Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Рязанский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

Ю.И. Арабчикова, Т.А. Асаева

ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Рязань
2021

УДК 51-7
ББК 22.3
А-79

Арабчикова, Ю.И.
А-79 Приложения математики к решению физических задач / Ю.И. Арабчикова, Т.А. Асаева. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2021. – 32 с.

Учебное пособие предназначено студентам младших курсов технических специальностей для облегчения усвоения материала по курсу физики. Физика широко использует различные понятия и методы математики. На лекциях по физике часто приходится пользоваться математическими сведениями, которые еще не сообщались студентам на дисциплинах по математике. Поэтому мы полагаем, что учебное пособие будет полезным не только тем, кто имеет затруднения с математикой, но также и тем, кто считает, что он силен в математике.

Математические идеи изложены в учебном пособии без усложнений и доказательств, которые во многих случаях затрудняют усвоение ценнейших идей математики. Основное внимание уделено понятиям и методам, которые широко используются в физике. Отметим, что учебное пособие не заменяет учебники по математике, но оно облегчает усвоение математических знаний на примере решения конкретных задач механики и физики.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

УДК 51-7
ББК 22.3

СОДЕРЖАНИЕ

Введение……………………………………………………………......………… 4
1 Элементы математического анализа………………………….......……. 5
1.1 Векторная алгебра, действия с векторами ………………..…......….... 5
1.2 Производная функции……………………………………….......……... 9
1.3 Интерполяция и экстраполяция функций…………………...…..….... 11
1.4 Исследование функций………………………………………........… 14
1.5 Формула Тейлора……………………………………………......….... 17
1.6 Ряд Фурье……………………………………………………….......….. 20
2 Погрешность вычисления функции……..........……………………… 21
3 Обработка экспериментальных данных………........……………...…. 25
Заключение...…………………………………...… 29
Библиографический список..…………………………………………..… 30

ВВЕДЕНИЕ

«*Математика уже тем хороша,*
что ум в порядок приводит»
М. Ломоносов

Основная задача учебного пособия – облегчить студентам младших курсов технических направлений подготовки понимание и освоение методов математики, применяемых в курсе физики. Опыт преподавания физики показывает, что наибольшие затруднения у студентов в освоении физики вызывают именно незнания основных идей и методов высшей математики. Обстоятельство усугубляется и тем, что изучение математического анализа обычно идет с большим отставанием от потребностей четкого изложения физики с применением математических идей. Так, например, уже при изучении механики – первого раздела общей физики – требуется умение решать дифференциальные уравнения и умение вычислять интегралы. А в математическом анализе соответствующие сведения излагаются, как правило, значительно позднее.

Кроме того, изложение математики ведется обычно на высоком уровне строгости, который на первом этапе изучения может вызвать затрудненияв понимании самых ценных и полезных идей. Но можно утверждать, что самые полезные идеи и методы математики могут быть изложены значительно проще без сложных доказательств, но с указанием практических приемов проверки правильностии точности соответствующих методов.

Цель предлагаемого учебного пособия– дать студентам основные понятия высшей математики для успешного освоения разделов физики. Иными словами, облегчить студентам освоение высшей математики, не отягощенное ни громоздкими доказательствами, ни логическими тонкостями.

Учебное пособие не заменяет учебники по математике, но облегчает ее усвоение. Кроме изложения идей дифференциального исчисления, в учебном пособии уделено внимание определению основных понятий и терминов, встречающихся в математике и физике (интерполирование, экстраполирование, аппроксимация, формула Тейлора, ряд Фурье). Все понятия и методы привязаны к конкретным физическим задачам. Подчеркнем, что знание без практического применения настоящим знанием не является.

История физики и математики дает много примеров взаимного обогащения этих наук. Союз этих наук взаимовыгоден. Неслучайно выдающийся физик Исаак Ньютон явился одним из создателей дифференциального и интегрального исчисления. Заметим, что сам Ньютон считал себя математиком и зашифровал одно из своих открытий – «Полезно решать дифференциальные уравнения». Физики-теоретики в своей научной работе широко используют почти весь арсенал математики. При этом часто они сами разрабатывают новые методы. «*Приближение к более глубокому пониманию основных принципов физики связано со все более сложными математическими методами*». Альберт Эйнштейн.

1 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1.1 Векторная алгебра, действия с векторами

Использование векторов существенно упрощает запись многих законов физики. Однако при этом необходимо отчетливо знать, что кроется под этой сокращенной записью. Начнем с простого примера – записи второго закона Ньютона в векторной форме с использование импульса $\vec{p} = m\vec{v}$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{p}} = \vec{F}. \tag{1.1}$$

Словесная формулировка этого закона гласит, что производная импульса по времени определяется результирующим вектором всех сил, действующих на тело или материальную точку. Первое, что необходимо понимать, что соотношение (1.1) дает не одно уравнение, а, в общем случае, три уравнения для трех компонент импульса $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$ и трех компонент результирующей силы $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$:

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = F_x,\ \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = F_y,\ \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = F_z. \tag{1.2}$$

Отметим, что любой вектор в трехмерном пространстве может быть изображен с помощью единичных векторов по трем координатам:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y + F_z \cdot \vec{e}_z = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}. \tag{1.3}$$

В этой формуле использованы различные способы изображения единичных векторов.

То, что вектор $\vec{F}$ является результирующим вектором, означает, что в общем случае он представляет сумму всех векторов сил, действующих на тело:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n. \tag{1.4}$$

Следовательно, необходимо уметь складывать вектора. Покажем это сложение на примере двух векторов ($n = 2$). Алгебраический способ очень прост – для нахождения компонент результирующего вектора необходимо просто их сложить:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x},\ \ F_y = F_{1y} + F_{2y},\ \ F_z = F_{1z} + F_{2z}. \tag{1.5}$$

Геометрический способ известен большинству школьников. Результирующий вектор двух векторов направлен по диагонали параллелограмма, построенного на суммируемых векторах.

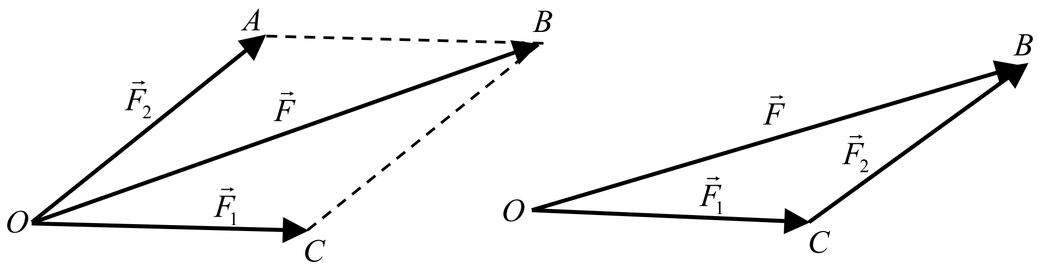

Рис. 1. Схемы сложения векторов

На рис. 1 показаны два способа построения результирующего вектора. В первом способе начала суммируемых векторов совмещаются. По ним строится параллелограмм *OABC*. Результатом суммы является диагональ *OB*. Во втором способе начало второго вектора располагается в конце первого. Соединение начала первого вектора с концом второго вектора даст результат суммирования этих векторов. Знание свойств параллелограмма позволяет легко доказать эквивалентность этих способов. Объяснять операцию вычитания векторов $\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ нет необходимости, так как она сводится к сложению вектора $\vec{F}_1$ с вектором $\tilde{\vec{F}}_2$, компоненты которого равны компонентам второго вектора, но имеют противоположный знак.

Модуль вектора равен корню квадратному суммы квадратов компонент:

$$F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ . \tag{1.6}$$

В формуле (1.6) отмечен тот факт, что при отсутствии стрелки над векторной величиной имеется в виду модуль вектора (его длина).

Для записи векторного уравнения в покомпонентной форме часто требуется определить значения компонент. Допустим, что требуется определить компоненту силы тяжести, действующую в направлении возможного перемещения тела вдоль наклонной поверхности (рис. 2). По построению угол между вектором силы тяжести и нормалью к поверхности равен α. Поэтому из соответствующего прямоугольного треугольника компонента силы вдоль поверхности $F_\tau = mg\sin(\alpha)$, а компонента силы, определяющая нормальное давление, $F_n = mg\cos(\alpha)$.

Заканчивая примеры, связанные со вторым законом Ньютона, отметим, что запись этого закона с использованием импульса более точна, чем запись этого закона в форме

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}. \tag{1.1$'$}$$

Из закона (1.1) по правилам дифференцирования произведения двух функций следует, что

$$\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}. \quad (1.7)$$

Это означает, что упрощенная форма записи второго закона справедлива лишь тогда, когда масса движущегося тела не меняется. Примеров движения тел с изменяющейся массой много. В первую очередь это касается ракеты, теряющей свою массу за счет истечения из нее газов.

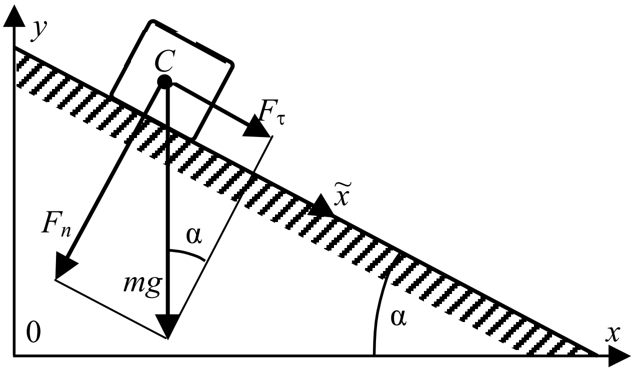

Рис. 2. Тело на наклонной плоскости

Перейдем к рассмотрению двух видов произведения векторов – *скалярного* и *векторного*. В результате скалярного произведения векторов получается скалярная величина (это и определяет название произведения). В старых учебниках скалярное произведение называлось еще *внутренним*. Поясним свойства скалярного произведения на примере вычисления элемента работы $\mathrm{d}A$:

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = F\cdot \mathrm{d}s\cdot \cos(\beta) = F_x\cdot \mathrm{d}x + F_y\cdot \mathrm{d}y + F_z\cdot \mathrm{d}z. \quad (1.8)$$

Здесь предположено, что β – угол между вектором силы $\vec{F}$ и вектором перемещения $\mathrm{d}\vec{s}$ с компонентами $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$. Из свойства скалярного произведения следует, что скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю. Величина скалярного произведения равна «площади» параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах. Слово площадь поставлено в кавычки для того, чтобы напомнить, что в физике размерность произведения определяется произведением соответствующих размерностей. Поэтому размерность работы 1 Дж = 1 Н·1 м.

Кроме формулы (1.8), для скалярного произведения справедливы формулы с применением проекции силы на вектор перемещения F_s или проекции вектора перемещения на вектор силы $\mathrm{d}s_F$:

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = F_s\cdot \mathrm{d}s = F\cdot \mathrm{d}s_F. \quad (1.9)$$

Использование дифференциала $\mathrm{d}\vec{s}$ при вычислении элемента работы не случайно. При такой записи правильно будет вычислена работа при конечном перемещении с помощью интеграла, даже если сила и вектор перемещения являются переменными. Отказаться от дифференциалов можно лишь в том случае, если сила и вектор перемещения неизменны.

Векторное произведение определяет компоненты нового вектора:

$$\vec{C} = \left[\vec{A} \times \vec{B}\right] = -\left[\vec{B} \times \vec{A}\right],\ C = A \cdot B \cdot \sin(\gamma), \tag{1.10}$$

где γ – угол между перемножаемыми векторами. Вектор $\vec{C}$ ортогонален обоим векторам ($\vec{C} \perp \vec{A},\quad \vec{C} \perp \vec{B}$), а его направление определяется по правилу правого винта (буравчика) при условии, что из конца вектора $\vec{C}$ кратчайший поворот первого вектора $\vec{A}$ ко второму вектору $\vec{B}$ виден против часовой стрелки. Компоненты вектора $\vec{C}$ определяются по формулам:

$$C_x = A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y,\quad C_y = A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z,\quad C_z = A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x. \tag{1.11}$$

Для облегчения запоминания этих формул следует учесть, что индексы первого слагаемого в правой части равенства следуют правилу циклического порядка следования компонент по x, y, z, а индексы компонентов второго слагаемого меняются местами.

Формулы (1.11) для компонент векторного произведения получаются из раскрытия определителя

$$\vec{C} = \left[\vec{A} \times \vec{B}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

Из определения векторного произведения следует, что два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю.

С помощью векторного произведения определяются, например, сила Ампера (закон Ампера), действующая на элемент проводника $\mathrm{d}\vec{l}$ с током J в магнитном поле $\vec{B}$:

$$\mathrm{d}\vec{F}_A = J\left[\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}\right],$$

величина магнитной индукции, создаваемой элементом тока $J\mathrm{d}\vec{l}$ в точке с радиусом-вектором $\vec{r}$ (закон Био – Савара – Лапласа):

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi r^3}\left[\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}\right].$$

1.2 Производная функции

Понятие производной используется в механике со времен Ньютона. Создателями дифференциального исчисления считаются Лейбниц и Ньютон. Ньютон независимо от математика Лейбница создал дифференциальное исчисление для точного описания законов механического движения. Им было введено определение вектора скорости как производной от радиуса вектора по времени и определение вектора ускорения как производной от вектора скорости:

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}},\;\; \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}\,. \tag{1.13}$$

В этих формулах отмечен тот факт, что производные по времени часто в физике обозначают точкой над функцией вместо штриха, как в математике. В формулах (1.13) используются векторы. Это означает, что в общем случае имеются в виду три соотношения для компонент скорости и три соотношения для компонент ускорения. Заметим, что в учебниках часто для обозначения векторов используют жирный шрифт и стрелочки опускают. С помощью введенных величин можно по-разному записать второй закон Ньютона для материальной точки с постоянной массой:

$$m\vec{a}=m\dot{\vec{v}}=m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}\,. \tag{1.14}$$

Еще раз напомним, что соотношение (1.14) дает в общем случае не одно, а три уравнения.

Оставим пока в стороне физику и дадим определение производной для одной функции с аргументом x так, как это делается в математическом анализе. Определение производной от функции $y=f(x)$ дается с помощью формулы

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}\right). \tag{1.15}$$

Словесное определение этой формулы звучит так: производная от функции равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента. Приращение аргумента равно Δx, а приращение функции $\Delta y=\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$. Обратим внимание на обозначение функции $y=f(x)$ с помощью y. Это делается только для того, чтобы потом при объяснении геометрического смысла отмечать значения функции на вертикальной оси, которую часто обозначают в виде y.

Заучив приведенное определение производной, студенты не всегда понимают, что это определение является алгоритмом для получения всех формул дифференцирования.

Рассмотрим пример применения формулы (1.15) для вывода формулы производной от функции $f(x)=x^2$. Согласно формуле нужно вначале вычислить приращение функции

$$\Delta y=\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2. \qquad (1.16)$$

Составляя отношение приращения функции к приращению аргумента, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=2x+\Delta x. \qquad (1.17)$$

А теперь нужно перейти к пределу этого отношения при $\Delta x\to 0.$ Очевидно, что пределом будет значение $f'(x)=2x$. Этот результат подтверждает более общую формулу для производной от степенной функции $f'(x)=(x^n)'=nx^{n-1}$.

Аналогичным образом докажем, что производная от тригонометрической функции $f(x)=\sin(x)$ равна $\cos(x)$. Приращение функции

$$\Delta f=\sin(x+\Delta x)-\sin(x)=\sin(x)\cdot\cos(\Delta x)+\sin(\Delta x)\cdot\cos(x)-\sin(x). \qquad (1.18)$$

Для вычисления предела отношения приращения функции к приращению аргумента учтем, что при малых приращениях аргумента

$$\Delta f\approx\sin(x)+\Delta x\cdot\cos(x)-\sin(x)=\Delta x\cdot\cos(x). \qquad (1.19)$$

Поделив эту величину на приращение Δx, получим известный результат – $(\sin(x))'=\cos(x)$. Переход к пределу при $\Delta x\to 0$ нужен для того, чтобы вместо примерного значения приращения функции Δf в уравнении (1.19) получить его точное значение.

Сделаем полезное замечание. Из алгоритма вычисления производных видно, что, если не переходить к пределу $\Delta x\to 0$, а использовать малые значения Δx, будем иметь приближенное значение производной. Эта идея плодотворно используется для приближенного решения дифференциальных уравнений. Кроме того, полезно понять, что лишь при вычислении производной от линейной функции $y=ax$ можно не переходить к пределу $\Delta x\to 0$, так как только в этом частном случае отношение приращения функции к приращению аргумента не зависит от величины приращения аргумента (докажите это).

Перейдем к выяснению геометрического смысла производной. Для этого изобразим на рис. 3 значения, используемые в определении производной, на плоскости x, $y = f(x)$.

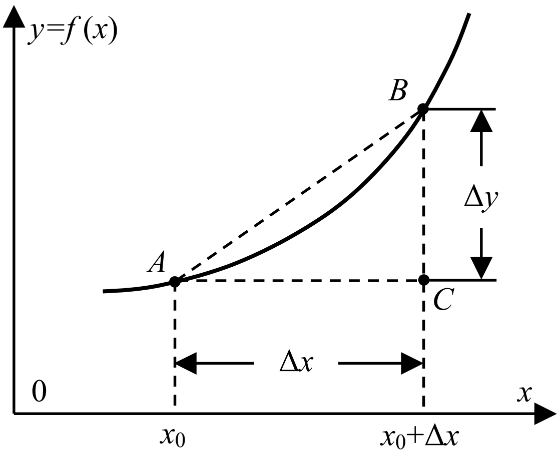

Рис. 3. Схема к понятию производной

На этом рисунке x_0 – значение аргумента, для которого вычисляется производная. Согласно построению длина катета AC равна приращению аргумента, а длина катета BC равна приращению функции. Следовательно, отношение приращения функции к приращению аргумента равно тангенсу угла BAC. При стремлении приращения аргумента к нулю секущая AB приближается к касательной в точке x_0, а значение производной приближается к тангенсу угла наклона касательной к оси аргумента. Отсюда и следует геометрический смысл производной – величина производной равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в соответствующей точке.

1.3 Интерполяция и экстраполяция функций

При интерполяции и экстраполяции предполагается, что какая-то функция задана таблично для фиксированного набора аргументов $x_i (i = 0, 1, \ldots, n)$. В физике обычно такая таблица является результатом измерений. В случае табличного задания функции возникает проблема приближенного вычисления значений функции в промежуточных точках в интервале от x_0 до x_n. Предположим, что фиксированные значения аргумента x_i упорядочены по возрастанию номера (индекса) i так, что x_0 является наименьшим значением, а x_n – наибольшим. Сформулированная проблема решается методами интерполирования.

В тех случаях, когда требуется вычислить значение функции для аргумента вне интервала $[x_0, x_n]$, задача решается методами экстраполяции. Экстраполяция может приводить к большим погрешностям. Интерполяция также дает некоторую погрешность, но доказывается, что эта погрешность мала при близких значениях соседних аргументов.

Самый простой и часто используемый способ интерполяции – это линейная интерполяция. В случае линейной интерполяции предполагается, что на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ значение функции можно вычислить из уравнения соответствующей прямой, проходящей через две точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}):

$$y(x) = f(x) = y_i + (x - x_i)\frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}. \qquad (1.20)$$

Формула (1.20) годится для любого упорядоченного набора значений аргумента. Если значения аргумента заданы с постоянным шагом h так, что $x_i = x_0 + i \cdot h$, формула (1.20) упрощается:

$$y(x) = f(x) = y_i + (x - x_i)\frac{(y_{i+1} - y_i)}{h}. \qquad (1.21)$$

Усложнением линейной интерполяции является полиномиальная интерполяция. Значение функции в этом случае может быть вычислено по интерполяционной формуле Лагранжа:

$$f(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot p_i(x),$$

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}. \qquad (1.22)$$

При рассмотрении формулы Лагранжа следует обратить внимание на то, что в числителе $p_i(x)$ пропущен множитель $(x - x_i)$, а знаменатель получается из числителя заменой x на x_i. В случае, например, трех точек ($n = 2,\ \ i = 0,\ 1,\ 2$) формула Лагранжа имеет вид

$$L_2(x) = y_0\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

В случае двух точек ($n = 1$) реализуется линейная интерполяция. Покажите это.

В анализе легко доказываются свойства полинома Лагранжа – степень полинома не выше n, а значения полинома при $x = x_i$ равны y_i ($L_n(x_i) = y_i$). Таким образом, полином проходит через все заданные точки. Возникает естественный вопрос – насколько близко рассмотренный полином близок к функции $f(x)$ в других точках, т.е. как велика разность

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x). \qquad (1.23)$$

Для ответа на этот вопрос потребуется предположить, что функция $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$ порядка включительно. При таком предположении для погрешности получается оценка

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}\left|P_{n+1}(x)\right|}{(n+1)!}, \tag{1.24}$$

в которой M_{n+1} максимум модуля $(n+1)$-й производной от функции $f(x)$, а полином $P_{n+1}(x)$ равен произведению всех сомножителей вида $(x-x_i)$:

$$P_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n).$$

В частности для линейной интерполяции справедлива оценка

$$\left|R_1(x)\right| \le \frac{\max\left|f''(x)\right|}{2}\left|(x-x_0)(x-x_1)\right| \le \frac{\max\left|f''(x)\right|}{8}(x_1-x_0)^2.$$

Из вида формул для погрешности видно, что погрешность оказывается малой при малых интервалах между заданными точками x_i. Все формулы интерполяции естественно упрощаются для значений аргументов, заданных с постоянным шагом.

Отметим, что не следует при интерполяции брать большое число точек, далеко отстоящих от точки, для которой требуется вычислить значение функции. Эта рекомендация особенно относится к экспериментальным табличным данным, полученным с существенной погрешностью.

В теории интерполяции существуют и другие формулы (например первая и вторая формулы Ньютона). Некоторые из них годятся лишь для аргументов, заданных через постоянный шаг. Напомним, что формула Лагранжа свободна от этого ограничения. Теория интерполяции позволяет решить и обратную задачу – по заданным значениям функции y найти значения аргумента, а также решить вопрос интерполяции для функции нескольких аргументов.

В заключение этого параграфа коснемся вопросов экстраполяции. Напомним, что при экстраполяции нам необходимо вычислить значение функции для аргументов, выходящих за пределы заданного интервала $\left[x_0,\, x_n\right]$. Для экстраполяции можно пользоваться теми же формулами, но при этом следует помнить, что погрешность может оказаться весьма высокой.

Эту особенность экстраполяции понимал и писатель Марк Твен. Так он высмеивал журналистов, которые из того факта, что река Миссисипи по наблюдениям за несколько лет увеличивает свою длину, вычисляют время, когда ее вовсе не было.

Дадим пример из физики. Известно, что электрическое сопротивление металлов уменьшается при уменьшении температуры. Если ограничиться измерением сопротивления до температуры около 10 К и сделать соответствующую экстраполяцию на ноль температуры, то можно ″проморгать″ очень важное явление сверхпроводимости и Нобелевской премии за открытие сверхпроводимости не получить.

1.4 Исследование функций

В курсе математики средней школы при исследовании функции рассматриваются следующие вопросы – область определения аргумента, область определения функции, свойства функции (монотонность, периодичность, непрерывность и другие), экстремумы и нули (корни) функции.

Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь вопросов нахождения корней и экстремумов функции с использованием производной функции. Эти вопросы изложены во многих учебниках по численным методам [3, 5].

Задача нахождения аргументов функции, удовлетворяющих равенству

$$f(x) = 0, \tag{1.25}$$

возникает во многих случаях. Соответствующие значения аргументов называются корнями уравнения (1.24). Сложность решения этой задачи определяется видом функции. В школьном курсе математики подробно рассматривается лишь вариант квадратного уравнения

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0. \tag{1.26}$$

В математике известна основная теорема алгебры о числе корней полинома (многочлена) степени n:

$$f(x) \equiv P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \tag{1.27}$$

Эта теорема утверждает, что число корней полинома (1.27) равно его степени с учетом кратности корней при условии, что коэффициент $a_n \neq 0$. Кроме того, в число корней включены и комплексные корни, которые в школе только упоминаются. Для квадратного уравнения (1.26), например, комплексные корни соответствуют отрицательному значению соответствующего дискриминанта. Мы не будем здесь рассматривать случай комплексных корней, хотя в теоретической физике они, безусловно, рассматриваются, и ограничимся случаем действительных корней.

Аналитическое нахождение корней не всегда возможно, поэтому часто используют приближенные методы. Предварительным этапом для приближенного нахождения корней обычно является этап *отделения корней*. При отделении корней выясняются интервалы аргумента, на которых функция имеет один корень. Из свойств непрерывной функции следует, что на интервале $[a, b]$ существует только один корень, если $f(a) \cdot f(b) < 0$ (функция имеет разные знаки на концах интервала) и функция на этом интервале монотонна. Отметим, что при наличии монотонности $f'(x_0) \neq 0$. Найти интервалы, на которых выполняются упомянутые условия, помогает во многих случаях вспомогательная задача о поиске корней уравнения для производной от функции

$$f'(x) = 0 . \qquad (1.28)$$

Иллюстрацией к сказанному является рис. 4. На рисунке отмечены четыре значения аргумента a_1, a_2, a_3, a_4, в которых производная функции равна нулю. На интервале $[a_1, a_2]$ находится один корень $x = x_1$, так как функция внутри этого интервала монотонно возрастает и знаки значений функции на краях этого интервала различны. Аналогичные выводы очевидны для двух следующих интервалов.

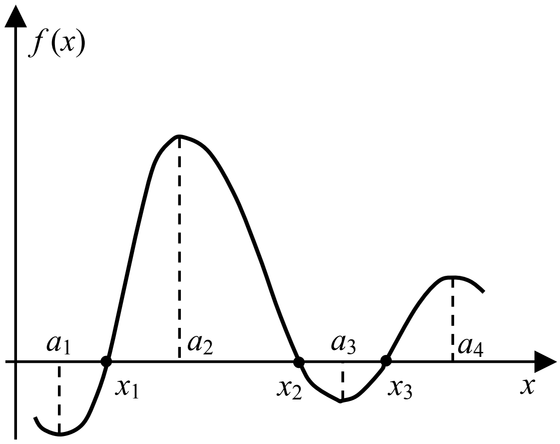

Рис. 4. Корни функции (x_1, x_2, x_3) и

После этапа отделения корней выполняется этап уточнения корней. Существует несколько методов уточнения корней – графический, метод дихотомии (деления пополам), метод Ньютона (метод касательных), метод последовательных приближений, метод хорд (метод пропорциональных частей) и их комбинации. Опишем наиболее простой из них – метод дихотомии. Метод прост по идее и оценке погрешности.

Считая, что на интервале $[a, b]$ существует один корень и $f(a) \cdot f(b) < 0$, в методе дихотомии вычисляется середина интервала $c = 0,5(a+b)$ и соответствующее значение функции $f(c)$. Если $f(c) = 0$, корень найден. Если $f(a) \cdot f(c) > 0$ (совпадают знаки соответствующих значений), левое значение интервала заменяется на c. Если $f(a) \cdot f(c) < 0$ (различны знаки соответствующих значений), правое значение интервала заменяется на c. После такой процедуры исключается из рассмотрения половина интервала, на которой нет корня. Следовательно, при такой процедуре интервал, на котором есть корень, сокращается вдвое. Описанная процедура повторяется до тех пор, пока величина интервала не станет меньше заданной величины погрешности. Очевидно, что после n повторений начальный интервал сокращается в 2^n раз (этот факт является доказательством хорошей скорости сходимости метода).

Широкое распространение персональных компьютеров позволяет использовать еще один метод. В этом методе в цикле по i вычисляются значения функции $y_i = f(a+ih)$ и отслеживается момент смены знака. При больших значениях шага h метод позволяет отделить корни, а при малых – получить приближенное значение корня. Отметим, что описанные методы не годятся для случая, когда $f(x) = f'(x) = 0$. Этот случай требует особого подхода.

Кратко коснемся вопросов поиска экстремальных значений функции на заданном интервале $[a,\, b]$. Экстремальные значения достигаются или на концах интервала, или в точках с равными нулю производными. Это обстоятельство еще раз подтверждает ценность вспомогательной задачи о поиске корней для производной функции.

В заключение этого параграфа коснемся проблемы поиска экстремума функции многих переменных $\Phi(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_k)$. Достаточно рассмотреть проблему поиска только минимума, так как проблема поиска максимума сводится к проблеме поиска минимума для функции со знаком минус. Различают *минимумы локальные* и *глобальные*. Локальный минимум достигается в части полной области переменных. Локальных минимумов может быть несколько. Минимальное значение среди всех локальных минимумов дает глобальный минимум.

Все методы нахождения минимумов предполагают, что отыскивается локальный минимум. Существует несколько методов отыскания минимумов функции многих переменных. Успех этих методов зависит существенно от сложности функции. Мы не будем вдаваться в подробности этой проблемы и опишем только один весьма популярный метод отыскания минимума с использованием важного понятия в физике – *градиента функции*.

Дальнейшее изложение будем вести, предполагая, что число независимых переменных функции равно числу координат трехмерного пространства. При этом упрощается геометрическая интерпретация метода.

Что же касается математики, то в ней число независимых переменных может быть любым и эти переменные могут быть совершенно разной природы. Заметим, что случай двух переменных позволяет дать географическую интерпретацию метода. При этом значению функции приписывается высота рельефа. И выясняется, что рельефы могут быть котлованного или овражного типа. Для рельефов котлованного типа все методы хороши, а для рельефа овражного нужны особые ухищрения.

Вектор градиента функции трех переменных вычисляется по формуле

$$\vec{G} = \mathrm{grad}\Phi(x,y,z) = \nabla\Phi(x,y,z) = \vec{i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,, \qquad (1.29)$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы вдоль соответствующих осей координат.

Формула (1.29) показывает способ вычисления всех компонент вектора, который мы обозначили как $\vec{G}$. Каков смысл параметров этого вектора – его направления и величины? Вектор градиента направлен в сторону наискорейшего возрастания функции. Величина градиента позволяет определить добавку к функции, если мы сделаем малый шаг в направлении градиента. Если мы сделаем такой же шаг в другом направлении, функция уменьшится. То есть степень возрастания функции при изменении координат в направлении градиента определяется величиной градиента. Следовательно, раз нас интересует минимум, надо с малым шагом двигаться в сторону, обратную градиенту. Эти идеи приводят к методу градиентного спуска (знак минус и приводит к смещению в сторону против градиента):

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n - \vec{h} \cdot \nabla\Phi(\vec{r}_n), \tag{1.30}$$

где $\vec{r}(x, y, z)$ – вектор трехмерного пространства, индекс n – номер приближения; $\vec{h}(h_x, h_y, h_z)$ – вектор смещения.

Формула (1.30) векторная и потому в подробной записи соответствует числу переменных. В случае трех переменных имеем три формулы:

$$x_{n+1} = x_n - h_x \frac{\partial\Phi(x_n, y_n, z_n)}{\partial x},$$

$$y_{n+1} = y_n - h_y \frac{\partial\Phi(x_n, y_n, z_n)}{\partial y}, \tag{1.31}$$

$$z_{n+1} = z_n - h_z \frac{\partial\Phi(x_n, y_n, z_n)}{\partial z}.$$

Шаги в формулах (1.31) должны быть малыми, но они могут быть равными. Описанный алгоритм должен быть дополнен контролем последовательного убывания функции. При возрастании функции должен выполняться возврат к предыдущей точке. Полученное значение может быть объявлено приближенным значением локального минимума функции. Можно также продолжить уточнение полученного значения, но уже с меньшими шагами по координатам h_x, h_y, h_z.

1.5 Формула Тейлора

Эту формулу получил в 1712 (опубликовал в 1715) году ученик Ньютона Брук Тейлор. Ньютон первым оценил практическую значимось этой формулы и широко ее использовал. Формула Тейлора позволяет получить приближенную зависимость любой аналитической функции в виде полинома вблизи выбранной «опорной» точки x_0. Иными словами, функция вблизи опорной точки заменятся полиномом. Формула имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots \tag{1.32}$$

Как видно из формулы (1.32), коэффициенты при степенях $(x - x_0)^k$ пропорциональны k-й производной от функции в опорной точке. Важно понять, что при малых отклонениях от опорной точки малое число сохраненных слагаемых в этой формуле дает неплохое приближение к функции.

Строгое определение формулы Тейлора достигается формулой

$$f(x) = P_n(x) + r(x), \tag{1.33}$$

где $r(x)$ – остаточный член; $P_n(x)$ – многочлен Тейлора,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k . \tag{1.34}$$

При $n = \infty$ многочлен Тейлора называется рядом Тейлора. Достаточным условием сходимости этого ряда к функции $f(x)$ на интервале $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ является ограниченность всех ее производных на этом интервале.

При отбрасывании остаточного члена в формуле (1.33) получаем приближенное значение функции и возникает вопрос о величине остаточного члена. Существует несколько оценок остаточного члена, полученных математиками прошлого. Приведем две из них.

Оценка в форме Пеано говорит о характере зависимости остаточного члена от разности $(x - x_0)$:

$$r_n(x) = O((x - x_0)^n). \tag{1.35}$$

Запись (1.35) утверждает, что погрешность формулы Тейлора при отбрасывании остаточного члена убывает пропорционально n-й степени разности $(x - x_0)$.

Более полные сведения о величине остаточного члена дает формула, полученная Лагранжем:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)},\ \ \xi \in [x_0,\ x]. \tag{1.36}$$

Отметим, что в этой формуле производная (n+1)-го порядка вычисляется не в опорной точке, а где-то внутри интервала $[x,\ x_0]$. Поэтому оценка сверху для модуля остаточного члена получается при замене этой производной ее максимальным значением по модулю, а при вычислении производной в опорной точке получается приближенное значение остаточного члена.

Формула Тейлора позволяет изучение ряда свойств функции свести к существенно более простой задаче изучения этих свойств у соответствующего многочлена. На этом основано разнообразие многочисленных применений Формулы Тейлора для вычисления пределов функций, исследование их экстремумов, точек перегиба, интервалов выпуклости и вогнутости, сходимости рядов и интегралов, оценка скорости сходимости или расходимости.

Частным, но весьма распространенным случаем ряда Тейлора является ряд, называемый иногда *рядом Маклорена*. Соответствующие формулы получаются из формул, приведенных выше, при предположении, что опорная точка $x_0 = 0$.

Приведем примеры разложения некоторых функций в ряд Маклорена:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{1.37}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{1.38}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{1.39}$$

В приложениях очень часто ограничиваются малым числом слагаемых в разложении функции в ряд Тейлора. Приведем в качестве примера задачу о колебаниях маятника. Дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin(\varphi) = 0, \tag{1.40}$$

где φ – угол отклонения маятника от вертикали в радианах; ω_0 – собственная циклическая частота колебаний маятника при малых отклонениях от вертикали.

Дифференциальное уравнение (1.40) является нелинейным. Оставляя в разложении $\sin(\varphi)$ лишь первое слагаемое $(\sin(\varphi) \approx \varphi)$, получаем линейное дифференциальное уравнение. Решение линеаризованного таким образом уравнения легко находится. Остается выяснить погрешность такой замены. Воспользуемся для этого формулой Лагранжа:

$$r_2(\varphi) = \frac{\sin(\xi)}{2!}\varphi^2 \approx \frac{\varphi^3}{2}. \tag{1.41}$$

Это оценка абсолютной погрешности. Для оценки относительной погрешности надо поделить это значение на угол φ. Требуя для относительной погрешности величину менее 1 %, находим, что наше решение хорошо описывает колебания при углах

$$\varphi \le \sqrt{0,02} \approx 0,1414 \approx 8,1^\circ. \tag{1.42}$$

Во многих формулах специальной теории относительности присутствует выражение

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (1.43)$$

или его обратное значение. В этом выражении v – скорость системы отсчета или скорость тела, а c – скорость света. При выполнении неравенства $\nu \ll c$ используют вместо (1.43) его приближенное значение, получаемое с помощью ряда Тейлора (Маклорена). Для получения этой формулы удобно сделать замену $\varepsilon = v^2 / c^2$ и воспользоваться формулой (1.32). В результате этих операций получается формула

$$\gamma = \sqrt{1-\varepsilon} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + \ldots \, , \qquad (1.44)$$

из которой видно, что при $\varepsilon \le 0{,}04$ третье слагаемое меньше второго более, чем на два порядка, и потому можно ограничиться лишь первой поправкой и считать, что

$$\gamma \approx 1 - \varepsilon = 1 - \frac{v^2}{2c^2} \, . \qquad (1.45)$$

1.6 Ряд Фурье

Периодическую функцию очень часто представляют в виде так называемого *ряда Фурье*. Это представление позволяет выяснить спектр периодической функции. Соответствующее представление составляет содержание *гармонического анализа*.

Теория гармонического анализа утверждает, что любая периодическая функция $f(t)$ с периодом T, для которой существует конечное значение интеграла

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| \mathrm{d}t \, , \qquad (1.46)$$

может быть представлена сходящимся рядом Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 \, t) + b_k \sin(k\omega_0 \, t)) \, , \qquad (1.47)$$

где $a_0 / 2$ – среднее значение функции; ω_0 – циклическая частота, $\omega_0 = 2\pi / T$.

Коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$a_k = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega_0\ t)\mathrm{d}t,\ \ b_k = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega_0\ t)\mathrm{d}t\,. \qquad (1.48)$$

Номер гармоники k определяет соответствующую частоту, равную k/T, и амплитуду $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$. В математическом анализе доказывается, что интегрируемая функция однозначно определяет свои коэффициенты (или свое *Фурье-преобразование*). Справедливо и обратное – преобразование Фурье однозначно определяет функцию.

Гармонический анализ позволяет не только определить спектральный состав периодической функции, но и приближенно решать различные задачи математической физики.

2 ПОГРЕШНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

Прежде чем обсуждать погрешность, связанную с неточностью экспериментальных данных, опишем математическую погрешность при вычислении функций. Назовем число a приближенным значением числа A $a \approx A$ ( ) и учтем, что в дальнейшем при вычислениях вместо точного значения будет использоваться его приближение. Если $a < A$, то a называют приближением к точному *по недостатку*; если, наоборот, $a > A$, то – *по избытку*. Ошибка или погрешность приближенного значения определяется :юьтсонзар

$$\Delta a = A - a\,. \qquad (1.49)$$

Из этого определения следует, что

$$A = a + \Delta a\,. \qquad (1.50)$$

Часто знак ошибки неизвестен, и потому целесообразно ввести абсолютную погрешность

$$\Delta \equiv |\Delta a|. \qquad (1.51)$$

Довольно часто неизвестно и само точное значение, и в этом случае нет возможности воспользоваться формулой (1.49). Тогда вводят *предельную абсолютную погрешность* $\overline{\Delta}$

$$\overline{\Delta} \geq \Delta\,. \qquad (1.52)$$

В качестве предельной абсолютной погрешности $\overline{\Delta}$ логично выбрать наименьшее значение, удовлетворяющее этому неравенству. Введенная величина позволяет утверждать, что точное значение удовлетворяет неравенствам

$$a - \overline{\Delta} \leq A \leq a + \overline{\Delta}\,. \qquad (1.53)$$

Утверждение (1.53) записывают обычно в виде

$$A = a \pm \overline{\Delta}. \tag{1.54}$$

Абсолютная погрешность не достаточна для характеристики погрешности измерения или вычисления. Для характеристики погрешности и точности величины существенна *предельная относительная погрешность*

$$\overline{\delta} = \frac{\overline{\Delta}}{|A|} \approx \frac{\overline{\Delta}}{|a|}. \tag{1.55}$$

Использование введенной относительной погрешности позволяет записать формулу (1.54) в ином виде:

$$A = a\ (1 \pm \overline{\delta}). \tag{1.56}$$

Перечислим основные источники погрешности.

1. Погрешности, связанные с постановкой математической задачи (погрешность задачи).
2. Погрешность, связанная с наличием бесконечного числа слагаемых в формулах математического анализа. Примером может служить использование разложения функции в ряд Тейлора. Соответствующая погрешность возникает заменой бесконечного числа слагаемых конечным числом. Такую погрешность называют *остаточной*.
3. Погрешность, возникающая с использованием приближенных значений параметров задачи. Приближенными значениями параметров являются, например, все физические постоянные. Условимся эту погрешность называть начальной.
4. Погрешность, связанная с системой счисления. Примером такой погрешности может служить, например, дробь $1/3 \approx 0{,}3333(3)$ в десятичной системе счисления. Ограниченное число используемых цифр дает погрешность, которую можно назвать погрешностью округления.
5. Погрешность, связанная с выполнением арифметических операций.

При решении конкретной задачи часть погрешностей отсутствует или пренебрежимо мала. Но, вообще говоря, для полного анализа погрешности следует учитывать все виды погрешности.

Укажем связь погрешности с понятиями – *значащая цифра* и *число верных знаков*, предполагая, что используется десятичная система счисления для изображения числа с n цифрами α_k:

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1}. \tag{1.57}$$

Все сохраняемые десятичные знаки в записи (1.57) называются *значащими*. Рассмотрим пример. В соответствии с этим определением в записи числа 0,006030 значащими являются все последние четыре цифры 6, 0, 3, 0. Первые три цифры значащими не являются. Разумно число значащих цифр связать с погрешностью. В использованном примере указание последнего нуля молчаливо предполагает, что погрешность менее 10^{-6}. Запись в ответах лишних значащих цифр говорит о неграмотности вычислителя. Для подчеркивания этого факта и вводят понятие *верных знаков*.

Говорят, что n первых значащих цифр приближенного числа являются верными, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины разряда, выраженного n-ой значащей цифрой. Это определение приводит к неравенству

$$\Delta = |A - a| \le \frac{1}{2}10^{m-n+1}. \tag{1.58}$$

<u>Пример 1</u>. Для A = 35,97 число a = 36,0 имеет три верные цифры, так как $\Delta = |A - a| = 0{,}03 < \frac{1}{2}10^{-1}$, $m - n + 1 = -1$, $m = 1, n = 3$.

Уже приведенный пример говорит о том, что понятие «n верных знаков» не следует понимать буквально. Дадим для иллюстрации сказанного еще один пример.

<u>Пример 2</u>. Пусть $A = 8$, а приближенное значение a = 7,996. Ни одна цифра приближенного числа не совпадает с цифрой 8 точного числа. Тем не менее приближенное число имеет три верных знака, так как $\Delta = 0{,}004 < 0{,}005 = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$.

Заметим, что иногда в неравенстве (1.57) вместо 0,5 пишут 1 и в этом случае говорят о числе верных знаков в *широком смысле* (при использовании коэффициента 0,5 – в *узком смысле*).

Существует ***теорема*** о связи погрешности с числом верных знаков. Она утверждает, что положительное число a имеет n верных знаков в узком смысле, если относительная погрешность этого числа

$$\delta < \frac{1}{\alpha_m \cdot 10^{n-1}}, \tag{1.59}$$

где α_m – первая значащая цифра числа a.

Замечания к теореме. Величину относительной погрешности в (1.59) можно принять за предельное значение относительной погрешности $\bar{\delta}$. При числе верных знаков n более 2 можно положить

$$\bar{\delta} = \frac{1}{2\alpha_m \cdot 10^{n-1}}. \tag{1.60}$$

Рассмотрим примеры применения теоремы.

Пример 3. Чему равна предельная относительная погрешность представления вместо числа π значения 3,14? В этом примере $\alpha_m = 3,\ n = 3$. Следовательно, по формуле (1.59) $\overline{\delta} = 1/(2 \cdot 3 \cdot 10^{-3+1}) = 1/600 = 1/6$ %.

Пример 4. Сколько знаков следует сохранить при извлечении $\sqrt{30}$, чтобы относительная погрешность не превышала 0,001 (0,1%)? В этом примере $\alpha_m = 5$. По формуле (1.60) 0,001 = $1/(2 \cdot 5 \cdot 10^{n-1}) = 1/10^n$, n = 3.

В заключение этого параграфа дадим общую формулу оценки погрешности при вычислении функции. Пусть вначале требуется вычислить значение функции одного аргумента $f(x)$ при знании, что аргумент имеет погрешность Δx. Величина погрешности функции равна разности:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{1.61}$$

Для оценки этой величины следует разложить функцию $f(x + \Delta x)$ в ряд Тейлора относительно опорной точки x и ограничиться первым оставшимся слагаемым. Выполнение этих действий дает приближенную формулу

$$\Delta f \approx \Delta x \cdot f'(x). \tag{1.62}$$

Формула тем точнее, чем меньше величина погрешности аргумента.

В случае функции нескольких переменных с заданными погрешностями $\Delta x_i (i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ имеем по аналогии

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{1.63}$$

Для оценки модуля погрешности берется сумма модулей

$$\left|\Delta f\right| \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right|. \tag{1.64}$$

Для оценок предельной относительной погрешности вычисления функции принимают величину

$$\overline{\delta} \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{f} \Delta x_i \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f \cdot \Delta x_i \right|. \tag{1.65}$$

Рассмотрим пример применения формулы (1.65). Пусть требуется оценить погрешность вычисления функции двух переменных при значениях $x = 4 \pm 0,2$, $y = 0,4 \pm 0,01$, если $f(x, y) = x^2 \cdot \sin(y)$. Согласно (1.65) имеем

$$\Delta x \cdot 2x \cdot \sin(y) = 1,6\sin(y) \approx 1,6 \cdot 0,4 = 0,64 ,$$

$$\Delta y \cdot x^2 \cdot \cos(y) = 0,01 \cdot 16\cos(y) = 0,16\cos(y) \approx 0,15 ,$$

$$\Delta f \approx 0,64 + 0,15 = 0,79 .$$

Заметим, что формула (1.65) позволяет определить погрешность вычисления суммы, разности, умножения и деления двух величин. Следует попрактиковаться с вычислением этих простейших операций и кроме оценок абсолютных погрешностей получить оценки относительных погрешностей.

3 ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Обычно первая лабораторная работа по физике посвящена теории погрешностей. Поэтому следует изучить соответствующий теоретический материал как в этом учебном пособии, так и в описании лабораторной работы. Здесь мы опишем принципиальную сторону вопросов о погрешности и точности представления результатов измерения.

Экспериментальные данные получаются в результате измерений. Измерения физических величин бывают *прямые* и *косвенные*. В прямых измерениях непосредственно измеряют исследуемую величину. Например, прямым измерением является измерение веса с помощью весов, измерение длины линейкой, времени секундомером, силы тока амперметром и т.д. В косвенных измерениях исследуемая величина вычисляется по какой-либо формуле, содержащей несколько величин, полученных прямым измерением.

Приведем пример косвенного измерения. Пусть требуется измерить объем цилиндра

$$V = \pi r^2 H . \qquad (1.66)$$

В эксперименте замеряются радиус r и высота цилиндра H. Измеряемые величины содержат погрешности. Поэтому величина погрешности объема должна быть вычислена с учетом погрешности прямых измерений этих величин по формулам, приведенным в предыдущем параграфе. Если и величина π используется с малым числом знаков, следует учесть и погрешность $\Delta\pi$. В итоге имеем

$$\Delta V = \Delta\pi \cdot \langle r \rangle^2 \cdot H + \Delta r \cdot 2 \cdot \langle r \rangle \cdot H + \Delta H \cdot \pi \cdot \langle r \rangle^2 . \qquad (1.67)$$

Несколько слов о типах погрешности. Наиболее часто встречаются так называемые *случайные* погрешности. Они являются следствием многих причин, которые невозможно или трудно учесть. Улучшение точности приборов и совершенствование методики эксперимента может уменьшить их величину. Однако устранить полностью случайные ошибки невозможно.

Погрешности, которые во всех измерениях сохраняют значение, называются *систематическими*. К числу таких ошибок относят, например, смещение шкалы измерительного прибора. К систематическим ошибкам относят иногда *приборную ошибку*, приравнивая ее обычно половине наименьшего деления шкалы прибора.

Иногда при измерении возникают ошибки, которые называют *промахами*. Промахи могут появиться в результате неопытности экспериментатора, описки, неисправности аппаратуры, неожиданных сильных внешних воздействий. При многократных измерениях промахи обычно резко отличаются от остальных данных. Обнаружение промахов позволяет исключить их из рассмотрения.

Ниже мы будем рассматривать только случайные ошибки. Изучением распределения случайных ошибок занимается теория вероятности. Теория вероятности утверждает, что распределение многочисленных результатов измерения величины x хорошо описывается законом Гаусса (рис. 5):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (1.68)$$

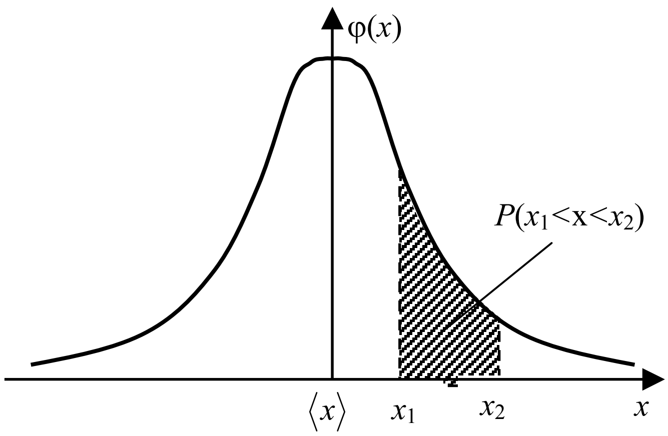

Рис. 5. Нормальный закон распределения

Распределение (1.68) называют еще *нормальным*. Функция $\varphi(x)$ называется *функцией Гаусса* (*гауссианой*), она используется для вычисления вероятности обнаружения измеряемой величины в любом выбранном интервале значений от x_1 до x_2 с помощью определенного интеграла

$$P(x_1,\, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\cdot \mathrm{d}x. \qquad (1.69)$$

Естественно, что вероятность измеряемой величины оказаться в бесконечном интервале равна единице, и потому функция распределения удовлетворяет (*нормировочному*) равенству

$$P(-\infty,\, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\cdot \mathrm{d}x = 1. \qquad (1.70)$$

Из формул (1.38)–(1.70) и рис. 5 видно, что отклонения в большую и меньшую сторону от наиболее вероятного значения равновероятны и что наибольшая вероятность (при равной величине интервала (x_1, x_2)) соответствует значениям x_1, x_2, расположенным симметрично относительно среднего значения (n – число измерений)

$$\langle x \rangle = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{1.71}$$

Чтобы избежать путаницы с обозначениями, укажем, что $x_i (i = 1, ..., n)$ в формуле (1.71) – это значения, полученные в результате измерений, а значения x_1, x_2 в интеграле (1.68) – это любые выбранные значения измеряемой величины.

Важной характеристикой распределения (1.68) является величина σ, которую называют *среднеквадратичной ошибкой* (*стандартом*). Квадрат стандарта σ^2 называют *дисперсией*. Обе величины характеризуют кучность распределения случайной величины около математического ожидания этой величины или, иными словами, около среднего значения. Чем меньше эти значения, тем уже кривая распределения. При большом числе измерений среднеквадратичная ошибка вычисляется по формуле

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2}}{n} \,. \tag{1.72}$$

Чтобы лучше понять роль σ, укажем, что согласно (1.68), (1.69) вероятность нахождения измеряемой величины в интервале от $(\langle x \rangle - \sigma)$ до $(\langle x \rangle + \sigma)$ составляет ≈ 67 %, а при расширении интервала возможных значений x вдвое достигает ≈ 95 %.

Важно понять, что теория позволяет оценить вероятность отклонения результатов измерения от среднего значения. Результат измерения записывается в виде

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x = \langle x \rangle (1 \pm \delta) \tag{1.73}$$

с указанием вероятности этого утверждения. Например, результаты измерения длины могут быть записаны в виде

$$l = (23{,}6 \pm 0{,}31)\ \text{см} \approx 23{,}6(1 \pm 0{,}013)\ \text{см}$$

с указанием надежности (вероятности). В лабораторных работах по физике часто используют значение надежности, равное 95 %.

Приведенные формулы предполагают, что число измерений достаточно велико. При числе измерений $n < 10$ (для учебных лабораторных работ это типичная ситуация) применяются формулы, подкорректированные Стьюдентом. Стьюдент (Student) − это псевдоним математика W.S. Gosset, который в 1908 году опубликовал свои исследования в журнале «Биометрика». Опишем соответствующие изменения формул. Среднее значение измеряемой величины вычисляется без изменения, а среднеквадратичное отклонение, называемое иногда стандартным, вычисляется по формуле

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}}. \qquad (1.74)$$

Подправленное значение увеличено по сравнению с обычным значением по формуле (1.72); при $n = 5$ $\tilde{\sigma} \approx 1{,}225\sigma$, а при $n = 10$ $\tilde{\sigma} \approx 1{,}106\sigma$.

Границы доверительного интервала вычисляются умножением $\tilde{\sigma}$ на так называемый *коэффициент Стьюдента*

$$\Delta x = \mathrm{St}(n, p) \cdot \tilde{\sigma}. \qquad (1.75)$$

Коэффициент Стьюдента зависит от числа измерений и от выбранной надежности. В лабораториях по физике обычно есть таблица значений этого коэффициента. Следует помнить, что величина этого коэффициента уменьшается с ростом n и увеличивается с ростом надежности.

Приведем пример использования формул Стьюдента.

Пример 5. Пусть $n = 5$, выбранная надежность $p = 0{,}95$, измеренные значения равны 9; 9,5; 10; 10,5; 11. Среднее значение $\langle x \rangle$ оказывается равным 10. По справочной таблице находим коэффициент Стьюдента $\mathrm{St}(6;\ 0{,}95) = 2{,}8$, а с учетом формул (1.74), (1.75) вычисляем

$$\Delta x = 2{,}8\sqrt{\frac{2{,}5}{4 \cdot 5}} \approx 0{,}99. \qquad (1.76)$$

Следовательно, с вероятностью 95 % измеряемая величина должна быть записана в виде

$$x = 10 \pm 0{,}99 \approx 10(1 \pm 0{,}1).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Высшая математика, а точнее, дифференциальное и интегральное исчисление, дает возможность решить большой класс задач, не поддающихся решению методами арифметики, алгебры и геометрии. Огромное значение имеет сама формулировка новых понятий, таких, как мгновенная скорость, ускорение, импульс силы, которые можно точно сформулировать только на языке производных и интегралов.

В данном пособии рассмотрена только малая часть тех разделов математики, которые применяются в физике.

Например, при движении одной частицы в механике или в задачах об изменении со временем одной или двух величин (координаты и скорость тела), мы имеем дело с функциями одной переменной – времени. А если рассматривать задачи о движении двух, трех и более тел, то для их описания и решения нужны новые методы, так происходит переход к функциям нескольких переменных, где используется исследование уравнений в частных производных.

Говоря о математической теории, нужно выделить не только постановку задачи и исходное уравнение, но и нужно обсуждать характер полученных результатов. Поэтому математику можно рассматривать как разновидность уточнений, усовершенствованной логики. Причем, построив правила этой логики и выучив их, человек получает орудие более сильное, чем «здравый смысл».

Человек руками создает простые орудия, с помощью которых строит еще более совершенные и сложные механизмы, и помощью этих мехинизмов он способен сделать то, что недоступно голым рукам. Вот так же и математика, развивая все более сложные теории и создавая новые понятия, дает возможность понять и овладеть самыми необычными явлениями природы.

Пусть математика для всех нас навсегда останется точным и прекрасным языком, способом выражения мыслей и способом мышления; пусть математика не будет предметом, который нужно весь «сдать и ничего себе не оставить».

Любите математику - и любовь будет взаимной, математика поможет Вам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зельдович, Я.Б. Высшая математика для начинающих / Я.Б. Зельдович. – М.: Наука, 1970. – 560 с.
2. Зельдович, Я.Б. Высшая математика для начинающих физиков и техников / Я.Б. Зельдович, И.М. Яглом. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
3. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Физматлит, 1963. – 660 с.
4. Тарунин, Е.Л. Конечно-разностные методы решения уравнений в частных производных: учеб. пособие по курсу «Численные методы» / Е.Л. Тарунин. – Пермь: Изд-во ПГУ, 2004. – 98 с.
5. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
6. Кошляков, Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 711 с.
7. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
8. Мандельштам, Л.И. Лекции по колебаниям / Л.И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972. – 470 с.

Для заметок

Учебное издание

Арабчикова Юлия Ивановна

Асаева Татьяна Александровна

ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Подписано в печать _________. Тираж 20 экз.

Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53