Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Рязанский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

Ю.И. Арабчикова, Т.А. Асаева

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Рязань
2023

УДК 51-7
ББК 22.3
А-79

Арабчикова, Ю.И.

А-79 Предел и непрерывность функции. Часть 1 / Ю.И. Арабчикова, Т.А. Асаева. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2023. – 28 с.

Данное пособие предназначено студентам младших курсов технических специальностей. В нем детально изложены различные приемы вычисления пределов, подробно разобраны многочисленные примеры, даны задачи для самостоятельного решения.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

УДК 51-7
ББК 22.3

Содержание

Введение

Изучение математики совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует её, приучает человека логически рассуждать, воспитывает у него точность и обстоятельность аргументации. Основной теорией математики является теория пределов.

Операция предельного перехода является одной из основных операций математического анализа и используется как инструмент для исследования переменной величины. Более того, все основные операции математического анализа – непрерывность, дифференцирование, интегрирование, нахождение суммы ряда и др. основаны на понятии предела переменной величины.

Математический анализ в настоящее время является незаменимым инструментом исследования в самых различных областях науки и техники. Знание дифференциального и интегрального исчисления сейчас необходимы каждому инженеру и научному работнику. Но для того, чтобы изучить математический анализ и научиться правильно его применять, необходимо изучить теорию пределов.

1 Понятие функции

При изучении и исследовании разнообразных явлений природы, решении технических задач приходится рассматривать не столько переменные величины, взятые отдельно, сколько связь между ними, зависимость одной величины от другой. В природе не существует переменных величин, которые изменялись бы изолированно, без связи с другими физическими величинами. Например, пройденный путь можно рассматривать как величину, которая изменяется в зависимости от изменения времени, т.е. пройденный путь является функцией времени. Расстояние, на которое летит пушечный снаряд, и точность попадания зависят от массы снаряда, угла возвышения дула пушки, начальной скорости снаряда, направления и силы ветра и многих других факторов. Абстрагируясь от этих конкретных примеров зависимостей между конкретными величинами, в математике ввели понятие функциональной зависимости или функции.

Определение. Пусть даны два непустых множества *X* и *Y*, элементами которых могут быть любые объекты. Если каждому элементу *x* множества *X* по некоторому закону поставлен в соответствие один и только один элемент множества *Y*, то говорят, что на множестве *X* задана функция (или отображение) со множеством значений *Y*. Обозначения функции: $y = f(x)$, $X \xrightarrow{f} Y$.

Определение. Множество *X* называют областью определения функции, а множество *Y*- множеством значений функции.

Переменную величину *x* называют независимой переменной или аргументом.

Равенство $y = f(x)$ означает, что, применив к значению аргумента *x* закон f, найдем соответствующее этому значению *x* значение функции *y*.

Для обозначения функций используют так же другие буквы латинского и греческого алфавитов, например, $y = y(x)$, $y = g(x)$, $y = \phi(x)$. Значение функции $y = f(x)$ при $x = a$ называют частным значением функции и обозначают $f(a)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости XOY с координатами $(x,\ f(x))$, где $x \in X$, или $(x,\ y)$.

График функции может представлять собой некоторую «сплошную» линию (прямую или кривую) и может состоять из отдельных точек (рисунок 1).

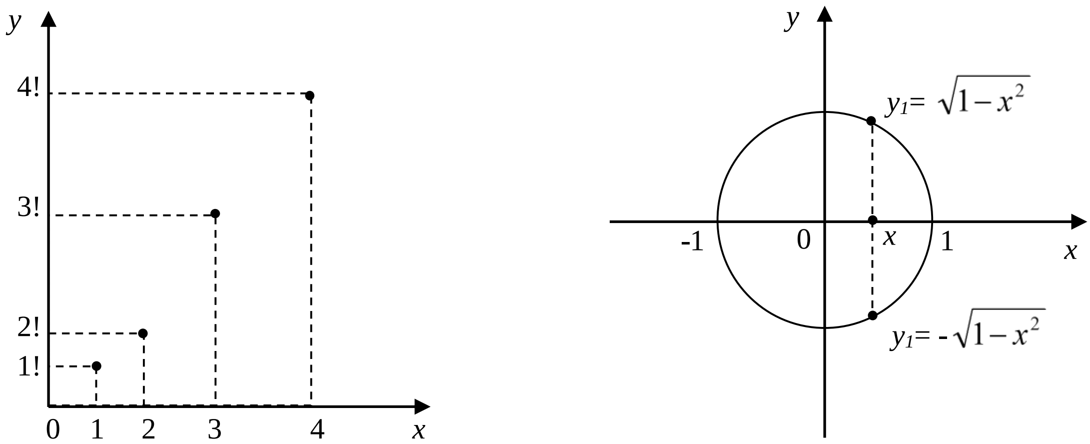

Рисунок 1 – Графики функций

Функция, все значения которой равны между собой, называется постоянной и обозначается буквой C ($f(x) = C$).

Определение. Функция *f*, определенная на множестве *X*, называется ограниченной сверху (снизу) на этом множестве, если существует число $M(m)$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le M$ ($f(x) \ge m$).

Определение. Функция, ограниченная сверху и снизу на множестве X, называется ограниченной на этом множестве. Условие ограниченности функции $f(x)$ можно записать в следующем виде: существует число $M > 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. В противном случае функция называется неограниченной.

Пример. Функция $f(x) = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, так как для произвольного *x* выполняется условие $|\sin x| \le 1$ при любом *x*.

Пример. Функция $f(x) = a^x$ ограничена снизу, так как для любого *x* выполняется неравенство $0 < a^x$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве *X*, а *Y*- множество её значений и пусть она ограничена сверху либо снизу на множестве *X*. Тогда число *M(m)* и всякое большее (меньшее), число называется верхней (нижней) гранью множества значений функции *Y*, а наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих множество *Y*, сверху (снизу), - точной верхней (нижней) гранью функции на множестве *X*, которая обозначается $\sup\limits_X f(x)\ (\inf\limits_X f(x))$.

Если множество *Y* не ограничено сверху (снизу), то пишут $\sup\limits_X f(x) = +\infty\ (\inf\limits_X f(x) = -\infty)$.

Пример. Функция $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ в промежутке $X = [0;+\infty)$ имеет точную нижнюю грань $m = 0$ и точную верхнюю грань $M = 1$. Действительно, функция ограничена на данном промежутке, так как для любого $x \in [0;+\infty)$ выполняются неравенства $0 \le \dfrac{x}{1+x} < 1\ (m = 0, M = 1)$. Значит, $m\, и\, M$ являются соответственно нижней и верхней гранями множества значений функции $Y = [0;1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область определения функций:

а) $y = \sqrt{2 - \log_2 (x-2)^2}$; б) $y = \sqrt{\sin\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{x}}$; в) $y = \sqrt{8 - (0,5)^x}$.

2. Найти наибольшее целое значение *x* из области определения функции $y = \sqrt{\left(x^2 - 5x + 6\right)^2} + \sqrt[4]{1-x}$.

3. Найти область значений функций:

а) $y = (0,2)^{-x^2+4x-6}$; б) $y = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$; в) $y = \log_2\left(|x| + 4\right) + 1$.

4. Доказать, что функция $y = \dfrac{x^2}{1+x^4}$ ограничена на всей числовой оси.

5. Является ли функция $y = \lg\sin x$ ограниченной на области определения?

2 Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, за исключением быть может самой точки x_0.

Определение 5. Число *A* называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (при $x \to x_0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Определение предела можно записать кратко, используя кванторы $\forall$ (любой, произвольный) и $\exists$ (найдется):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in \overset{0}{O}(a, \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right),$$

где $\overset{0}{O}(a, \delta)$ - проколотая окрестность точки *a*, т.е. $x \neq a$.

Геометрически: поскольку из $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, то это означает, что для всех точек *x*, удаленных от точки x_0 не далее чем на δ, точки графика $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рисунок 2).

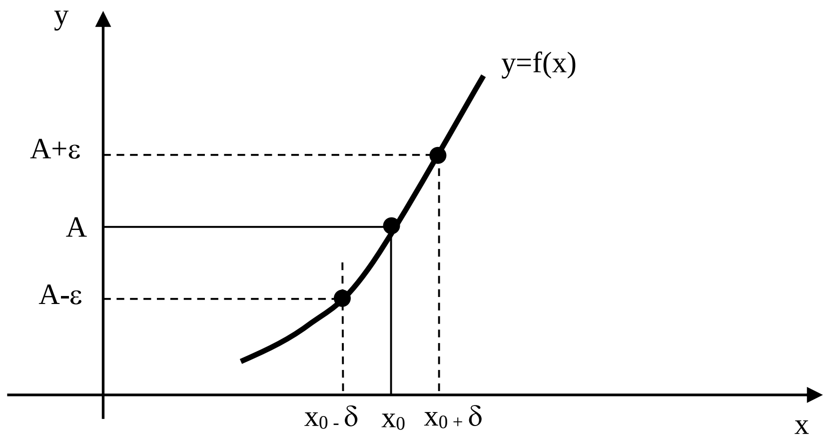

Рисунок 2 – Геометрическое определение предела

Пример. Используя определение предела, доказать, что функция $f(x)=3x-2$ в точке $x=1$ имеет предел, равный 1, т.е. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Задача состоит в том, чтобы по этому ε найти такое $\delta>0$, при котором из неравенства $|x-1|<\delta$ следовало бы неравенство $|f(x)-1|=|(3x-2)-1|<\varepsilon$. Преобразуя последнее неравенство, получаем $|3(x-1)|<\varepsilon$, или $|x-1|<\varepsilon/3$.

Отсюда видно, что если взять $\delta\le 1/3$, то для всех *x*, удовлетворяющих неравенству $|x-1|<\delta$, выполняется требуемое неравенство $|f(x)-1|<\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$. В частности, если $\varepsilon=1$, то $\delta\le 1/3$, если $\varepsilon=1/2$, то $\delta\le 1/6$ и т.д.; т.е. в общем случае, δ зависит от ε. Поэтому в определении предела иногда пишут $\delta=\delta(\varepsilon)$.

Пример. Пользуясь определением предела функции, показать, что $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4}=3$.

Решение. Надо доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из $|x-5|<\delta$ следует $|f(x)-3|<\varepsilon$.

Рассмотрим выражение $\left|\sqrt{x+4}-3\right|=\dfrac{|x-5|}{\left|\sqrt{x+4}+3\right|}$. Так как $\left|\sqrt{x+4}+3\right|\ge 3$ при всех *x* из области определения функции $[-4;+\infty)$, то $\left|\sqrt{x+4}-3\right|\le\dfrac{|x-5|}{3}$. Поэтому для всех *x*, для которых $|x-5|<3\varepsilon$, справедливо неравенство $\left|\sqrt{x+4}-3\right|<\varepsilon$. Положим $\delta=3\varepsilon$. Тогда будем иметь $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4}=3$.

Число *A* называется пределом функции $f(x)$, если для любой последовательности значений *x* $(x_1, x_2\, x_3, ..., x_n, ...)$, принадлежащей области определения функции и имеющей пределом число x_0, последовательность соответствующих значений функции $f(x_1),\ f(x_2), ...,\ f(x_n)$, имеет предел *A*.

Критерий Коши. Для того чтобы функция $f(x)$ имела конечный предел при $x=a$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых x_1 и x_2 из области определения функции и при $|x_1-x_0|<\delta, |x_2-x_0|<\delta$ выполнялось условие $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Определение. Число b_1 называется правым (правосторонним) пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех *x*, для которых выполняется неравенство $x_0<x\le x_0+\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-b_1|<\varepsilon$.

Правый предел функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или $f(x_0+0)$.

Определение. Число b_2 называется левым пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех *x*, для которых выполняется неравенство $x_0-\delta\le x<x_0$, выполняется $|f(x)-b_2|<\varepsilon$.

Левый предел функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $f(x_0-0)$.

Для того чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, необходимо и достаточно, чтобы левый и правый пределы $f(a+0)$ и $f(a-0)$ существовали и равнялись A.

Пример. Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2, \ \text{\textit{при}}\ x\le 0, \\ x+1, \ \text{\textit{при}}\ x>0. \end{cases}$ в точке $x=0$ не имеет предела (рисунок 3).

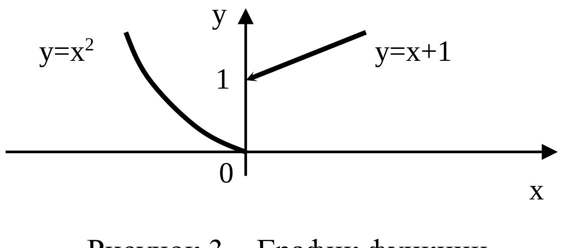

Рисунок 3 – График функции

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. При $x \le 0$ функция задается формулой $f(x) = x^2$. Тогда левый предел данной функции в точке $x = 0$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{x \to 0-} y = \lim\limits_{x \to 0-} x^2 = 0$.

Аналогично доказывается, что правый предел данной функции в точке $x = 0$ равен 1, т.е. $\lim\limits_{x \to 0+} y = \lim\limits_{x \to 0+} (x+1) = 1$. Следовательно, в точке $x = 0$ данная функция имеет правый и левый пределы, но они не равны. Это и означает, что функция $f(x)$ в этой точке не имеет предела, т.е. $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует.

Определение. Функция $f(x)$ имеет бесконечный предел при $x \to a$, если, какое бы большое ни было положительное число *M*, существует такое число $\delta > 0$, что для всех значений *x*, для которых выполняется неравенство $0 < |x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (или $-\infty$, или ∞).

Определение. Функция $f(x)$ имеет пределом число b при $x \to \infty$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $|x| > N$, где N - сколь угодно большое положительное число, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$.

Решение. Равенство $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$ такое, что из неравенства $|x| > N$ следует неравенство $\left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{|2x+1|} < \varepsilon$ или $|2x+1| > \frac{1}{\varepsilon}$. Найдем значения *x*, для которых выполняется последнее неравенство. Так как $|2x+1| > |2x| - 1$, то достаточно решить неравенство $|2x| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, откуда получаем $|x| > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Если взять

$N = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, будет выполняться неравенство $\left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. А это и означает, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь определением предела функции в точке, показать, что:
а) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-5) = 3$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{2}{7}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x-1}{3x+4} = \frac{2}{3}$.

2. Используя определение предела, доказать, что функция $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ имеет предел равный 0.

3. Найти в указанных точках односторонние пределы следующих функций:

а) $f(x) = \frac{1-x^2}{|x-1|}$ при $x \to 1$; б) $f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ при $x \to 0$;

в) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$; г) $f(x) = \begin{cases} e^x, \ x < 0 \\ 1 - x^2, \ 0 < x \le 2 \\ 0, \ x > 2 \end{cases}$ при $x \to 0$, $x \to 1$, $x \to 2$.

3 Теоремы о пределах

1. Предел постоянной величины C при $x \to a$ равен этой величине:

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций, имеющих конечные пределы, равен алгебраической сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm \ldots \pm \lim_{x\to a} f_n(x).$$

3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, если существуют конечные пределы сомножителей:

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{x\to a} f_n(x).$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел делителя отличен от нуля и пределы делимого и делителя существуют:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\phi(x)} \quad \left(\lim_{x\to a}\phi(x)\neq 0, \quad \phi(x)\neq 0\right).$$

5. Если функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $\phi(x)\leq f(x)\leq \psi(x)$ и если $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

6. Монотонная функция непрерывного аргумента имеет предел (конечный или бесконечный) при любом значении аргумента x; монотонная ограниченная функция имеет конечный предел при любом значении аргумента x.

7. Постоянный множитель можно вынести за знак предела, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\left[C\cdot f(x)\right]=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где C - постоянный множитель.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+x+1)$.

Решение. На основании свойств 1,2,7 имеем

$$\lim_{x\to 1}(3x^2+x+1)=\lim_{x\to 1}3x^2+\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1=3\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}x+1=3\cdot 1\cdot 1+1+1=5,$$

т.к. $\lim\limits_{x\to 1}x=1$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+1}$.

Решение. Предел числителя:

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x+2)=\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}x+2=1\cdot 1+1+2=4,$$

а предел знаменателя:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-x+1)=\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}x+1=1\cdot 1-1+1=1.$$

Так как предел знаменателя не равен нулю, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x^2-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x+1)}=\frac{4}{1}=4.$$

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$.

Решение. Для любого $x\neq 0$ выполняются неравенства $1<\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}<1+\dfrac{1}{x^2}$. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$. Тогда получим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой функцией (или просто бесконечно малой) в точке $x=x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Бесконечно малые функции играют существенную роль: общее понятие предела может быть сведено к понятию бесконечно малой.

Теорема. Для выполнения равенства $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x)=f(x)-A$ была бесконечно малой при $x\to x_0$.

Из этой теоремы получаем специальное представление для функции, имеющей в точке $x\to x_0$ предел, равный *A*:

$$f(x)=A+\alpha(x), \text{ где } \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

При этом говорят, что функция $f(x)$ при $x\to x_0$ отличается от *A* на бесконечно малую функцию при $x\to x_0$.

Свойства бесконечно малых функций

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией при $x\to x_0$.

2. Произведение любого числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией при $x\to x_0$.

3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную является бесконечно малой функцией при $x\to x_0$.

Все сказанное о бесконечно малых функциях при $x\to x_0$ справедливо и для бесконечно малых функций при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0+0$, $x\to x_0-0$.

Пример. Доказать, что функция $f(x)=(x-1)\cdot\sin\dfrac{1}{x-1}$ является бесконечно малой при $x\to1$, т.е. $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cdot\sin\dfrac{1}{x-1}=0$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$, то, функция $y=\left(x-1\right)$ является бесконечно малой при $x\to1$, а так как функция $\sin\dfrac{1}{x-1}\left(x\neq1\right)$ ограничена $\left(\left|\sin\dfrac{1}{x-1}\right|\leq1\right)$, то данная функция $f(x)$ представляет собой произведение бесконечно малой функции на ограниченную. Тогда функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x\to1$, т. е. $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cdot\sin\dfrac{1}{x-1}=0$.

Две бесконечно малые функции сравнивают друг с другом при помощи исследования их отношения.

Рассмотрим две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$, то говорят, что β быстрее стремится к нулю, чем α, или что β имеет высший (более высокий) порядок малости, чем α, а α имеет низший (более низкий) порядок малости, чем β.

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=A\neq0$ (A - число), то говорят, что β и α имеют одинаковый порядок малости (или бесконечно малые одного порядка малости).

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, то говорят, что α и β являются эквивалентными бесконечно малыми функциями. Эквивалентность обозначается так: $\alpha\sim\beta$ при $x\to a$.

Свойства эквивалентных функций

1. Если $\alpha\sim\beta$, то $\beta\sim\alpha$.
2. Если $\alpha\sim\beta$ и $\beta\sim\gamma$, то $\alpha\sim\gamma$.

3. Если $\alpha \sim \beta$, то $\alpha = \beta + \gamma$, где γ- бесконечно малая функция, т.е. эквивалентные бесконечно малые различаются на бесконечно малую высшего порядка малости.

4. Если $\alpha = \beta + \gamma$, то $\alpha \sim \beta$, т.е., прибавляя к бесконечно малой величине величину высшего порядка, получаем величину, эквивалентную первой.

5. Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{a \cdot \alpha}{b \cdot \beta} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{a \cdot \alpha_1}{b \cdot \beta_1}$, где a и b - любые величины; другими словами, при нахождении предела можно бесконечно малые множители, стоящие в числителе и знаменателе, заменять эквивалентными величинами.

В процессе вычислений приходится часто пользоваться следующими эквивалентными функциями при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad tgx \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1 \pm x) \sim \pm x, \quad (1 \pm x)^m \sim 1 \pm mx,$$

$$\frac{1}{1 \pm x} \sim 1 \mp x, \quad \sqrt{1 \pm x} \sim 1 \pm \frac{1}{2}x, \quad \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \sim 1 \mp \frac{1}{2}x, \quad \sqrt[3]{1 \pm x} \sim 1 \pm \frac{1}{3}x, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1 \pm x}} \sim 1 \mp \frac{1}{3}x,$$

$$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a, \quad \sin kx \sim kx.$$

Пример. Функции $\sin 3x$ и $\sin x$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$, поэтому их можно заменить на эквивалентные: $\sin 3x \sim 3x, \quad \sin x \sim x$.

Тогда $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{x} = 3$.

Так как предел отношения бесконечно малых функций равен 3, то функции являются бесконечно малыми одного порядка малости.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 3}\left(x^3 + x - 5\right)$; б) $\lim\limits_{x \to 1}\left((7x+2)(4x-3)(5x+1)\right)$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + 3\cos x}{x+1}$;

г) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$; д) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3}{2x-6}$; е) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2+\sqrt{x-3}}{x^2-40}$; ж) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

2. Показать, что функции

а) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^2+1}$; $\left[\begin{array}{l}1)\,x\to 0,\\ 2)\,x\to 1;\end{array}\right.$ б) $f(x)=(x-1)^2\cos^{99}\dfrac{1}{x-1}$; $\left[\begin{array}{l}1)\,x\to 1,\\ 2)\,x\to 0;\end{array}\right.$

являются бесконечно малыми при условии 1) и не являются таковыми при условии 2).

3. Сравнить между собой бесконечно малые при $x\to 0$ функции: $x^3,\ x^2,\ x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x}\ \ (x\ge 0)$.

4. Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых функций, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,\dfrac{x}{2}}{\arcsin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{5x}{3}}-1}{\ln(1+7x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt[3]{1-x^4}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^{3-x}-1}{arctg^3(6-2x)}$.

4 Вычисление пределов

При вычислении пределов функций часто встречаются случаи, когда применить непосредственно свойства пределов нельзя. Эти случаи называют неопределенностями.

Они бывают нескольких видов: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^∞, ∞^0, $0\cdot\infty$ и т.д. В этих случаях ничего конкретного о пределе сказать нельзя. Раскрыть эти неопределенности – значит, вычислить предел, если он существует, или установить, что он не существует. Рассмотрим, как это делается в некоторых случаях.

4.1 Неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Если при вычислении предела функции в точке x_0 (или при $x\to\infty$) получается отношение двух бесконечно больших функций, то говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2+5}{5x^3+x-8}$.

Решение. В данном случае свойство предела частного непосредственно применить нельзя, так как ни делимое, ни делитель не имеют конечного предела при $x\to\infty$. Преобразуем дробь, разделив её числитель и знаменатель на x в старшей степени, т.е. на x^3. Величина дроби при этом не изменится.

Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2+5}{5x^3+x-8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}{5+\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(5+\frac{1}{x}-\frac{8}{x^3})}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^3}}=$$

$$=\frac{4+0+0}{5+0-0}=\frac{4}{5}.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, имеется отношение двух бесконечно больших функций, т.е. неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель на старшую степень *x*, при делении корней *x* подводим под знак корня. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^2+5}{x^2}}+\sqrt[3]{\dfrac{8x^3+1}{x^3}}}{\sqrt[5]{\dfrac{x^5+1}{x^5}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{x^5}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x^3}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{x^5}}}=\frac{1+2}{1}=3$$

Таким образом, для отыскания предела отношения двух многочленов при $x\to\infty$ оба члена отношения целесообразно разделить на x^α, где α - наивысший показатель степени этих многочленов. Аналогичный прием можно применить и для дробей, содержащих иррациональность (неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$).

4.2 Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Если при вычислении предела функции в точке x_0 получилось отношение двух бесконечно малых функций, то говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

Решение. Т.к. $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-5x+6\right)=3^2-5\cdot 3+6=0$ *и* $\lim\limits_{x\to 3}\left(x-3\right)=3-3=0$, то имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь на общий множитель $(x-3)$. Сокращение можно производить, т.к. в определении предела имеет место неравенство $0<|x-x_0|<\delta$, т.е. $x\neq x_0$. В нашем случае $(x-3)\neq 0$. Получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+4x-1}{3x^2-x-2}$.

Решение. Пусть $x^3-4x^2+4x-1=P(x)$, а $3x^2-x-2=Q(x)$. Тогда $P(1)=0$, $Q(1)=0$, т.е. имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. По теореме Безу оба этих многочлена можно без остатка разделить на $(x-1)$.

Разделим $P(x)$ на $(x-1)$:

$$
\begin{array}{l|l}
\;\; x^3-4x^2+4x-1 & \\
-\underline{x^3-x^2\qquad\qquad} & \underline{\;x-1\;\;\;\;\;\;\;} \\
\qquad -3x^2+4x-1 & x^2-3x+1 \\
\quad -\underline{-3x^2+3x\qquad} & \\
\qquad\qquad x-1 & \\
\qquad\quad -\underline{x-1} & \\
\qquad\qquad\;\; 0 &
\end{array}
$$

Разделив $Q(x)$ на $(x-1)$, получим $(3x+2)$. Тогда дробь преобразуется к виду

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-4x^2+4x-1}{3x^2-x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot(x^2-3x+1)}{(x-1)\cdot(3x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+1}{3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(3x+2)}=$$

$$=\frac{1^2-3\cdot1+1}{3\cdot1+2}=-\frac{1}{5}.$$

Таким образом, для нахождения предела вида $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ *и* $Q(x)$ - многочлены, причем $P(x_0)=Q(x_0)=0$, нужно разложить многочлены на множители и сократить дробь на $(x-x_0)$ один или несколько раз. При разложении многочлена на множители можно воспользоваться теоремой Безу, которая говорит о том, если многочлен обращается в нуль при $x=x_0$, то он делится на $(x-x_0)$ без остатка. Поэтому можно сократить дробь делением числителя и знаменателя на $(x-x_0)$ необходимое число раз.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Решение. Т.к. $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to0}x=0$, то имеется неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для вычисления этого предела освободимся от иррациональности в числителе, для чего умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, т.е. на $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$. В результате чего получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{2}=1.$$

Таким образом, для нахождения предела от выражения, содержащего иррациональность (в случае неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$), необходимо перевести иррациональность из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель.

4.3 Неопределенность вида $(\infty-\infty)$

Эта неопределенность раскрывается путем сведения различными преобразованиями к неопределенностям вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot x$.

Решение.

а) Пусть $x\to+\infty$. Свойство о пределе суммы непосредственно применить нельзя, так как выражение в скобках есть разность двух бесконечно больших функций, о которой без специального исследования ничего конкретного сказать нельзя. Умножим и разделим функцию на выражение, сопряженное с $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, т.е. на $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

Тогда получим:

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\lim\limits_{x\to+\infty}1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},\quad \grave{o}\,.\hat{e}.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

б) Пусть $x\to-\infty$. В этом случае выражение, стоящее в скобках, имеет положительное значение и неограниченно возрастает по абсолютной величине.

Множитель x, стоящий перед скобкой, также неограниченно возрастает по абсолютной величине, но сохраняет отрицательное значение. А поэтому все выражение $x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ при $x\to-\infty$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, сохраняя отрицательное значение, и $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\infty$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

Решение. Под знаком предела имеется разность двух бесконечно больших функций, т.е. неопределенность вида ($\infty-\infty$). Для вычисления неопределенности приведем дроби к общему знаменателю, разложим числитель на множители и, сократив дробь, вычислим предел:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+2x+4\right)-12}{\left(x^3-8\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{(x-2)\cdot\left(x^2+2x+4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot\left(x^2+2x+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{2+4}{2^2+2\cdot 2+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^2+1\right)(x-3)^2}{\left(3x^3+1\right)(2x+1)}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-4x^2-x-20}{3x^4-9x^3-12x^2-9x+5}$; ж) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^2}\right)$;

з) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2-\sqrt{x-4}}{x^2-16x-16}$; и) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$; л) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n^2-1}}{7n+\sqrt[4]{16n^4+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^5+5n^3+9}{6n^5+6n^2+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)\cdot n!}{(n+1)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)(4n+5)(7n-4)^2}{(3n-1)\left(2n^2-3\right)(1-5n)}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{\sqrt{3n+6}}-\sqrt{3n}\right)$; ж) $\lim\limits_{n\to\infty}(7n-\sqrt{49n^2-2})$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$; и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt{n^2+2}-n}$; к) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n-1}}{3\cdot 5^{n-2}+3^{n+4}}$.

5 Замечательные пределы

При вычислении пределов трансцендентных функций часто используются некоторые важные пределы, называемые замечательными.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

где x - угол в радианах.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e, \qquad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e,$$

где $e\approx 2{,}71828\ldots$

С помощью первого замечательного предела и сравнения бесконечно малых функций рассмотрим раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $(0\cdot\infty)$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tqx-\sin x}{x^3}$.

Решение. При раскрытии неопределенности следует использовать первый замечательный предел и формулу тригонометрии: $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cdot\cos x}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4}=\frac{2}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

Решение. Используем при решении первый замечательный предел и замену эквивалентных функций.

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}(1+x)\cdot\lim_{x\to1}\frac{(1-x)}{\sin\pi x}=\left|\begin{array}{l}1-x=y,\\ x=1-y,\\ x\to1\Rightarrow y\to0\end{array}\right|=2\cdot\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin\pi\cdot(1-y)}=$$

$$=2\cdot\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin(\pi-\pi y)}=2\cdot\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin\pi y}=2\cdot\lim_{y\to0}\frac{y}{\pi y}=\frac{2}{\pi},\ \text{т.к. } \sin\pi y\sim\pi y \text{ при } y\to0.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\cdot tq\dfrac{\pi x}{2}$.

Решение. Подставив вместо x под знак предела 1, получаем неопределенность вида $(0\cdot\infty)$. Для её раскрытия нужно свести неопределенность к виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, заменив $tq\dfrac{\pi x}{2}$ на $\dfrac{1}{ctq\dfrac{\pi x}{2}}$. Тогда получим:

$$\lim_{x\to1}(1-x)\cdot tq\frac{\pi x}{2}=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{ctq\dfrac{\pi x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}1-x=y,\\ x=1-y,\\ x\to1\Rightarrow y\to0\end{array}\right|=\lim_{y\to0}\frac{y}{ctq\dfrac{\pi}{2}(1-y)}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{y}{ctq\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi y}{2}\right)}=\lim_{y\to0}\frac{y}{tq\dfrac{\pi y}{2}}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\dfrac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi},\ \text{т.к. } tq\frac{\pi y}{2}\sim\frac{\pi y}{2} \text{ при } y\to0.$$

С помощью второго замечательного предела раскрывается неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$. Рассмотрим это на примерах.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+1}$.

Решение. Найдем пределы основания степени и показателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}}{2-\dfrac{1}{x}}=\frac{2+0}{2-0}=1,\quad \lim_{x\to\infty}(x+1)=\infty.$$

В данном случае имеем неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$, для раскрытия которой используем второй замечательный предел. Для этого основание представим в виде $1+\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - бесконечно малая функция, а в показателе степени выделим множитель $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ и построим функцию $\left(1+\phi(x)\right)^{\frac{1}{\phi(x)}}$.

Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+1}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{2x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right]^{\frac{2(x+1)}{2x-1}}==e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}}}=e^{1}=e.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, то получаем неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$. При раскрытии этого вида неопределенности используем второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x-1\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x^2}{4x^2}}=\frac{1}{\sqrt{e}},\ \text{т.к. } 1-\cos x\sim 2\sin^2\frac{x}{2},\quad \sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}\ \text{при}\ x\to 0.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+x)-\ln 2}{x}$.

Решение. При подстановке $x=0$ под знак предела получим неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, которую можно раскрыть с помощью второго замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+x)-\ln 2}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{2+x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{2+x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\ln e^{1/2}=\frac{1}{2}\cdot\ln e=\frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\sqrt{1-x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\sin 2x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x\sin x-2\sin^2 x}{7x^2-4x\sin x+\sin^2 x}$; л) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx+tg3x}{tg4x}$; м) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}$.

2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\sqrt{1+x}\right)^{\frac{2}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}(9-2x)^{\frac{1}{4-x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x^2}}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+9}{x^2+3x+5}\right)^{6x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$; и) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{2\sin x}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}$;

к) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\cos x}$; л) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$; м) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$; н) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x+2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$.

Библиографический список

1. Садовничая, И.В. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной: учебное пособие для среднего профессионального образования / И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко. – М.: Издательство Юрайт, 2023. – 115 с.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 2002. – 443 с.
3. Демидович, Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Астрель, 2003. – 495 с.
4. Ильин, В.А. Математический анализ. В 2 ч. Часть 1.: учебник для академического бакалавриата / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 324 с.

Учебное издание

Арабчикова Юлия Ивановна

Асаева Татьяна Александровна

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ
Часть 1

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать__________. Тираж 5 экз.

Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53