Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Рязанский институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

О.В. Тихонова, О.А. Чихачева

ТЕОРИЯ ИГР

Часть 1

Учебное пособие

Рязань
2020

УДК 519.83 (075)

ББК 22.18я7

Т 46

Тихонова, О.В.

Т 46 Теория игр. Часть 1: учебное пособие / О.В. Тихонова, О.А. Чихачева. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2020. – 48 с.

Учебное пособие представляет собой изложение основных понятий и методов теоретико-игрового моделирования. Математический аппарат теории игр анализируется преимущественно с экономико-прикладных позиций и широко иллюстрируется примерами. Пособие состоит из двух частей, в первой части представлен теоретический материал по разделу «Матричные игры», предложены задания для самостоятельного решения и индивидуальные задания на 10 вариантов.

Пособие предназначено для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» всех форм обучения.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

УДК 519.83 (075)

ББК 22.18я7

Содержание

Введение

Теория игр представляет собой раздел математики, в котором на основе математического моделирования анализируются и разрабатываются стратегии принятия оптимальных решений в условиях конфликта интересов и неопределенности поведения. Несмотря на то, что теория игр не охватывает все аспекты возникающих реальных ситуаций, изучение и использование ее инструментария становится неотъемлемой частью современного экономического образования, поскольку она может использоваться:

1) для анализа ситуаций, связанных с необходимостью принятия стратегических решений, конкуренцией относительно международной торговли, налогообложением;

2) для нахождения механизмов межрегиональных взаимодействий и схем распределения доходов;

3) принятии решения об объединении компаний для осуществления совместных проектов;

4) построении прогнозных сценариев поведения конкурентов;

5) прогнозировании, разработке стратегий развития компаний;

6) определении ценовой политики;

7) определении оптимальных затрат на рекламу в условиях конкурентного рынка;

8) выработке алгоритмов наилучшего поведения во время торгов (аукционов), организации производства.

Цель данного учебного пособия в том, чтобы предоставить в распоряжение студентов экономических специальностей достаточно простое и доступное руководство, содержащее элементарное изложение основ математического аппарата теории игр, который имеет отчетливые и понятные практические приложения. Математический и логический аппарат теории игр анализируется преимущественно с экономико-прикладных позиций и иллюстрируется модельными и реально возникающими ситуациями.

1 Введение в теорию игр

1.1 Предмет теории игр

Практически в любой отрасли человеческой деятельности возникают конфликты, то есть, ситуации при которых сталкиваются стороны с несовпадающими интересами. Задача каждой из сторон выбрать стратегию поведения, приносящую максимальную выгоду. Решение такой задачи осложняется тем, что конфликтующая сторона не имеет полной информации о конфликте в целом. Это может быть связано с сознательным стремлением противника скрыть планы или с тем, что в качестве противника выступает случайный фактор. Считается, что в конфликтной ситуации требуется выбрать оптимальное решение в условиях неопределённости.

Подобные задачи можно решать, используя аппарат математического моделирования. Математическая модель конфликтной ситуации называется **игрой.**

В экономике иногда приходится сталкиваться с ситуацией, когда при наличии многих участников эффективность решения одного из них зависит от того, какие решения приняли другие участники. Например, доход предприятия от продажи изделия зависит не только от установленной на него цены, но и от количества купленных покупателем изделий. Или при выборе ассортимента товаров, выпускаемых предприятием, нужно учитывать, какой ассортимент товаров выпускают другие предприятия.

Все ситуации, когда эффективность действия одного из участников зависит от действий других, можно разбить на два типа:

- интересы участников совпадают, и они могут договориться о совместных действиях;
- интересы участников не совпадают.

Во втором случае может оказаться невыгодным сообщать другим участникам свои решения, так как кто-нибудь из них сможет воспользоваться знанием чужих решений и получит больший выигрыш за счёт других участников.

В конфликтной ситуации противодействия противоположной стороны могут носить пассивный или активный характер.

Если в качестве противоположности выступает неактивная, то есть пассивная сторона, которая явно активно не противодействует достижению намеченной цели, то такие игры называются **играми с природой.** Такой стороной в экономической сфере являются:

- неизвестность поведения клиентов;
- реакция населения на новые виды товаров;
- неясность погодных условий при перевозке товаров или проведения ярмарки;
- недостаточная информированность о коммерческих операциях, закупках, сделках и т.д.

В других ситуациях противоположная сторона активно, сознательно может противостоять достижению намеченной цели. В подобных случаях происходит столкновение противоположных интересов, мнений, целей. Такие ситуации называются конфликтными, а принятие решений затрудняется из-за неопределённости поведения противника. Обе стороны конфликта не могут точно предсказать властные действия. Несмотря на такую неопределённость, принимать решения приходится каждой стороне конфликта. Необходимость обоснования оптимальных решений в конфликтных ситуациях привела к возникновению теории игр.

Теория игр - математическая теория конфетных ситуаций.

Основными ограничениями в этой теории являются:

1) предположение о полной (идеальной) разумности противника;

2) принятие при разрешении конфликта наиболее осторожного решения.

Вопросы, изучаемые в теории игр:

1) в чем состоит оптимальность поведения каждого из игроков в игре, какие свойства стратегий следует считать признаками оптимальности;

2) существуют ли стратегии игроков, которые обладали бы атрибутами оптимальности;

3) если существуют оптимальные стратегии, то, как их найти.

1.2 Основные понятия теории игр

Конфликтующие стороны называются **игроками.** Одна реализация игры - **партией.** Исход игры - **выигрышем** или **проигрышем.**

Развитие игры во времени происходит последовательно, по этапам или ходам. **Ходом** в теории игр называется выбор одного из предусмотренных правилами игры действия. Ходы бывают личные и случайные.

Личным ходом называют сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действия и его осуществления.

Случайным ходом называют выбор, осуществляемым не волевым решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, сдача карт и т.д.).

В теории игр считается обязательным до начала игры оговорить её правила.

В *правила игры* обычно входят:

- совокупность требований и ограничений на действия игроков;
- обмен информацией игроков о действиях противников;
- функции выигрышей игроков;
- описания начальной и финальной позиции.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры, содержащей личные и случайные ходы, обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш.

В большинстве конфликтных ситуаций при выборе разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько показателей и факторов. Причём стратегия, оптимальная по одному показателю, необязательно будет оптимальной и по другим.

1.3 Виды игровых моделей

В зависимости от причин, вызывающих неопределённость исходов, игры можно разделить на следующие группы.

1 Комбинаторные игры, в которых правила дают возможность каждому игроку проанализировать все разнообразные варианты своего поведения и, сравнив эти варианты, выбрать тот из них, который ведёт к наилучшему для этого игрока исходу. Неопределённость исхода связана обычно с тем, что количество возможных вариантов поведения (ходов) слишком велико, и практически игрок не в состоянии их все перебрать и проанализировать.

2 Азартные игры, в которых исход оказывается неопределённым в силу влияния различных случайных факторов. Азартные игры состоят только из случайных ходов, при анализе которых применяется теория вероятностей. Азартными играми теория игр не занимается.

3 Стратегические игры, в которых полная неопределённость исхода вызвана тем, что каждый из игроков, принимая решение о выборе предстоящего хода, не знает, какой стратегии будут придерживаться другие участники игры, причём незнание игрока о поведении и намерениях партнеров носит принципиальный характер, так как отсутствует информация о последующих действия противника (партнера).

Существуют игры, сочетающие в себе свойства комбинаторных и азартных игр. Стратегичность игры может сочетаться с комбинаторностью и т.д.

В игре могут сталкиваться интересы двух или более игроков. Если в игре участвует два игрока, то игра называется **парной.** Если число игроков больше двух, то игра называется **множественной.** Если во множественной игре интересы участников совпадают, то участники могут образовывать **коалиции** (постоянные или временные). Множественная игра с двумя постоянными коалициями превращается в **парную.**

Различают игры и по сумме выигрыша.

Игра называется ***игрой с нулевой суммой***, если каждый игрок выигрывает за счёт других, а сумма выигрыша одной стороны равна проигрышу другой. В парной игре с нулевой суммой интересы игроков прямо противоположны. Парная игра с нулевой суммой называется **антагонистической** игрой.

Игры, в которых выигрыш одного игрока и проигрыш другого не равны между собой, называются ***играми с не нулевой суммой*** (лотерея).

В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на конечные и бесконечные.

Игра называется **конечной**, если у каждого игрока имеется только конечное число стратегий.

Игра называется **бесконечной**, если хотя бы у одного игрока бесконечное число стратегий.

По количеству ходов, которые делают игроки для достижения своих целей, игры бывают одношаговые и многошаговые.

Одношаговые игры заключаются в том, что игрок выбирает одну из доступных ему стратегий и делает всего один единственный ход.

В **многошаговых** играх, игроки для достижения своих целей делают последовательно ряд ходов, которые могут ограничиваться правилами игры, либо могут продолжаться до тех пор, пока у одного из игроков не останется ресурсов для продолжения игры.

В последнее время получили большое распространение деловые игры. **Деловая** игра имитирует взаимодействие людей и проявляется как упражнение в последовательном принятии множества решений, основанное на некоторой модели коммерческой деятельности и на исполнении участниками игры конкретных ролей должностей.

2 Матричные игры

2.1 Построение платёжной матрицы

Рассмотрим математическую модель конечной парной игры с нулевой суммой.

Пусть в игре участвуют два игрока *A* и *B*. Игроки одновременно делают по одному ходу. Заметим, что в этом случае понятие хода совпадает с понятием стратегии. Пусть игрок *A* может выбрать одну из стратегий $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$. Игрок *B* одну из стратегий $B_1,\ B_2,\ ...,\ B_n$. Будем полагать что интересы игроков противоположны, то есть при выборе игроком *A* стратегии *i*, игроком *B* – стратегии *j* выигрыш первого игрока и проигрыш второго составляют одну и ту же величину a_{ij}. Цель игрока *A* – максимизировать свой выигрыш, цель игрока *B* – минимизировать свой проигрыш.

Все выигрыши первого игрока и проигрыши второго можно задать с помощью матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Такую матрицу называют **платёжной** матрицей. Данная матрица и дала название описанному типу игр – **матричные игры.** Матричные игры являются играми с нулевой суммой. Для случая двух игроков игра будет являться антагонистической.

Будем полагать, что первый игрок независимо от второго может выбрать любую из *m*-строк платёжной матрицы. Второй – один из *n*-столбцов. Выбор строки или столбца игроком составит стратегию игрока.

Рассмотрим на примере принцип построения платежной матрицы.

Пример 1. Руководитель торговой фирмы решает вопрос о том, какое количество саженец ему следует закупить к сезону. Покупать товар он может лишь один раз. Каждый саженец стоит две денежные единицы и может быть продан за 4 денежные единицы. Саженцы, оставшиеся нераспроданными к концу сезона, полностью обесцениваются и никакой стоимости не представляют. Известно, что кол-во саженцев, которое может быть продано колеблется от 1 до 4. Необходимо составить матрицу денежных сумм, полученных в зависимости от решения руководителя фирмы и от результатов продажи. Номеру строки соответствует решение руководителя фирмы о количестве закупаемых саженцев, а номеру столбца – количество проданных саженцев.

Решение. Прибыль для каждого возможного случая внесем в таблицу 1.

Рассмотрим первую строку A_1 платежной матрицы, которая соответствует решению руководителя о покупке одного саженца. В случае, если продан один саженец (B_1=1), то прибыль равна a_{11} = 4 - 2= 2 ден. ед. В остальных случаях, когда спрос превышает предложение (B_2=2, B_3=3, B_4=4), будет также продан один саженец (нельзя продать больше товара, чем имеется у продавца). Следовательно, $a_{12} = a_{13} = a_{14}$ =2 ден. ед.

Рассмотрим вторую строку A_2 платежной матрицы (продавец закупил два саженца). Прибыль в зависимости от спроса составит:

$a_{21} = 4\cdot1 - 2\cdot2 = 0$ ден. ед. (1 саженец продали, 2 саженца закупили)

$a_{22} = a_{23} = a_{24} = 4\cdot2 - 2\cdot2 = 4$ ден. ед. (2 саженца закупили, 2 продали).

Таблица 1 – Платежная матрица

	B_1 = 1	B_2 = 2	B_3 = 3	B_4 = 4
A_1 = 1	2	2	2	2
A_2 = 2	0	4	4	4
A_3 = 3	-2	2	6	6
A_4 = 4	-4	0	4	8

В общем случае получим:

1) если $i = j$ (i - саженцев купили, все их продали), то $a_{ij} = 4 \cdot i – 2 \cdot i = 2 \cdot i$ ($a_{33} = 6$, $a_{44} = 8$);

2) если $i > j$ (закупили саженцев больше, чем продали), то $a_{ij} = 4 \cdot j – 2 \cdot i$ ($a_{31} = 4 \cdot 1 – 2 \cdot 3 = –2$, $a_{32} = 4 \cdot 2 – 2 \cdot 3 = 2$, $a_{41} = 4 \cdot 1 – 2 \cdot 4 = –4$, $a_{42} = 4 \cdot 2 – 2 \cdot 4 = 0$, $a_{43} = 4 \cdot 3 – 2 \cdot 4 = 4$);

3) если $i < j$ (закупили саженцев меньше, чем могли бы продать, все закупленные саженцы продали), то $a_{ij} = 4 \cdot i – 2 \cdot i = 2 \cdot i$ ($a_{34} = 2 \cdot 3 = 6$).

2.2 Преобразование платёжной матрицы

На практике платёжные матрицы достигают значительных размеров. Перед началом игры целесообразно упростить платежную матрицу путём уменьшения её размерности посредством исключения доминирующих и дублирующих стратегий.

Стратегия A_i доминирует над стратегией A_k, если при любом поведении противника стратегия A_i даст не меньший выигрыш, а если такой же, то A_i дублирует A_k. В таком случае все элементы строки i больше всех элементов строки k (доминируют) или равны им (дублируют).

Пример 2. С учётом вариантов конъюнктуры B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, сложившейся на рынке, и поведения покупателей в микрорайоне города, коммерческое предприятие разработало 6 технологий продажи товаров. Возможные варианты среднедневного товарооборота в млн. руб. представлены в таблице 2. Упростите платежную матрицу.

Таблица 2 – Платежная матрица

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0,4	0,9	0,5	0,5	0,6
A_2	0,6	0,5	0,7	0,8	0,9
A_3	0,6	0,3	0,8	0,6	0,7
A_4	0,3	0,8	0,5	0,4	0,3
A_5	0,1	0,3	0,5	0,4	0,3
A_6	0,1	0,8	0,5	0,4	0,5

Решение. Упростим матрицу. Стратегия A_1 доминирует над стратегиями $A_4, A_5, A_6,$ так как все элементы строки A_1 не меньше соответствующих элементов указанных строк, следовательно, исключаем 4, 5, 6 строки. С позиции проигрыша игрока B стратегии B_3, B_4, B_5 доминируют над стратегией B_1 (элементы столбца B_1 не больше соответствующих элементов указанных столбцов), следовательно, исключаем столбцы с номерами 3, 4, 5. Платежная матрица примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

С позиции игрока A стратегия A_1 доминирует над A_4, а стратегия A_2 доминирует над A_3, следовательно, исключаем 3 и 4 строки:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее упрощение платёжной матрицы возможно с помощью эквивалентного преобразования матрицы, при котором не изменяются оптимальные стратегии игроков.

Теорема 1. Если (A^*, B^*, v) есть решение игры с матрицей A, то решение игры с матрицей $kA+b$ есть $(A^*, B^*, kv+b)$, где $k > 0$, b – любое действительное число.

Учитывая данную теорему, можно преобразовать матрицу A из предыдущего примера.

При k=10; b= –3 подучим следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>*Замечание.*</u> Теорему 1 рационально применять в случае наличия в платежной матрице отрицательных элементов.

2.3 Принцип минимакса для стратегической игры

Пусть для конечной парной игры с нулевой суммой задана платёжная матрица (1).

Рассмотрим случай, когда игроки сознательно не информируют друг друга о своей стратегии. Задача состоит в определении:

1) наилучшей (оптимальной) стратегии игрока *A* из стратегий $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$;

2) оптимальной стратегии игрока *B* из стратегий $B_1,\ B_2,\ ...,\ B_n$.

Для решения задачи примеряется принцип, согласно которому участники игры разумны и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели – выиграть. В стратегической игре у игрока *A* нет оснований рассчитывать на доброе отношение противника, следовательно, он должен придерживаться осторожной тактики поведения, отыскав не лучшее решение, а лучшее из худших.

Проанализируем последовательно каждую стратегию игрока *A*. Если он выбирает стратегию A_1, то игрок *B* может выбрать такую стратегию B_j, при которой выигрыш игрока *A* будет равен наименьшему из чисел a_{1j}.

Обозначим $\alpha_1 = \min\limits_j a_{1j}$, где α_1 – минимальное значение из всех чисел первой строки платежной матрицы.

Тогда по аналогии запишем выражение для любой стратегии A_i: $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$.

Выбирая стратегию A_i, игрок *A* должен рассчитывать на то, что в результате разумных действий игрока *B* он не выиграет больше, чем α_i, поэтому игрок *A* должен выиграть ту стратегию, для которой число α_i максимально. Пусть $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$, где α – максимальное значение из всех чисел столбца α_i ($i = \overline{1, m}$).

Таким образом, $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$.

Величина α – гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе первый игрок при любом поведении второго игрока. Величина α называется **нижней ценой** игры или **максимином.** Стратегия A_i первого игрока, обеспечивающая получение нижней цены игры, называется **максиминной чистой** стратегией. При этом игрок *A*, при любом поселении игрока *B*, обеспечивает себе выигрыш не меньше α: $\alpha_i \geq \alpha \ (i = \overline{1, m})$.

Игрок *B* заинтересован в том, чтобы уменьшить свой проигрыш в условиях, когда его противник стремится насести ему максимальный вред. Для выбора оптимальной стратегии игрок *B* должен найти максимальное значение выигрыша в каждом столбце и среди этих значений выбрать наименьшее.

Обозначим через β_j максимальное значение в каждом столбце: $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$. Наименьшее значение среди чисел β_j обозначим через $\beta = \min\limits_j \beta_j$. Тогда получим $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$.

Число β называется **верхней ценой** игры или **минимаксом.** Стратегия игрока *B*, обеспечивающая получение верхней цены игры называется **минимаксной чистой** стратегией. Применяя её, игрок *B* проиграет не больше β при любых действиях игрока *A*: $\beta_j \leq \beta \ (j = \overline{1, n})$.

Справедливо неравенство: $\alpha \leq \beta$.

Принцип, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий (максиминной и минимаксной) в теории игр называется **принципом минимакса** или **принципом гарантированного результата** (принципом осторожности). Этот принцип был впервые сформулирован Джоном фон Нейманом в 1928 году.

Существуют матричные игры, для которых нижняя цена игры равна верхней. То есть $\alpha = \beta$. Такие игры называются **играми с седловой точкой.** В этом случае $v = \alpha = \beta$ называется **чистой ценной** игры, а стратегии игроков A_i^* и B_j^*, позволяющие достичь этого значения, – **оптимальными.** Пара $((A_i^*,\ B_j^*)$

называется **седловой точкой** матрицы, так как элемент $a_{ij}^* = v$ одновременно является минимальным в i-строке и максимальным в j-столбце.

Оптимальной стратегии A_i^* и B_j^* и чистая цена v являются решением игры в чистых стратегиях, то есть без привлечения механизма случайного выбора.

Пример 3. Задана платёжная матрица A. Найти нижнюю и верхнюю цену игры.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим минимальные значения по строкам матрицы:

$$\alpha_1 = \min_j \{5; 1; 2\} = 1,\ \alpha_2 = \min_j \{2; 6; 2\} = 2,\ \alpha_3 = \min_j \{3; 4; 3\} = 3.$$

Тогда нижняя цена игры $\alpha = \max_i \{1; 2; 3\} = 3$.

Находим максимальные значения по столбцам матрицы:

$$\beta_1 = \max_i \{5; 2; 3\} = 5,\ \beta_2 = \max_i \{1; 6; 4\} = 6,\ \beta_3 = \max_i \{2; 2; 3\} = 3.$$

Тогда верхняя цена игры $\beta = \min_j \{5; 6; 3\} = 3$.

Полученные значения внесем в таблицу 3.

Таблица 3 – Нахождение верхней и нижней цены игры

A \ B	***B₁***	***B₂***	***B₃***	**Минимум по строкам,** α_i
A₁	5	1	2	1
A₂	2	6	2	2
A₃	3	4	$\boxed{\mathbf{3}}$	**3**
Максимум по столбцам, β_j	5	6	**3**	

Так как $\alpha = \beta = 3 = v$, то матрица игры имеет седловую точку (A_3, B_3). Оптимальная стратегия первого игрока – A_3, второго – B_3. Цена игры $v = 3$.

Из таблицы видно, что отклонение первого игрока от оптимальной стратегии A_3 уменьшает его выигрыш, а отклонение второго игрока от стратегии B_3 увеличивает его проигрыш. В данном случае стратегии игроков определены однозначно, то есть игра является игрой чистых стратегиях

2.4 Матричные игры в смешанных стратегиях

Если матричная игра содержит седловую точку, то её решение находится по принципу минимакса. Если платёжная матрица не имеет седловой точки, то имеется возможность к каждому из игроков побороться за лучший исход, чем тот который гарантирует ему осторожная (минимаксная) стратегия.

Если же платежная матрица не имеет седловой точки, то применение минимаксных стратегий каждым из игроков показывает, что игрок *A* обеспечит себе выигрыш не меньше α, а игрок *B* обеспечит себе проигрыш не больше β. Так как $\alpha < \beta$, то игрок *A* стремится увеличить выигрыш, а игрок *B* уменьшить проигрыш.

Если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, то игроки будут многократно примереть чистые стратегии случайным образом с определённой вероятностью. Такая стратегия в теории игр называется смешанной стратегией.

Смешанная стратегия игрока – это полный набор его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями.

Для применения смешанных стратегий требуются следующие условия:

1) в игре отсутствует седловая точка;

2) игроками используются случайная смесь чистых стратегий с соответствующими вероятностями;

3) игра многократно повторяется в одних и тех же условиях;

4) при каждом из ходов один игрок не информирован о выборе стратегии другим игроком.

Пример 4. *Игра "чёт/нечет".*

Каждый из игроков записывает на бумаге число. Если записанные числа оба четные или оба нечетные, то 1 очко выигрывает игрок *A*, в противном случае – игрок B. Определить оптимальные стратегии игроков.

Решение. Для составления матрицы сначала необходимо выделить возможные стратегии игроков. Игрок *A* может записать либо четное, либо нечетное число. Поэтому обозначим его стратегии: A_1 – «чет», A_2 – «нечет». Стратегии игрока *B* определяются аналогично. Матрица игры будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем нижнюю и верхнюю цены игры (таблица 4).

Таблица 4 – Нахождение верхней и нижней цены игры

A\B	B_1	B_2	**Минимум по строкам,** α_i
A_1	1	-1	-1
A_2	-1	1	-1
Максимум по столбцам, β_j	1	1	

Нижняя цена игры $\alpha = \max_i \alpha_i = -1,$ верхняя цена игры $\beta = \min_j \beta_j = 1.$ Так как $\alpha \neq \beta$, то седловой точки нет.

Если данная игра будет повторяться многократно (например, 1000 раз) и игроки будут чередовать свои стратегии случайным образом, то выигрыш обоих игроков должен равняться нулю (в соответствие с теорией вероятности).

Пусть на первом ходе игроки выбрали стратегии A_1, B_2 (то есть, игрок *A* записал четное число, а игрок *B* – нечетное), то выиграл игрок *B*. На следующем ходе игрок *A* может поменять стратегию и выбрать A_2, а игрок *B* оставит свою «удачную» стратегию B_2. Тогда уже выиграет игрок *A*. Результаты таких партий представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Результаты партий

Ход игрока *A*	**Ход игрока *B***	**Выигрыш игрока А**	**Суммарный (накопленный) выигрыш игрока А**
A_1	B_2	-1	-1
A_2	B_2	1	0
A_2	B_1	-1	-1
A_1	B_1	1	0
A_1	B_2	-1	-1
A_1	B_1	1	0
и т.д.			

В данной ситуации игрокам невыгодно придерживаться какой-то одной стратегии. Игроки случайным образом чередуют свои чистые стратегии.

Игрок *A* 4 раза из 6 выбрал стратегию A_1 и 2 раза – A_2. Тогда игроком *A* стратегии A_1 и A_2 применялись с частотой 4/6=2/3 и 1/3. То есть, произошло «смешивание» стратегий.

Игрок *B* из 6 ходов 3 раза выбрал стратегию B_2 и 3 раза B_1. Тогда стратегии B_1 и B_2 применялись с частотой 1/2.

Компромиссного распределения выигрыша между игроками при многократном повторении игры можно достичь путём чередования ими своих стратегий с определённой частотой (вероятностью). Если игру "чёт/нечет" продолжать бесконечно долго, то в итоге окажется, что обоим игрокам выгодно случайным образом применять свои стратегии с вероятностями 0,5, тогда средний выигрыш составит $v = 0$.

В предыдущем примере ситуация была другая: там верхняя и нижняя цена игры совпадали $v = \alpha = \beta = 3$ и выигрыш достигался путем применения игроками только одной стратегии: Игроком *A* – стратегии A_3, игроком *B* – только стратегии B_3. Поэтому такие стратегии называются чистыми. Решение игры в чистых стратегиях можно достигнуть только в случае равенства нижней и верхней цены игры.

В ситуации, когда $\alpha < \beta$, каждый игрок может изменять вероятность применения своих чистых стратегий таким образом, чтобы максимально увеличить свой средний выигрыши получить оптимальное сочетание чистых стратегий.

Для матрицы игры

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

игрок А имеет m чистых стратегий, тогда его смешанная стратегия может быть описана набором m неотрицательных чисел $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m$, сумма которых равна 1. То есть, рассмотрим вектор $X = (x_1,\ x_2,\ ...,x_m)$, $x_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Аналогично для второго игрока смешанная стратегия Y – это набор чисел $y_1,\ y_2,\ ...,\ y_m$, для которых выполняются условия $Y = (y_1,\ y_2,\ ...,y_m)$, $y_i \ge 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Тогда любую чистую стратегию можно представить как частный случай смешанной стратегии. Например, стратегию A_1 можно рассматривать как смешанную стратегию $X = (1,\ 0,\ ...,0)$, стратегию A_2 как $X = (0,\ 1,\ 0,\ ...,0)$.

Заметим, что каждый игрок применяет свои стратегии независимо от выбора другого игрока. Средний выигрыш первого игрока выражается в виде математического ожидания его выигрышей:

$$H(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \ . \tag{2}$$

Средний выигрыш первого игрока является функцией двух наборов переменных X и Y. Первый игрок стремится за счёт применения своих смешанных стратегий *X* максимально увеличить свой средний выигрыш *H (X, Y),* а второй – за счёт своих смешанных стратегий стремится сделать выигрыш игрока *A* минимальным. То есть для решения игры необходимо найти такие наборы *X* и *Y*, при которых достигается верхняя цена игры $\beta = \min\limits_{Y} \max\limits_{X} H(X, Y)$.

С другой стороны, ситуация должна быть аналогичной относительно второго игрока, то есть нижняя цена игры должна быть: $\alpha = \max\limits_{X} \min\limits_{Y} H(X, Y)$.

Оптимальными смешанными стратегиями первого и второго игроков называют оптимальными смешанными стратегиям такие наборы X^0, Y^0, которые удовлетворяют равенству

$$\min_{Y} \max_{X} H(X, Y) = \max_{X} \min_{Y} H(X, Y) = H(X^0, Y^0) = v.$$

Величина *v*, полученная по этой формуле называется **ценой игры**. Набор оптимальных смешанных стратегий и цены игры *v* называется **решением матричной игры**.

Пример 5. *Игра "чёт/нечет" (продолжение).* Найти решение игры в смешанных стратегиях.

Решение. Как показано в примере 4, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, следовательно, седловой точки нет.

Пусть игрок *A* выбирает стратегию A_1 с вероятностью *x*, тогда вероятность применения стратегии A_2 равна $1-x$. Пусть игрок *B* выбирает стратегию B_1 с вероятностью *y*, стратегию B_2 с вероятностью $1-y$. Получим $X = (x,\ 1-x)$, $Y = (y,\ 1-y)$ – смешанные стратегии игроков *A* и *B* соответственно.

Тогда средний выигрыш относительно игрока *A*, согласно формуле (2):

$$H(X, Y) = 1 \cdot x \cdot y - 1 \cdot x(1-y) - 1 \cdot (1-x) \cdot y + 1 \cdot (1-x) \cdot (1-y) =$$
$$= 4xy - 2x - 2y + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right).$$

Представим зависимость *H(X, Y)* графически, учитывая, что *x* и *y* изменяются в интервале [0;1] (рисунок 1).

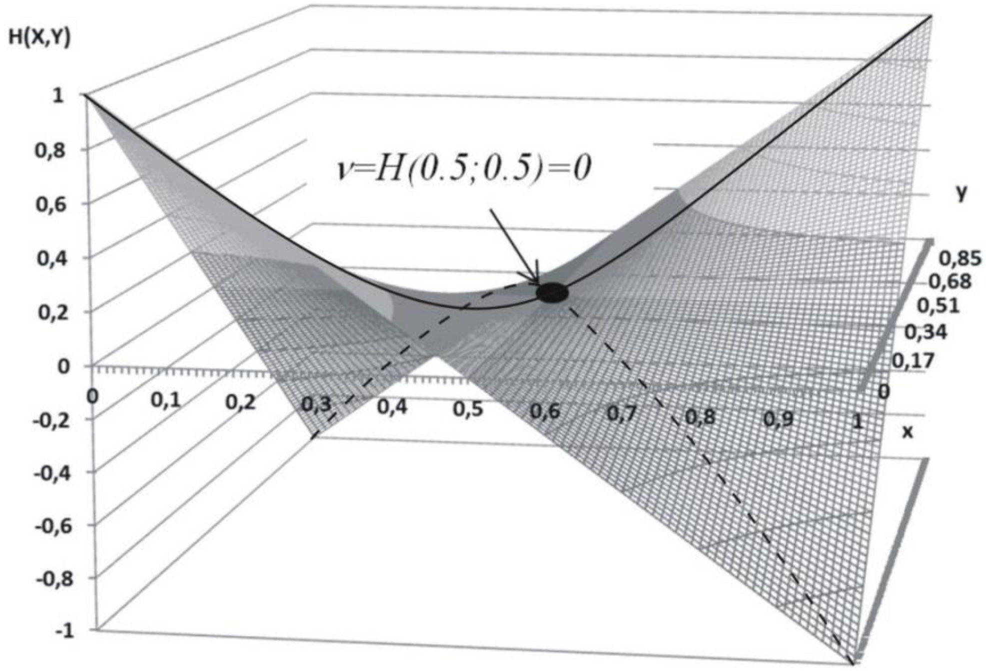

Рисунок 1 – Зависимость среднего выигрыша от смешанных стратегий

При изменении x от 0 до 1 максимальное значение функции выигрыша $\max\limits_{X} H(X,Y)$ представляет собой линию (сплошная линия на рисунке 1) с минимумом $\min\limits_{Y} \max\limits_{X} H(X,Y)$ в точке с координатами x=0,5, y=0,5, H=0.

Аналогично при изменении y от 0 до 1 минимальное значение функции выигрыша $\min\limits_{Y} H(X,Y)$ представляет собой линию (пунктирная линия на рисунке 1) с максимумом $\max\limits_{X} \min\limits_{Y} H(X,Y)$ в точке с координатами x=0,5, y=0,5, H=0. Следовательно, точка (0,5; 0,5; 0) является точкой равновесия и выигрыш равен 0.

Таким образом, оптимальными смешанными стратегиями игроков будут $X = (0{,}5;\ 0{,}5)$, $Y = (0{,}5;\ 0{,}5)$. Цена игры v = 0.

В предыдущем примере для простой задачи решение было получено достаточно сложным способом. Ставится вопрос: все ли игры имеют решение, и существует ли более простой способ нахождения решения? Ответ на поставленный вопрос даёт основная теорема теории матричных игр (теорема фон Неймана).

Теорема (фон Неймана). Для матричной игры с любой матрицей A величины

$$\alpha = \max_X \min_Y H(X,Y) \quad \text{и} \quad \beta = \min_Y \max_X H(X,Y)$$

существуют и равны между собой, то есть, любая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях. Кроме того, существует по крайней мере одна ситуация в смешанных стратегиях (X^0, Y^0), для которой выполняется соотношение

$$\min_Y \max_X H(X,Y) = \max_X \min_Y H(X,Y) = H(X^0, Y^0) = v\,.$$

3 Методы решения антагонистических игр в смешанных стратегиях

3.1 Аналитический метод решения игр 2×2 в смешанных стратегиях

Рассмотрим игру с платёжной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть $p^* = (p_1,\ p_2)$ – оптимальная стратегия игрока A, т.е. первый игрок применяет свои чистые стратегии с вероятностями p_1 и $p_2 = 1 - p_1$. Тогда выполняются равенства

$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$ при выборе стратегии B_1 игроком B;

$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$ при выборе стратегии B_2 игроком B;

$p_1 + p_2 = 1$.

Из третьего равенства выразим p_2, подставив в первое и второе, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1) = v. \end{cases} \tag{3}$$

Решение данной системы можно вычислить по формулам

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{d}, \;\; p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{d}, \;\; v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{d}, \tag{4}$$

где $d = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}$.

Пусть $q^* = (q_1, q_2)$ – оптимальная стратегия игрока *B*, где $q_1 + q_2 = 1$. Тогда будут выполнены равенства:

$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v$ при выборе стратегии A_1 игроком *A*;

$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v$ при выборе стратегии A_2 игроком *A*;

$q_1 + q_2 = 1$.

Выразив q_2 из третьего равенства, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1) = v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}(1 - q_1) = v. \end{cases}$$

Решение системы можно найти по формулам

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{d}, \;\; q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{d}, \;\; v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{d}, \text{ где } d = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}.$$

Пример 6. Швейное предприятие, выпускающее детские платья и костюмы, реализует свою продукцию через фирменный магазин. Сбыт продукции зависит от состояния погоды. По данным прошлых наблюдений предприятие в течение апреля-мая, в условиях тёплой погоды, может реализовать 600 костюмов и 1975 платьев, а при прохладной погоде – 1000 костюмов и 625 платьев. Известно, что затраты на единицу продукции в течение указанных месяцев составили для костюмов 27 у.е., для платьев – 8 у.е., а цена реализации соответственно равна 48 у.е. и 16 у.е.

Ставится задача максимизации средней величины прибыли от реализации выпущенной продукции с учётом неопределённости погоды. Определите оптимальную стратегию предприятия, обеспечивающую при любой погоде определенную среднюю прибыль.

Решение. Предприятие располагает двумя чистыми стратегиями: A_1 – выпуск продукции в расчете на теплую погоду, A_2 – выпуск продукции в расчете на холодную погоду. Природу будем рассматривать как второго игрока с двумя стратегиями: B_1 – теплая погода и B_2 – прохладная погода.

Если предприятие выберет стратегию A_1, т.е. будет производить 600 костюмов и 1975 платьев, тогда

1) в случае теплой погоды (стратегия природы B_1) будет реализована вся произведенная продукция, прибыль предприятия составит

(48-27)*600+(16-8)*1975=28400 (у.е.).

2) в случае прохладной погоды (стратегия природы B_2) будут реализованы 600 костюмов и 625 платьев, прибыль равна

(48-27)*600+625*16-1975*8=6800 (у.е.);

Если предприятие выберет стратегию A_2, т.е. будет производить 1000 костюмов и 625 платьев, тогда

1) в условиях теплой погоды (B_1) будет реализовано 600 костюмов и 625 платьев, прибыль будет равна

600*48-1000*27+625*(16-8)=6800 (у.е.);

2) в условиях прохладной погоды (B_2) будет реализована вся продукция, и предприятие получит прибыль

1000*(48-27)+625*(16-8)=26000 (у.е.).

Составим платежную матрицу данной игры

$$A = \begin{pmatrix} 28400 & 6800 \\ 6800 & 26000 \end{pmatrix}.$$

Из платежной матрицы видно, что первый игрок (предприятие) никогда не получит прибыль меньше 6800. Но если погодные условия совпадают с выбранной стратегией, то прибыль (выигрыш) составит 26000 или 28400 у.е. Отсюда можно сделать вывод, что в условиях неопределенности погоды наибольшую гарантированную прибыль предприятие обеспечит, если будет попеременно применять то стратегию A_1, то стратегию A_2.

Пусть предприятие применяет стратегию A_1 с вероятностью p_1, а стратегию A_2 с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$. Найдем нижнюю и верхнюю цены игры (таблица 6).

Таблица 6 – Нахождение нижней и верхней цены игры

A\B	***B₁***	***B₂***	**Минимум по трокам,** α_i
A₁	28400	6800	6800
A₂	6800	26000	6800
Максимум по столбцам, β_j	28400	26000	

Нижняя цена игры $\alpha = \max_i \alpha_i = 6800,$ верхняя цена игры $\beta = \min_j \beta_j = 26000.$ Так как $\alpha \neq \beta$, то седловой точки нет.

Составим систему вида (3):

$$\begin{cases} 28400 p_1 + 6800(1 - p_1) = v, \\ 6800 p_1 + 26000(1 - p_1) = v. \end{cases}$$

По формулам (4) найдем решение системы

$$d = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = 28400 + 26000 - 6800 - 6800 = 40800,$$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{d} = \frac{26000 - 6800}{40800} = \frac{8}{17},$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{d} = \frac{28400 \cdot 26000 - 6800 \cdot 6800}{40800} = 16965.$$

Тогда $p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{8}{17} = \frac{9}{17}$.

Следовательно, первый игрок, применяя чистые стратегии A_1 и A_2 в соотношении 8:9, будет иметь оптимальную смешанную стратегию, обеспечивающую ему в любом случае среднюю прибыль в сумме 16965 у.е.

Рассчитаем, какое количество костюмов и платьев должно выпускать предприятие при оптимальной стратегии:

$$600 \cdot \frac{8}{17} + 1000 \cdot \frac{9}{17} = 812 \text{ (костюмов)},$$

$$1975 \cdot \frac{8}{17} + 625 \cdot \frac{9}{17} = 1260 \text{ (платьев)}.$$

3.2 Графический метод решения игр 2×2 в смешанных стратегиях

Пусть задана платёжная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Найдём решение игры в смешанных стратегиях. Обозначим смешанную стратегию игрока *A* $p^* = (p_1^*,\ p_2^*)$, при этом $p_1^* + p_2^* = 1$, или $p^* = (p_1^*,\ 1 - p_1^*)$. Составим систему вида (3):

$$\begin{cases} a_{11} p_1^* + a_{21}(1 - p_1^*) = v, \\ a_{12} p_1^* + a_{22}(1 - p_1^*) = v. \end{cases}$$

На оси абсцисс отложим отрезок, длина которого равна 1. Через концы отрезка проведём перпендикулярные прямые, на которых будем откладывать выигрыши при соответствующих чистых стратегиях. Прямая $x = 0$ соответствует стратегии A_2 игрока *A*, а прямая $x = 1$ – стратегии A_1. Внутренние точки отрезка $[0; 1]$ будут соответствовать смешанным стратегиям.

При $p_1^* = 0$ ($p_2^* = 1$) игрок A выбирает стратегию A_2. Если игрок В выберет стратегию B_1, то выигрыш будет равен a_{21}. На прямой A_2 отложим значение a_{21}.

Если $p_1^* = 1$ ($p_2^* = 0$), то игрок *A* выбирает стратегию A_1. В случае если игрок *B* выбирает стратегию B_1, выигрыш будет равен a_{11}, отложим это значение на прямой A_1. Соединив отмеченные точки, получим на графике отрезок B_1B_1 (рисунок 2). При выборе вторым игроком стратегии B_1, точка полученного отрезка будет определять смешанную стратегию игрока *A*, ордината выбранной точки будет равна выигрышу первого игрока.

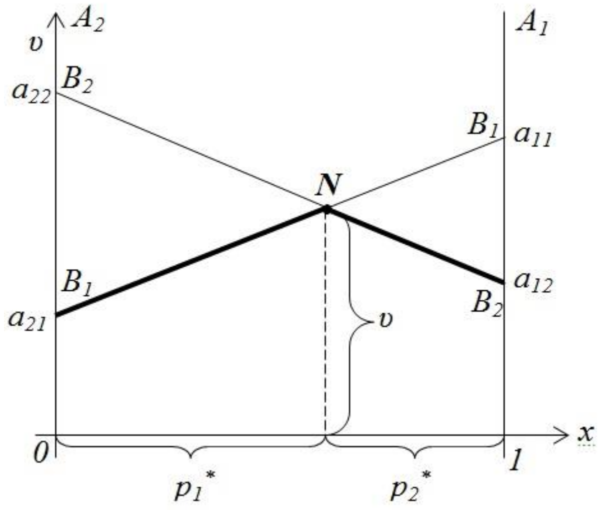

Рисунок 2 – Графическая интерпретация игры 2х2
в смешанных стратегиях

Рассмотрим случай, когда игрок *B* выбирает стратегию B_2.

Если $p_1^* = 0$ ($p_2^* = 1$) игрок A выбирает стратегию A_2, выигрыш равен a_{22}. Если $p_1^* = 1$ ($p_2^* = 0$), то игрок *A* выбирает стратегию A_1, выигрыш равен a_{12}. На графике получим отрезок B_2B_2 (рисунок 2). Если мы рассмотрим произвольную точку на отрезке B_2B_2, то при выборе вторым игроком стратегии B_2 эта точка будет определять смешанные стратегии игрока *A* и его выигрыш.

Ломаная линия, составленная из частей отрезков интерпретирующих стратегий игрока *B*, расположенная ниже всех отрезков, называется **нижней границей выигрыша**, получаемого игроком *A*.

Стратегии, части которых образуют нижние границы выигрыша, называются **активными стратегиями**. В игре 2х2 обе стратегии являются активными.

Ломанная B_1NB_2 на рисунке 2 является нижней границей выигрыша игрока *A*. Точка *N*, в которой он максимален, определяет цену игры и её решение.

В рассмотренном выше случае решение игры определяется точкой пересечения стратегий. Однако не всегда бывает так.

Рассмотрим другие возможные случаи.

1) Несмотря на наличие точки пересечения стратегий, решением игры являются чистые стратегии обоих игроков.

Рассмотрим ситуацию, представленную на рисунке 3. При выборе вторым игроком стратегии B_1, сравнивая A_1 и A_2, получим, что $a_{21} > a_{11}$, следовательно, первому игроку выгоднее выбрать стратегию A_2.

Рассмотрим стратегию B_2, сравнивая A_1 и A_2, получим, что $a_{22} > a_{12}$, выгоднее выбрать стратегию A_2.

В данном случае стратегия A_1 является заведомо невыгодной, так как при любой чистой стратегии противника она даёт меньший выигрыш, чем A_2. Следовательно, матрица имеет седловую точку (A_2, B_2), цена игры $\nu = a_{22}$. Таком образом, решением являются чистые стратегии игроков A_2 и B_2, решение в смешанных стратегиях относительно игрока A может быть представлено в виде $p^* = (0; 1)$.

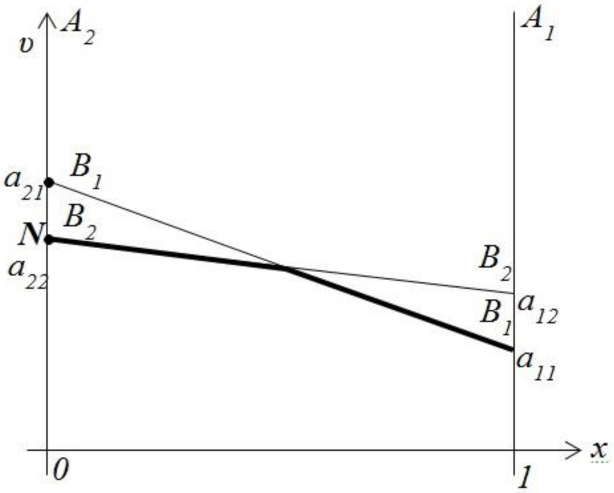

Рисунок 3 – Графическая интерпретация игры с седловой точкой (A_2, B_2)

2) Заведомо невыгодная стратегия имеется у противника.

На рисунке 4 представлен случай, когда нижняя граница выигрыша совпадает со стратегией B_1, стратегия B_2 является для второго игрока заведомо невыгодной. В данном случае игра имеет седловую точку (A_2, B_1), цена игры $v = a_{21}$, решение в смешанных стратегияхдля первого игрока $p^* = (0;1)$.

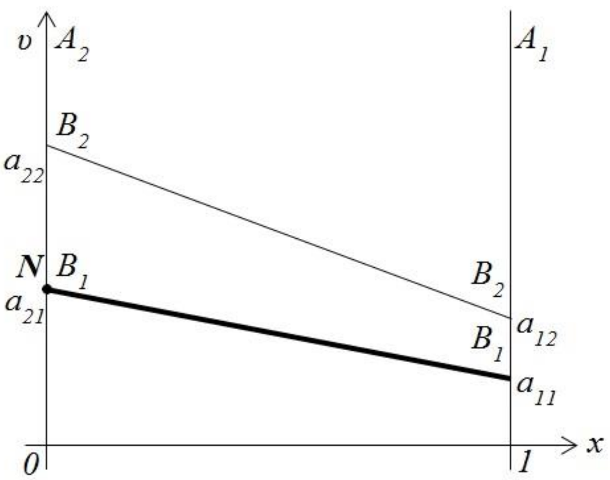

Рисунок 4 – Графическая интерпретация игры
с невыгодной стратегией B_2

Геометрическая интерпретация даёт возможность представить наглядно нижнюю и верхнюю цену игры: α – нижняя цена игры, β – верхняя цена игры (рисунок 5). Цена игры v всегда заключена между значениями α и β.

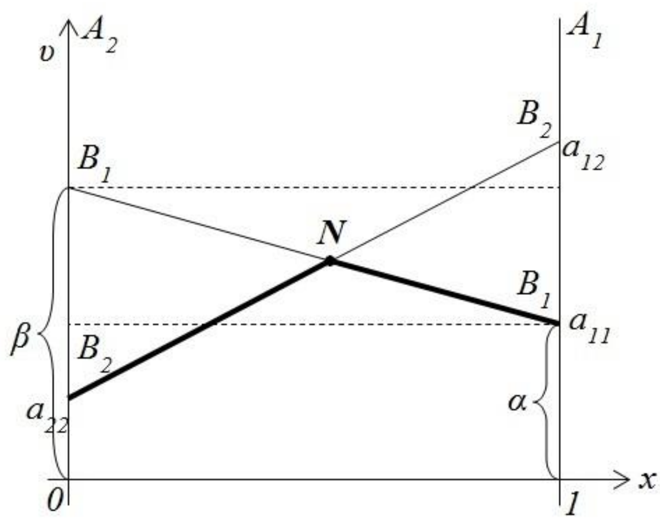

Рисунок 5 – Нижняя и верхняя цена игры

Пример 7. Решите матричную игру $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Проверим наличие седловой точки (таблица 7).

Таблица 7 – Нахождение нижней и верхней цены игры

A\B	***B₁***	***B₂***	**Минимум по трокам,** α_i
A_1	-2	3	-2
A_2	5	0	0
Максимум по столбцам, β_j	5	3	

Нижняя цена игры $\alpha=0$, верхняя цена игры $\beta=3$. Поскольку $\alpha<\beta$, то седловой точки нет.

Найдём решение игры в смешанных стратегиях. Пусть смешанная стратегия игрока A $p^*=(p,\ 1-p)$, где $0\le p\le 1$. Построим две прямые (рисунок 6):

B_1B_1: $v=-2p+5(1-p)$, т.е. $v=5-7p$;

B_2B_2: $v=3p+0(1-p)$, т.е. $v=3p$.

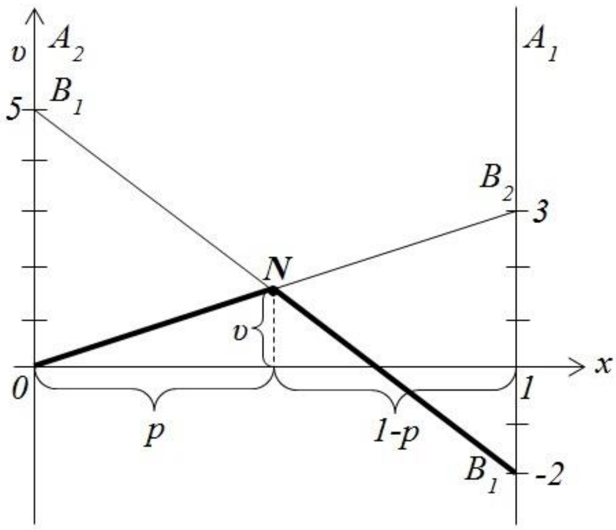

Рисунок 6 – Решение игры для первого игрока

Наивысшая точка N нижней огибающей определяет решение для первого игрока. Найдем координаты точки N, решив систему $\begin{cases} v = 5 - 7p, \\ v = 3p. \end{cases}$

Получим $N = (0{,}5;\ 1{,}5)$. Следовательно, смешанная стратегия первого игрока $p^* = (0{,}5;\ 0{,}5)$, выигрыш $v = 1{,}5$.

Для второго игрока ищем смешанную стратегию $q^* = (q,\ 1 - q)$, где $0 \le q \le 1$. Строим две прямые (рисунок 7):

A_1A_1: $v = -2q + 3(1 - q)$, т.е. $v = 3 - 5q$;

A_2A_2: $v = 5q + 0(1 - q)$, т.е. $v = 5q$.

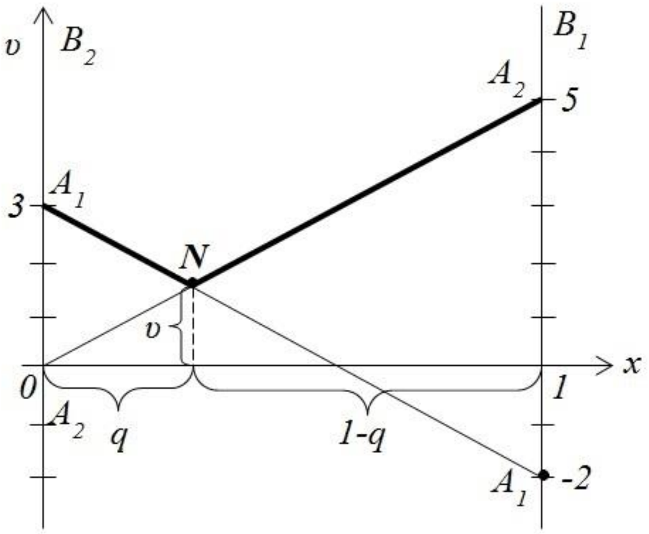

Рисунок 7 – Решение игры для второго игрока

Низшая точка N верхней огибающей определяет решение для второго игрока. Для нахождения ее координат, решим систему $\begin{cases} v = 3 - 5q, \\ v = 5q. \end{cases}$

Получим $N = (0{,}3;\ 1{,}5)$. Таким образом, смешанная стратегия второго игрока $q^* = (0{,}3;\ 0{,}7)$, выигрыш $v = 1{,}5$.

3.3 Графический метод решения игр 2×n в смешанных стратегиях

Рассмотрим игру 2×n с матрицей $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$.

На оси абсцисс *Ox* отложим отрезок, длина которого равна единице. Через концы отрезка проведем прямые, перпендикулярные оси *Ox*, на которых будем откладывать выигрыш при соответствующих чистых стратегиях. Прямая, проходящая через $x=0$, соответствует стратегии первого игрока A_2, а прямая, проходящая через $x=1$, – стратегии A_1. Внутренние точки отрезка $[0;1]$ будут соответствовать смешанным стратегиям $p^*=(p_1^*,\ p_2^*)$.

Для каждой из *n* стратегий игрока *B* построим соответствующий ей отрезок на плоскости. Если игрок *B* применяет стратегию B_1, то выигрыш при использовании первым игроком стратегий A_1 и A_2 составит соответственно a_{11} и a_{21}. Отложим эти точки на прямых и соединим их отрезком B_1B_1 (рисунок 8). Если игрок В применяет стратегию B_2, то выигрыш при использовании первым игроком стратегий A_1 и A_2 составит соответственно a_{12} и a_{22}. Отложим эти точки на прямых и соединим их отрезком B_2B_2.

Продолжая рассуждать аналогичным образом, отложим на прямых точки a_{1n} и a_{2n}, соответствующие выигрышам при использовании первым игроком стратегий A_1 и A_2, при условии применения стратегии B_n игроком *B*.

Определим нижнюю границу выигрыша, получаемого игроком *A*, которая состоит из частей отрезков, интерпретирующих стратегии игрока *B*, расположенных ниже всех отрезков (ломаная B_3NKB_2 на рисунке 8). Выделяем две активные стратегии игрока *B*, отрезки которых проходят через точку на нижней границе, соответствующей наибольшему выигрышу (точка *K*). Далее рассматриваются только эти две стратегии игрока В (стратегии B_1 и B_2 на рисунке 8). Игра сводится к игре с матрицей 2×2.

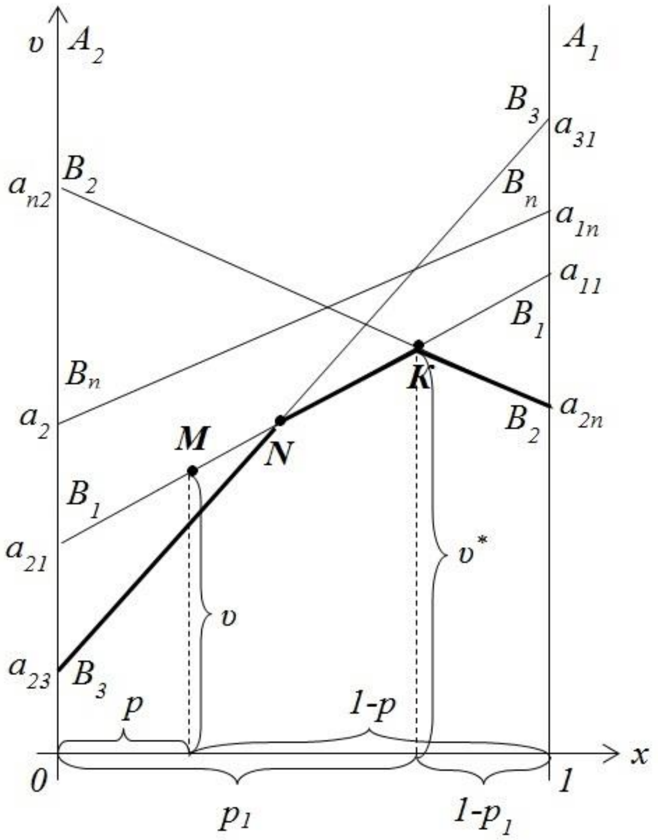

Рисунок 8 – Графическая интерпретация игры 2×n

Пример 8. Пусть игра задана матрицей $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти оптимальные стратегии игроков и определить цену игры.

Решение. Пусть смешанная стратегия игрока *A* $p^*=(p,\ 1-p)$, где $0 \le p \le 1$. Проведем прямые B_iB_i $(i=\overline{1,4})$ и построим ломаную линию, соответствующую нижней границе выигрыша.

B_1B_1: $v = p + 6(1-p) \Rightarrow v = 6 - 5p$;

B_2B_2: $v = 5p + 3(1-p) \Rightarrow v = 3 + 2p$.

B_3B_3: $v = 9p + 2(1-p) \Rightarrow v = 2 + 7p$;

B_4B_4: $v = 3p + 7(1-p) \Rightarrow v = 7 - 4p$.

Нижней границе выигрыша соответствует ломаная B_3MKB_1 (рисунок 9). Точка *K*, в которой эта ломаная достигает максимума, является пересечением прямых B_1B_1 и B_2B_2.

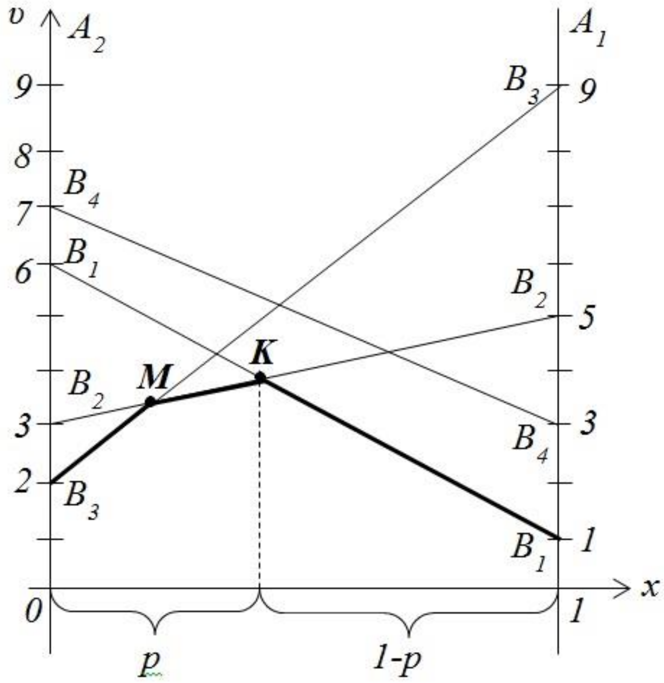

Рисунок 9 –Решение игры для первого игрока

Вычислим координаты точки *K*, решив систему $\begin{cases} v = 6 - 5p, \\ v = 3 + 2p. \end{cases}$

Получим $K\left(\frac{3}{7}, \frac{27}{7}\right)$ Следовательно оптимальная стратегия игрока *A* $p^* = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$, цена игры $v = \frac{27}{7}$.

Так как точка *K* является пересечением прямых B_1B_1 и B_2B_2, то полезными стратегиями игрока *B* будут стратегии B_1 и B_2. Найдем частоты их применения q_1 и q_2 ($q_3 = 0$, $q_4 = 0$), зная, что выигрыш равен цене игры, если игрок *B* применяет оптимальную стратегию, а игрок *A* – любую из своих полезных стратегий, например, стратегию A_1:

$$q_1 + 5(1 - q_1) = \frac{27}{7} \;\Rightarrow\; q_1 = \frac{2}{7},\; q_2 = 1 - q_1 = \frac{5}{7}.$$

Следовательно оптимальная стратегия игрока *B* $q^* = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, 0, 0\right)$.

3.4 Графический метод решения игр m×2 в смешанных стратегиях

Рассмотрим игру m×2 с матрицей $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$.

На оси абсцисс *Ox* отложим отрезок, длина которого равна единице. Через концы отрезка проведем прямые, перпендикулярные оси *Ox,* на которых будем откладывать выигрыш при соответствующих чистых стратегиях. Прямая, проходящая через $x=0$, соответствует стратегии второго игрока B_2, а прямая, проходящая через $x=1$, – стратегии B_1. Внутренние точки отрезка $[0;1]$ будут соответствовать смешанным стратегиям $q^*=(q_1^*,\ q_2^*)$.

Для каждой из *m* стратегий игрока *A* построим соответствующий ей отрезок на плоскости. Если игрок *A* применяет стратегию A_1, то выигрыш при использовании вторым игроком стратегий B_1 и B_2 составит соответственно a_{11} и a_{12}. Отложим эти точки на прямых и соединим их отрезком A_1A_1 (рисунок 10). Если игрок *A* применяет стратегию A_2, то выигрыш при использовании вторым игроком стратегий B_1 и B_2 составит соответственно a_{21} и a_{22}. Отложим эти точки на прямых и соединим их отрезком A_2A_2.

Продолжая рассуждать аналогичным образом, отложим на прямых точки a_{m1} и a_{m2}, соответствующие выигрышам при использовании вторым игроком стратегий B_1 и B_2, при условии применения стратегии A_m игроком *A*.

Определим нижнюю границу выигрыша, получаемого игроком *B,* которая состоит из частей отрезков, интерпретирующих стратегии игрока *A*, расположенных выше всех отрезков (ломаная A_1KA_3 на рисунке 10). Выделяем две активные стратегии игрока *A*, отрезки которых проходят через точку на верхней границе, соответствующей наименьшему проигрышу (точка *K*). Далее рассматриваются только эти две стратегии игрока *A* (стратегии A_1 и A_3 на рисунке 10). Игра сводится к игре с матрицей 2×2.

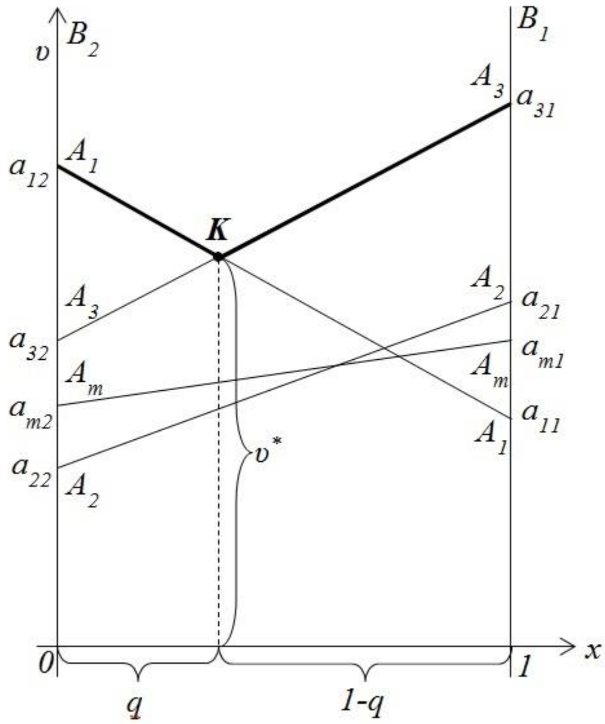

Рисунок 10 – Графическая интерпретация игры m×2

Пример 9. Пусть игра задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 9 & 6 \\ 6 & 8 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Найти оптимальные стратегии игроков и определить цену игры.

Решение. Воспользуемся тем, что игрок B располагает двумя чистыми стратегиями, и построим прямые $A_i A_i$ ($i = \overline{1, 4}$). Пусть смешанная стратегия игрока B $q^* = (q,\ 1-q)$, где $0 \le q \le 1$.

A_1A_1: $v = 11q + 2(1-q) \Rightarrow v = 2 + 9q$;

A_2A_2: $v = 9q + 6(1-q) \Rightarrow v = 6 + 3q$.

A_3A_3: $v = 6q + 8(1-q) \Rightarrow v = 8 - 2q$;

A_4A_4: $v = 0q + 10(1-q) \Rightarrow v = 10 - 10q$.

Верхней границе выигрыша соответствует ломаная A_4MKNA_1 (рисунок 11). Точка *K*, в которой эта ломаная достигает минимума, является пересечением прямых A_2A_2 и A_3A_3.

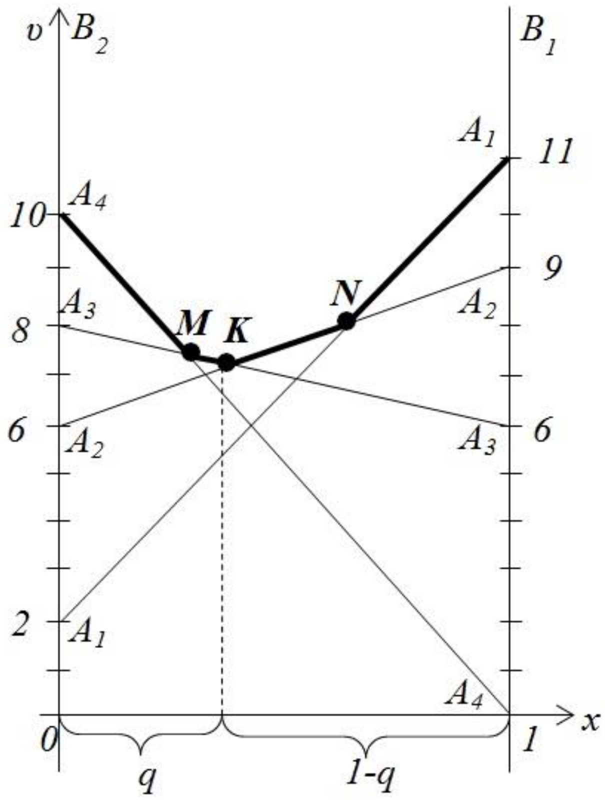

Рисунок 11 – Решение игры для второго игрока

Вычислим координаты точки *K*, решив систему $\begin{cases} v = 6 + 3q, \\ v = 8 - 2q. \end{cases}$

Получим $K\left(\frac{2}{5}, \frac{36}{5}\right)$ Следовательно оптимальная стратегия игрока *B* $q^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, цена игры $v = \frac{36}{5}$.

Так как точка *K* является пересечением прямых A_2A_2 и A_3A_3, то полезными стратегиями игрока *A* будут стратегии A_2 и A_3. Найдем частоты их применения p_2 и p_3 ($p_1 = 0$, $p_4 = 0$), зная, что выигрыш равен цене игры, если игрок A применяет оптимальную стратегию, а игрок B – любую из своих полезных стратегий, например, стратегию B_1:

$$6p_2 + 8(1 - p_2) = \frac{36}{5} \Rightarrow p_2 = \frac{2}{5},\ p_3 = 1 - p_2 = \frac{3}{5}.$$

Следовательно, для игрока A оптимальной стратегией является $p^* = \left(0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$.

4 Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Если матричную $m \times n$-игру нельзя свести к игре $2 \times n$ или $m \times 2$, то ее сводят к паре двойственных задач линейного программирования. Пусть платежная матрица первого игрока в игре двух игроков, имеющих соответственно m и n стратегий, имеет вид $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$; игра не имеет решения в чистых стратегиях; упрощением платежной матрицы $m \times n$-игру нельзя свести к игре $2 \times n$ или $m \times 2$. Построим пару двойственных задач линейного программирования для $m \times n$-игры.

Алгоритм перехода к паре задач линейного программирования

1) Ввести управляющие переменные ЗЛП: для первого игрока – компоненты вектора $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, удовлетворяющие условиям $p_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$; для второго – компоненты вектора $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, удовлетворяющие условиям $q_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

2) Целевой функцией для пары задач является цена игры $v = pAq^T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$. Для первого игрока она примет вид $v(p) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j\right) p_i$, для второго – $v(q) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i\right) q_j$.

3) Указать направление оптимизации целевой функции для каждого из игроков. Для первого игрока цель игры заключается в максимизации выигрыша, то есть в нахождении такой смешанной стратегии $p^* = \left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*\right)$, которая максимизировала бы цену игры первого игрока при любых действиях второго игрока. Поэтому направление оптимизации целевой функции первого игрока $v(p^*) \to \max$. Для второго игрока цель игры заключается в минимизации проигрыша, то есть в нахождении такой смешанной стратегии $q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_m^*\right)$, которая минимизировала бы цену игры второго игрока при любых действиях первого игрока. Поэтому направление оптимизации целевой функции $v(q^*) \to \min$.

4) Составить ресурсные ограничения для ЗЛП каждого из игроков. Ресурсные ограничения для ЗЛП первого игрока имеют вид $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i^* \ge v$ $\left(j = \overline{1, n} \right)$, так как применение первым игроком оптимальной стратегии дает выигрыш, не меньший цены игры. Применение вторым игроком оптимальной стратегии гарантирует проигрыш, не больший цены игры, следовательно, ресурсные ограничения для ЗЛП второго игрока имеют вид $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le v$ $\left(i = \overline{1, m} \right)$.

5) Составить задачи линейного программирования первого и второго игроков:

$$v(p^*) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) p_i^* \to \max, \qquad v(q^*) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \right) q_j^* \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i^* \ge v, \quad j = \overline{1, n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i^* = 1, \\ p_i^* \ge 0, \quad i = \overline{1, m}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le v, \quad i = \overline{1, m}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j^* = 1, \\ q_j^* \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

6) Исключить из целевых функций обоих игроков величины $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j\right)$ и $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i\right)$, которые меняются в зависимости от поведения игроков (так как меняются векторы $q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ и $p=(p_1, p_2, \dots, p_m)$). Для этого, предполагая, что $v>0$, разделить все соотношения систем ограничений обеих ЗЛП на v:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{p_i^*}{v} \ge 1, \quad j=\overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^*}{v} = \frac{1}{v}, \\ \frac{p_i^*}{v} \ge 0, \quad i=\overline{1,m}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{q_j^*}{v} \le 1, \quad i=\overline{1,m}, \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j^*}{v} = \frac{1}{v}, \\ \frac{q_j^*}{v} \ge 0, \quad j=\overline{1,n}. \end{cases}$$

Выполнить замену переменных: $\frac{p_i^*}{v} = x_i$ ($i=\overline{1,m}$), $\frac{q_j^*}{v} = y_j$ ($j=\overline{1,n}$). Так как $v(p^*) \to \max$ и $v(q^*) \to \min$, то $\frac{1}{v(p^*)} \to \min$ и $\frac{1}{v(q^*)} \to \max$. Обозначить $f(x)=\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^*}{v} = \frac{1}{v(p^*)}$, $g(y)=\sum_{j=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j^*}{v} = \frac{1}{v(q^*)}$, тогда ЗЛП игроков примут вид

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min, \qquad g(y)=\sum_{j=1}^{n} y_j \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, \quad j=\overline{1,n}, \\ x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,m}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, \quad i=\overline{1,m}, \\ y_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}. \end{cases}$$

Достаточно решить одну из задач (более удобную), а затем найти решение второй задачи с помощью теорем двойственности .

Решение исходной задачи ($m \times n$-игры) находят с помощью обратной замены переменных (x^* и y^* – решения пары прямой и двойственной ЗЛП):

$$v = \frac{1}{f(x^*)} \text{ или } v = \frac{1}{g(y^*)}, \quad p_i^* = x_i^* v \ (i=\overline{1,m}), \ q_j^* = y_j^* v \ (j=\overline{1,n}).$$

Если в исходной $m \times n$-игре $v=0$, то данную игру преобразовывают в игру с платежной матрицей $A'_{m\times n} = (a_{ij} + c)_{m\times n}$, где $c>0$. Такое преобразование позволит получить цену преобразованной игры $v' = v + c > 0$. Если в исходной $m \times n$-игре $v<0$, то при делении на v следует менять знак в неравенствах-ограничениях на противоположный.

5 Задания для самостоятельного решения

1. Найти оптимальные стратегии (возможно смешанные) и цену игры, заданной матрицей (при необходимости выполнить всевозможные упрощения):

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$,

е) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 1 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 20 \end{pmatrix}$, з) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. **Игра Моро**. Каждый из игроков A и B записывает одно из чисел 1, 4, 6 или 9. Затем они одновременно показывают написанное. Если оба числа оказались одинаковой четности, то игрок A выигрывает столько очков, какова сумма этих чисел. Если записанные числа разной четности, то выигрывает игрок B. Составить платежную матрицу, найти верхнюю и нижнюю цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

3. **«Веришь – не веришь»**. Имеются две карты: туз и двойка. Игрок A наугад вынимает одну из них, игрок B не видит, какую из карт вынул игрок A. Если A вынул туза, он заявляет «у меня туз» и требует у противника 1 рубль. Если игрок A вынул двойку, то он может либо сказать «у меня туз» и потребовать у противника 1 рубль, либо признаться, что у него двойка, и уплатить противнику 1 рубль. Противник, если ему добровольно платят рубль, может только принять его. Если же у него потребуют 1 рубль, то он может либо поверить игроку A, что у него туз, и отдать ему 1 рубль, или потребовать проверки с тем, чтобы убедиться, что утверждение игрока A верно. Если в результате проверки окажется, что у игрока A действительно туз, то B должен уплатить A 2 рубля. Если же окажется, что A обманывает B, то игрок A платит игроку B 2 рубля. Составить модель игры, найти оптимальные стратегии игроков.

4. Игроки A и B записывают цифры 1 и 2. Игра состоит в том, что кроме цифры 1 или 2 каждый игрок записывает еще и ту цифру, которую, по его мнению, записал партнер. Если оба игрока угадали или оба ошиблись, то партия заканчивается вничью. Если же угадал один, то он получает столько очков, какова сумма записанных им цифр. Составить платежную матрицу и решение игры.

5. Игрок *A* может записать одну из цифр: 2, 4 или 7. Игрок *B* может записать 1, 3, 4 или 8. Если обе цифры окажутся одинаковой четности, то игрок *A* получает столько очков, какова сумма записанных цифр. Если разной четности, то очки присуждаются игроку *B*. Составить платежную матрицу и решение игры.

6. Участники парной игры независимо друг от друга могут записать одну из цифр: 3, 5 или 8. Если разность между цифрами, записанными игроками *A* и *B* окажется положительной, то игрок *A* выигрывает столько очков, какова получившаяся разность. Если разность будет отрицательной, то соответствующее количество очков выигрывает игрок *B*. Если разность окажется равной нулю, то выигрыш игроков будет равен нулю. Составить платежную матрицу и найти решение игры.

7. «**Камень, ножницы, бумага».** Игроки одновременно называют один из предметов, причем «камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Игрок, который назовет выигрывающий предмет, выигрывает у противника очко. Если оба выберут одинаковые предметы, то игра заканчивается вничью. Составить платежную матрицу и найти решение игры.

8. «**Проблема полковника Блотто».** Две воюющие армии ведут борьбу за два пункта. Первая армия под командованием полковника Блотто состоит из четырех полков. Вторая под командованием капитана Киже – из трех полков. Армия, которая посылает больше полков на тот или иной населенный пункт, занимает его и уничтожает все направленные в этот пункт силы противника, получая по одному баллу как за занятый пункт, так и за каждый уничтоженный пункт противника. Требуется распределить силы так, чтобы получить максимальное количество баллов.

9. Два игрока *A* и *B*, не глядя друг на друга, кладут на стол по монете гербом вверх или вверх цифрой, по своему усмотрению. Если игроки выбрали одинаковые стороны (у обоих герб или у обоих цифра), то игрок *A* забирает обе монеты; иначе их забирает игрок *B*. Составить платежную матрицу, найти

верхнюю и нижнюю цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков. Найти решение игры.

10. Игроки A и B одновременно и независимо друг от друга записывают каждый одну из трех цифр: 1, 2 или 3. Если сумма записанных цифр четная, то игрок B платит игроку A эту сумму в рублях; если она нечетная, то, наоборот, A платит B эту сумму. Составить платежную матрицу, найти верхнюю и нижнюю цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков. Найти решение игры.

11. **Воздушный бой.** В распоряжении воюющей стороны A имеются 3 вида вооружения A_1, A_2, A_3; у противника B – 3 вида самолетов: B_1, B_2, B_3. Задача стороны A – поразить самолет; задача противника – сохранить его непораженным. При применении вооружения A_1 самолеты B_1, B_2, B_3 поражаются соответственно с вероятностями 0,9; 0,4 и 0,2; при вооружении A_2 – с вероятностями 0,3; 0,6 и 0,8; при вооружении A_3 – с вероятностями 0,5; 0,7 и 0,2. Составить платежную матрицу стороны A, найти верхнюю и нижнюю цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков. Найти решение игры.

12. **Дилемма узников.** Два узника находятся в предварительном заключении по подозрению в совершении преступления. При отсутствии прямых улик возможность их осуждения зависит от того, будут они молчать или заговорят. Если оба будут молчать, то наказанием будет лишь срок предварительного заключения (величина потерь (–1) для каждого). Если оба сознаются, то получат срок, учитывающий признание как смягчающее обстоятельство (потери каждого из узников составят (–6)). Если же заговорит один из узников, а другой будет молчать, то заговоривший будет выпущен на свободу (потери (0)), а сохраняющий молчание получит максимальное наказание (потери (–10)). Составить платежные матрицы для каждого из игроков, найти верхнюю и нижнюю цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков. Найти решение игры.

13. «**Студент и преподаватель**». Студент (игрок A) собирается сдавать зачет, который принимает преподаватель B. Если студент подготовился и

получил зачет, то его выигрыш на 1 больше выигрыша в ситуации, когда не готовился и получил зачет; на 2 единицы больше, чем когда не готовился и не получил (в этой ситуации выигрыш равен 0); и на 3 единицы больше, чем когда готовился и не получил. Выигрыш преподавателя равен 1, если зачет получил подготовленный студент, что на 2 больше выигрыша в ситуации, когда неподготовленный студент не получил зачет, на 3 больше выигрыша в ситуации, когда неподготовленному студенту удалось получить зачет, и на 4 больше выигрыша в ситуации, когда подготовленный студент не получил зачет. Составить платежные матрицы игроков.

6 Индивидуальные задания

Задание 1. Найти решение игры, заданной платёжной матрицей.

1.1 $A=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 20 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.2 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1.3 $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1.4 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1.5 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.6 $A=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 7 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 4 & 6 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

1.7 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.8 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.9 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.10 $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & 6 & 7 \\ -4 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 2. Игра задана платёжной матрицей *A*.

1) упростите платежную матрицу;
2) докажите, что игра не имеет решения в чистых стратегиях;
3) найдите решение игры в смешанных стратегиях.

2.1 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.2 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2.3 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.4 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2.5 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2.6 $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

2.7 $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

2.8 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.9 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.10 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 3. Найдите оптимальные стратегии и цену игры, заданной платежной матрицей. При этом платежная матрица для вариантов с 1-го по 5-й имеет вид A, для вариантов с 6-го по 10-й – вид $\widetilde{A}$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Значения коэффициентов платежной матрицы заданы в таблице 8.

Таблица 8 – Значения коэффициентов платежной матрицы (по вариантам)

Вариант / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	3	4	2	5	4	4	3	4	3	-2
a_{12}	4	3	5	4	3	7	2	1	4	3
a_{13}	5	2	3	3	6	–	–	–	–	–
a_{14}	2	3	4	7	4	–	–	–	–	–
a_{21}	7	5	3	4	5	9	4	2	2	4
a_{22}	6	2	2	2	6	3	-1	3	3	2
a_{23}	4	6	5	5	4	–	–	–	–	–
a_{24}	8	1	3	4	7	–	–	–	–	–
a_{31}	–	–	–	–	–	5	5	-1	5	3
a_{32}	–	–	–	–	–	9	3	2	3	5
a_{41}	–	–	–	–	–	6	2	3	4	2
a_{42}	–	–	–	–	–	9	4	5	2	4

Библиографический список

1 Литвин, Д.Б. Элементы теории игр и нелинейного программирования: учебное пособие / Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко, И.И. Мамаев. – Ставрополь: Сервисшкола, 2017. – 81 с.

2 Гадельшина, Г.А. Введение в теорию игр: учебное пособие / Г.А. Гадельшина, А.Е. Упшинская, И.С. Владимирова; М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2014. – 112 с.

3 Фомин, Г.П. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник для бакалавров / Г.П. Фомин. – М.: Издательство Юрайт, 2014. – 462 с.

4 Шелехова, Л. В. Теория игр в экономике: учебное пособие / Л. В. Шелехова – М.-Берлин: Директ-Медиа, 2015. – 119 с.

Учебное издание

Тихонова Оксана Валентиновна

Чихачева Ольга Александровна

ТЕОРИЯ ИГР

Часть 1

Учебное пособие

Подписано в печать___________Тираж _10_ экз.
Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53