доверительные границы σ определяются с помощью формулы

$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\beta}{2}\right)(n-1)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\beta}{2}\right)(n-1)}}$, где $\chi^2_{\left(1-\frac{\beta}{2}\right)(n-1)}$ — квантиль *хи*-квадрат распределение при вероятности $p = 1 - \frac{\beta}{2}$ и числе степеней свободы $k = n - 1$; $\chi^2_{\left(\frac{\beta}{2}\right)(n-1)}$ — то же для вероятности $p = \frac{\beta}{2}$. Значения $\chi^2_{(p)(k)}$ находятся по таблице.

Пример. В результате испытаний 15 экземпляров электрохимических элементов были получении следующие значения наработки в часах: 10,2; 12,3; 17,1; 18,4; 20,3; 22,7; 23,1; 25,5; 26,4; 28,9; 30,3; 32,5; 33,3; 38,1; 41,0. Определим оценку средней наработки до первого отказа $\overline{T}$ и дисперсию σ^2, а также нижнюю границу T и верхнюю границу σ с вероятностью $\alpha = 0{,}95$.

Решение.

$$\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{15}\cdot$$

$$\cdot(10{,}2 + 12{,}3 + 17{,}1 + 18{,}4 + 20{,}3 + 22{,}7 + 23{,}1 + 25{,}5 + 26{,}4 + 28{,}9 + 30{,}3 + 32{,}5 + 33{,}3 + 38{,}1 + 41{,}0) =$$

$$= \frac{1}{15}\cdot 380{,}1 = 25{,}34ч$$

Определяем S^2, используя тождество $\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \overline{T}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2$:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = 104{,}04 + 151{,}29 + 292{,}41 + 338{,}56 + 412{,}09 + 515{,}29 + 533{,}61 + 650{,}25 + 696{,}96 + 835{,}21 + 918{,}09 + 1056{,}25 + 1108{,}89 + 1451{,}61 + 1681{,}00 = 10745{,}55$$

$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 = \frac{1}{15} \cdot 380{,}1^2 = \frac{144476}{15} = 9631{,}73$; $\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \overline{T}\right)^2 = 10745{,}55 - 9631{,}73 = 1113{,}82$. По формуле $\overline{\sigma} = S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \overline{T}\right)^2}$ находим S^2 и затем S : $S^2 = \frac{1}{14} \cdot 1113{,}82 = 79{,}56$ (дисперсия); $S = 8{,}92$ ч.

Для определения нижней границы T подсчитываем величину $\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{8{,}92}{\sqrt{15}} = 2{,}3$ и по таблице находим квантиль распределения Стьюдента для вероятности 0,95 и числа степеней свободы $f = 14$; $t_{(0{,}95)(14)} = 1{,}76$.

По формуле $T_H = \overline{T} - t_{\alpha_1(n-1)}\frac{S}{\sqrt{n}}$ находим $T_H = 25{,}34 - 1{,}76 \cdot 2{,}3 = 25{,}34 - 4{,}05 = 21{,}29$ ч.

Вывод: Можно утверждать с вероятностью 0,95 что средняя наработка до отказа будет не менее 21,29 ч.

Верхняя граница σ определяется из соотношения $\sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\beta}{2}\right)(n-1)}}$. По таблице находим $\chi^2_{(0{,}05)(14)} = 6{,}57$, тогда $\sigma^2 \le \frac{14 \cdot 79{,}56}{6{,}57} = 169{,}50$; $\sigma < 13$ ч.

Пример.

План $(n, Б, n)$. При испытании $n = 10$ устройств до выхода их из строя получены следующие значения наработки в часах: $t_1 = 30$, $t_2 = 35$, $t_3 = 50$, $t_4 = 85$, $t_5 = 100$, $t_6 = 150$, $t_7 = 250$, $t_8 = 300$, $t_9 = 400$, $t_{10} = 600$.

Требуется определить: оценку $\overline{\lambda}$ интенсивности отказов λ ; λ_B при $\alpha_2 = 0{,}90$; двусторонний доверительный интервал для λ при $\alpha = 0{,}90$ и $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}05$; $\overline{T}$ и его нижнюю границу с вероятностью 0,90.

Решение. Учитывая планы испытаний для случая экспоненциального распределения (оценка параметра λ) имеем: $t_{\sum} = \sum_{i=1}^{10} t_i = 2000$ ч;

$\overline{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \frac{10}{2000} = 5 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{ч}$. $\lambda_B = \frac{\chi^2_{(0{,}9)(20)}}{2 \cdot 2000}$. Пользуясь таблицей определяем $\chi^2_{(0{,}9)(20)} = 28{,}4$. тогда $\lambda_B = \frac{28{,}4}{4000} = 7{,}1 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{ч}$. Из плана испытаний следует, что $\lambda_B = \frac{\chi^2_{(0{,}95)(20)}}{4000}$; $\lambda_H = \frac{\chi^2_{(0{,}05)(20)}}{4000}$. Определяем $\chi^2_{(0{,}95)(20)} = 31{,}4$, $\chi^2_{(0{,}05)(20)} = 10{,}9$. Тогда $\lambda_B = \frac{31{,}4}{4000} = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{ч}$, $\lambda_H = \frac{10{,}9}{4000} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{ч}$.

Учитывая соотношения $\overline{T} = \frac{1}{\overline{\lambda}}$ и $T_Н = \frac{1}{\lambda_В}$, определяем $\overline{T} = \frac{2000}{10} = 200$ ч; $T_Н = \frac{2 \cdot 2000}{28{,}4} = 140$ ч.

Пример. План $(n, Б, t_0)$. За время испытаний по плану $[n = 50, Б, t_0 = 500ч]$ отказало $d = 6$ устройств, причем отказавшие устройства проработали до выхода из строя соответственно 50, 150, 200, 300, 350, 450 час. Требуется определить оценку λ и двусторонний доверительный интервал для $\alpha = 0{,}8$ при $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}10$.

Решение. На основании плана ($n, Б, t_0$) испытаний $t_{\sum} = \sum_{i=1}^{6} i + (50-6) \cdot 500 = 50 + 150 + 200 + 300 + 350 + 450 + (50-6) \cdot 500 = 1500 + 22000 = 23500$ ч. $\overline{\lambda} = \frac{d}{t_{\sum}} = \frac{6}{23500} = 2{,}55 \cdot 10^{-4} \frac{1}{ч}$.

$$\lambda_В = \frac{\chi^2_{(0,9)(12)}}{2 \cdot 23500}; \ \lambda_Н = \frac{\chi^2_{(0,10)(12)}}{2 \cdot 23500}.$$

Из таблицы $\chi^2_{(0,9)(12)} = 18{,}5$, $\chi^2_{(0,10)(12)} = 6{,}3$.

Тогда $\lambda_В = \frac{18{,}5}{47000} = 3{,}95 \cdot 10^{-4} \frac{1}{ч}$, $\lambda_Н = \frac{6{,}3}{47000} = 1{,}34 \cdot 10^{-4} \frac{1}{ч}$.

3.7 Потоки событий. Марковские случайные процессы

Потоком событий называется последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов на телефонной станции; поток сбоев ЭВМ и т. п.

Поток событий называется стационарным, если его вероятностные характеристики не зависят от выбора начала отсчета или, более конкретно, если вероятность попадания того или другого числа событий на любой интервал времени зависит только от длины этого интервала и не зависит от того, где именно на оси он расположен.

Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания на элементарный интервал времени двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Поток событий называется потоком без последствия, если число событий, попадающих на любой интервал времени, не зависит от того сколько событий попало на любой другой не пересекающийся с ним интервал.

Случайный процесс, протекающий в какой-либо физической системе S, называется марковским (или процессом без последствия), если он обладает следующим свойством: для любого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние (иначе: при фиксированном настоящем будущее не зависит от предыстории процесса — от прошлого).

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем обычно называют марковской цепью. Для такого процесса моменты $t_1, t_2, \ldots$ когда система S может менять свое состояние, удобно рассматривать как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, рассматривать не время t, а номер шага: $1, 2, \ldots, k, \ldots$. Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний $S(0), S(1), S(2), \ldots, S(k), \ldots$, если $S(0)$ — начальное состояние системы (перед первым шагом); $S(1)$ — состояние системы непосредственно после первого шага; $\ldots$; $S(k)$ — состояние системы непосредственно после $k-$го шага$\ldots$.

Рассмотрим одномерный закон распределения случайной функции $X(t)$. Обозначим через $p_i(k)$ вероятность того, что после k-го шага (и до $(k+1)$-го) система S будет в состоянии $s_i = (i = 1, 2, \ldots, n)$. Вероятности $p_i(k)$ называются вероятностями состояний цепи Маркова. Очевидно, для любого k $\sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1$. Распределение вероятностей состояний в начале процесса $p_1(0)$, $p_2(0)$, …, $p_i(0)$, …, $p_n(0)$ называется начальным распределением вероятностей марковской цепи. В частности, если начальное состояние $S(0)$ системы S в точности известно, например $S(0) = s_i$, начальная вероятность $p_i(0) = 1$, а все остальные равны нулю.

Вероятностью перехода на k-м шаге из состояния s_i в состояние s_j называется условная вероятность того, что система S после k-го шага окажется в состоянии s_j, при условии, что непосредственно перед этим (после k-1 шагов) она находилась в состоянии s_i. Вероятности перехода иногда называются также «переходными вероятностями».

Марковская цель называется однородной, если переходные вероятности не зависят от номера шага, а зависят только от того, из какого состояния и в какое осуществляется переход: $P\{S(k) = s_j | S(k-1) = s_i\} = P_{ij}$.

Переходные вероятности однородной марковской цепи P_{ij} образует квадратную таблицу (матрицу) размером $n \times n$:

$$\|P_{ij}\| = \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1j} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2j} & \ldots & P_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{i1} & P_{i2} & \ldots & P_{ij} & \ldots & P_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nj} & \ldots & P_{nn} \end{Vmatrix}. \quad \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

Если для однородной цепи Маркова заданы начальное распределение вероятностей и матрица переходных вероятностей, то вероятности состояний системы $p_i(k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ могут быть определены по рекуррентной формуле $p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1) P_{ij}$, $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n)$.

Пример. Система S — техническое устройство, состоящее из m узлов и время от времени подвергающееся профилактическому осмотру и ремонту. После каждого шага (момента осмотра и ремонта) система может оказаться в одном из следующих состояний: s_0 — все узлы исправны (ни один не заменялся новым); s_1 — один узел заменен новым, s_2 — два узла заменены новыми, остальные исправны; s_i — i узлов ($i < m$ заменены новыми, остальные исправны; ….; s_m — все m узлов заменены новыми.

Вероятность того, что в момент профилактики узел придется заменить новым, равна p (независимо от состояния других узлов). Рассматривая состояния системы S как марковскую цепь, найти переходные вероятности для соответствующих значений $m = 3$, $p = 0{,}4$ (в начальный момент все узлы исправны).

Решение. Обозначая $q = 1 - p$, запишем переходные вероятности цепи. Для любого состояния системы s_i вероятность P_{ij} равна нулю при $j < i$; вероятность P_{ii} равна вероятности того, что на данном шаге ни один узел не придется заменить новым, т. е. $m - i$ еще не замененных узлов остаются в составе устройства: $P_{ii} = q^{m-i}$. При $i < j$ вероятность перехода P_{ii} равна вероятности того, что на данном шаге из $m - i$ еще не замененных узлов $j - i$ придется заменить новыми. Пользуясь биноминальным распределением, находим $P_{ij} = C_{m-i}^{j-i} p^{j-i} q^{m-j}$.

$P_{10} = P_{20} = P_{21} = P_{30} = P_{31} = P_{32} = 0$, так как $j < i$. $P_{00} = 0{,}6^{3-0} = 0{,}6^3 = 0{,}216$, $P_{11} = 0{,}6^{3-1} = 0{,}6^2 = 0{,}36$, $P_{22} = 0{,}6^{3-2} = 0{,}6^1 = 0{,}6$, $P_{33} = 0{,}6^{3-3} = 0{,}6^0 = 1{,}0$.

$P_{01} = C_{3-0}^{1-0} \cdot p^{1-0} \cdot q^{3-1} = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432$, $P_{02} = C_{3-0}^{2-0} \cdot p^{2-0} \cdot q^{3-2} = 3 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}288$,

$P_{03} = C_{3-0}^{3-0} \cdot p^{3-0} \cdot q^{3-3} = 1 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}064$,

$P_{12} = C_{3-1}^{2-1} \cdot p^{2-1} \cdot q^{3-2} = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$,

$P_{13} = C_{3-1}^{3-1} \cdot p^{3-1} \cdot q^{3-3} = 1 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}16$,

$P_{23} = C_{3-2}^{3-2} \cdot p^{3-2} \cdot q^{3-3} = 1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}4$.

Для $m = 3$, $p = 0{,}4$ матрица переходных вероятностей будет иметь вид:

$$\left\| P_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0{,}216 & 0{,}432 & 0{,}288 & 0{,}064 \\ 0 & 0{,}36 & 0{,}48 & 0{,}16 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{Vmatrix}$$

Библиографический список

1. Вентцель, Е.С, Овчаров, Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. втузов/Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. — 6-е изд., — М.: Издательский центр «Академия», 2005. — 448 с.
2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов/В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа, 1998. – 400 с.
3. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов/Гмурман В.Е. – М.: Высшая школа, 1998. – 479 с.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам/Д.Т. Письменный – М.: Айрис-пресс, 2007. −288 с.
5. Половко, А.М., Гуров, С.В. Основы теории надежности. Практикум/А.М. Половко, С.В. Гуров — СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
6. Острейковский, В.А. Теория надежности: Учеб. для вузов/В.А. Острейковский. — М.: Высшая школа, 2003 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.1 ─ Квантили t-распределения Стьюдента
(*к* — число степеней свободы)

	Уровень значимости *α* (двусторонняя критическая область)					
к	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3.14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86.	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	3,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,05	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица Б.1 — Квантили $X^2_{a,k}$ распределения

(к — число степеней свободы)

k	Уровень значимости *a*					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7 Й	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
б	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,26
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,3	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17.7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Учебное издание

Азизян Инара Артушовна

Теория вероятностей и математическая статистика.

Элементы теории надежности

Учебное пособие

Подписано в печать _________. Тираж 5 экз.
Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53