Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

О.А. Чихачева, О.В. Тихонова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Учебное пособие

Рязань
2022

УДК 621.391.01
ББК 34.5:32.965я7
Ч–71

Чихачева, О.А.
Ч–71 Дискретная математика: учебное пособие. Часть 1 / О.А. Чихачева, О.В. Тихонова. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2022. – 48 с.

Данное учебное пособие предназначено для подготовки и проведения занятий по дисциплине «Дискретная математика». Пособие предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 27.03.04 Управление в технических системах всех форм обучения.

В пособии содержатся теоретические сведения, примеры решения задач по каждой теме, задания для решения на практическом занятии и для организации самостоятельной работы студентов.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

УДК 621.391.01
ББК 34.5:32.965я7

Содержание

Введение

«Дискретная математика» – одна из дисциплин учебного плана направлений подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 27.03.04 Управление в технических системах всех форм обучения.

Цель изучения данной дисциплины состоит в приобретении теоретических знаний о математических методах решения практических задач, отличающихся дискретностью изменения рассматриваемых процессов, а также навыков использования аналитических и вычислительных методов для освоения соответствующих разделов всех специальных и прикладных дисциплин.

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлениям подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 27.03.04 Управление в технических системах.

Пособие содержит теоретические сведения, примеры решения задач по каждой теме, задания для решения на практическом занятии и для организации самостоятельной работы студентов. В конце пособия приведен библиографический список.

Учебное пособие поможет студентам в изучении теоретического материала и приобретении навыков решения задач по дисциплине «Дискретная математика».

1 Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов различных конечных множеств.

1.1 Схема комбинаций без повторений

Пусть задана совокупность из n элементов. Из этой совокупности определенным образом выбрали k элементов. В этом случае говорят, что задана ***выборка длиной в k элементов из n элементов***.

Выборки могут формироваться по-разному. Различия обусловлены следующими причинами:

1) допускается ли в выборках повторение элементов;

2) учитывается ли в выборке порядок следования элементов.

Перестановками без повторений P_n называют выборки из n элементов длиной в n элементов ($k = n$) ***без повторений с учетом порядка.***

Формула для подсчета: $P_n = n!$.

Размещениями без повторений A_n^k называют выборки из n элементов длиной в k элементов ($1 \le k \le n$) ***без повторений с учетом порядка.***

Формула для подсчета: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Сочетаниями без повторений C_n^k называют выборки из n элементов длиной в k элементов ($0 \le k \le n$) ***без повторений и без учета порядка.***

Формула для подсчета: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1.2 Схема комбинаций с повторениями

Пусть имеется n элементов, из которых n_1 элементов принадлежит первому типу, n_2 – второму, и т.д., n_k – k-му типу, при этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, а элементы одного типа неразличимы между собой.

Выборки из этих n элементов длиной в $k = n$ элементов ***с повторениями и с учетом порядка*** называют ***перестановками с повторениями*** $\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots n_k,)$.

Формула для подсчета $\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots n_k,) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Выборки из n элементов длиной в k элементов ***с повторениями и с учетом порядка*** называют ***размещениями с повторениями*** $\overline{A}_n^k$. Здесь возможно, что $k > n$.

Формула для подсчета $\overline{A}_n^k = n^k$.

Выборки из n элементов длиной в k элементов ***с повторениями и без учета порядка*** называют ***сочетаниями с повторениями*** $\overline{C}_n^k$. Здесь возможно, что $k > n$.

Формула для подсчета $\overline{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$.

В большом количестве комбинаторных задач выборка формируется из неоднородного по составу множества. В этом случае исходное неоднородное множество целесообразно делить на однородные по составу подмножества, а получившуюся выборку – на соответствующие подвыборки. Также возможно, что каждая подвыборка формируется своим способом, либо все выборки имеют различную длину и при этом никакие две из них не могут быть сформированы одновременно. Для подсчета числа составных выборок используются правила умножения и сложения.

Правило умножения. Пусть необходимо выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе действие можно выполнить n_2 способами и т.д. до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то ***все*** k ***действий одновременно*** можно выполнить $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Правило сложения. Пусть необходимо выполнить k действий, причем никакие два из которых не могут производиться одновременно (действия попарно несовместны). Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие можно выполнить n_2 способами и т.д., k-е действие можно выполнить n_k способами, то ***хотя бы одно действие*** можно выполнить $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

Алгоритм решения комбинаторных задач

1. Определить длину исходной совокупности элементов.

2. Определить длину искомой выборки k.

3. Выяснить, целесообразно ли искомую выборку разбивать на подвыборки, и каковы параметры этих подвыборок?

4. Выяснить, допускается ли в выборках (подвыборках) повторение элементов?

5. Выяснить, учитывается ли в выборке (подвыборке) порядок следования элементов?

6. Выяснить, как, зная число подвыборок, получить число искомых выборок (какое правило требуется использовать: сложения или умножения)?

7. Вычислить число подвыборок, а затем число искомых выборок.

Пример 1. Имеются 3 различные книги: А, В и С. Сколькими различными способами их можно расставить на полке?

Решение. Длина исходной совокупности элементов $n = 3$. Длина искомой выборки $k = n = 3$. Так как все книги различны, то повторение элементов не допускается. Так как книги требуется расставить на полке, то порядок следования элементов в выборке важен. Таким образом, искомые выборки представляют собой перестановки без повторений, тогда число искомых выборок $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Следовательно, существует 6 способов расстановки книг.

Пример 2. Из трех различных книг А, В и С две отбирают на выставку. Сколько выставочных комплектов можно составить?

Решение. Длина исходной совокупности элементов $n = 3$. Длина искомой выборки $k = 2$. Так как все книги различны, то повторение элементов не допускается. Так как книги требуется отобрать на выставку, то важно, какие книги будут выбраны и не важно, в каком порядке отбирать книги, то есть порядок следования элементов в выборке не важен. Таким образом, искомые выборки представляют собой сочетания без повторений, тогда число искомых выборок $C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1} = 3$. Следовательно, можно составить 3 выставочных комплекта.

Пример 3. Имеется 5 карточек с буквами A, B, C, D, E. Сколько различных «слов», содержащих не более трех букв, можно из них составить?

Решение. Длина исходной совокупности элементов $n = 5$. По условию задачи каждое «слово» содержит либо 1, либо 2, либо 3 буквы, то есть имеется 3 искомых подвыборки, длины которых $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ и $k_3 = 3$. Так как все карточки различны, то повторение элементов в каждой подвыборке не допускается. Так как «слова» отличаются не только составом букв, но и порядком следования элементов, то в каждой подвыборке порядок следования элементов учитывается. Таким образом, искомые подвыборки представляют собой размещения без повторений. Вычислим число искомых подвыборок.

При $k_1 = 1$ получится $A_5^1 = \frac{5!}{(4-1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5$ «слов».

При $k_2 = 2$ получится $A_5^2 = \frac{5!}{(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\cdot 5 = 20$ «слов».

При $k_3 = 3$ получится $A_5^3 = \frac{5!}{(4-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$ «слов».

Так как «слово», составленное только из одной буквы не может содержать только две или только три буквы; «слово», составленное только из двух букв не может содержать только одну или только три буквы; «слово», составленное только из трех букв не может содержать только одну или только две буквы, то действия по составлению «слов» только из одной, только из двух и только из трех букв попарно несовместны. Поэтому для подсчета общего числа искомых выборок применяем правило сложения. Тогда число «слов», содержащих не более трех букв 5+20+60=85.

Пример 4. В конкурсе по пяти номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные по значимости призы; б) одинаковые по значимости призы.

Решение. Длина исходной совокупности элементов $n=10$. По условию задачи в каждой номинации может выиграть только один фильм. Поэтому длина искомой выборки $k=5$.

а) Пусть по каждой номинации установлены различные по значимости призы. В этом случае каждый из вариантов распределения призов отличается от других как составом фильмов, так и их порядком по номинациям (или и тем и другим), причем одни и те же фильмы могут повторяться несколько раз (каждый из фильмов может выиграть как в одной, так и в нескольких номинациях). Следовательно, искомая выборка представляет собой размещение с повторениями из 10 элементов по 5. Их число $\overline{A}_{10}^{5}=10^{5}=100\,000$.

б) Пусть по каждой номинации установлены одинаковые по значимости призы. Тогда порядок следования фильмов в комбинации пяти призеров значения не имеет, число вариантов распределения призов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5, которое равно $\overline{C}_{10}^{5}=\frac{(5+10-1)!}{5!(10-1)!}=2002$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1. Номер автомобиля состоит из 2-х букв и 4-х цифр. Сколько существует различных автомобильных номеров, если в алфавите 32 буквы?

2. Каким количеством способов могут 8 человек встать в очередь к театральной кассе?

3. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,4,6,7,8, если каждую цифру можно использовать в каждом числе один раз? Сколько среди этих чисел будет четных? Нечетных?

4. Из 12 кандидатов тренер отбирает 5 и составляет из них баскетбольную команду, в составе которой 1 центровой, 2 защитника и 2 нападающих. Каким количеством способов тренер может составить команду, если 2 кандидата могут играть только центровыми, 4 только в защите, а остальные – только в нападении?

5. Сколько чисел можно составить с использованием (всех или части) цифр 1,2,3,4,5, если каждое число должно содержать не более 3-х цифр? Сколько таких чисел получится, если повторение цифр в числе запрещено?

6. Каким количеством способов из 8 книг можно отобрать несколько, но не менее одной?

7. В пассажирском поезде 9 вагонов. Каким количеством способов можно рассадить в поезде четырех пассажиров, если все они должны ехать в разных вагонах?

8. Каким количеством способов 3 различных подарка А, В, С можно выдать трем из 15 лиц, если никто не должен получить более одного подарка? Если подарок А должно получить вполне определенное лицо?

9. Каким количеством способов из семи книг можно отобрать три и расставить их на полке?

10. Сколько чисел, содержащих цифру 3, заключено между 1 000 и 9 999?

11. Комплексная бригада состоит из 2-х маляров, 3-х штукатуров и 1-го столяра. Сколько различных бригад можно сделать из рабочего коллектива, в котором 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров?

12. Каким количеством способов из 8 человек можно избрать комиссию, состоящую из 5 человек?

13. Компания из 20 мужчин разделяется на 3 группы, в 1-ю входят 3 человека, во 2-ю – 5, и в 3-ю – 12. Каким количеством способов они могут это сделать?

14. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

15. Сколько различных десятизначных чисел можно образовать, используя по две цифры 2 и 5 и по три цифры 3 и 4?

16. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

17. Каким количеством способов можно выписать в ряд 6 плюсов и 4 минуса?

18. Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры числа 123 456 789, при условии, что в каждой такой перестановке как все четные цифры, так и все нечетные цифры будут идти в возрастающем порядке?

19. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров? (Предполагается, что телефонные номера могут начинаться и с нуля)?

20. Буквы некоторого алфавита составляются из точек, тире и пробелов. Сколько букв можно составить, если использовать для их организации:

а) ровно 5 символов; б) не более 5 символов?

21. Имеются 5 сортов цветов. Каким количеством способов из них можно составить букет, содержащий 7 цветков?

22. Лифт с 7-ю пассажирами останавливается на 10-ти этажах. На каждом этаже может выйти определенное число пассажиров от 0 до 7. Сколько различных способов освобождения лифта существует (считается, что различные способы различаются лишь числом людей, вышедших на данном этаже)?

23. Из города А в город В ведут 5 дорог, а из города В в город С – 3 дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из А в С?

24. В базе данных центра тестирования по каждой из пяти тем учебной дисциплины подобрано 10 различных заданий. Сколько вариантов теста можно сформировать на основании этой базы, если каждое задание может использоваться только один раз?

25. Бросают 3 игральные кости. Сколько существует возможных исходов бросания костей, при которых на всех костях выпадет различное число очков?

26. Из пункта А в пункт В ведут пять дорог. Колонну автомашин необходимо разделить на три части и направить по трем дорогам из имеющихся. Каким количеством способов можно выбрать эти дороги?

27. Каким количеством способов можно составить трехцветный полосатый флаг, если: а) имеется 5 различных цветов; б) из тех же 5 цветов, если одна из полос должна быть красной?

28. Сейфовый код состоит из 3-х цифр и 3-х букв латинского алфавита. Сколько кодовых комбинаций существует?

29. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?

30. Сколько существует способов расселить 8 студентов по трем комнатам: одноместной, трехместной и четырехместной?

Ответы: **1.** 10 240 000. **2.** $8!$. **3.** 720; 480; 240. **4.** 180. **5.** 155; 85. **6.** $\sum_{k=1}^{8} C_8^k$. **7.** 3 024. **8.** 2 730; 182. **9.** C_7^3. **10.** 3 990. **11.** $C_{15}^2 \cdot C_{10}^3 \cdot C_5^1$. **12.** C_8^5. **13.** $\frac{20!}{3!\cdot 5!\cdot 12!}$. **14.** 5 040. **15.** $\frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 3!}$. **16.** C_{16}^2. **17.** $\frac{12!}{2!\cdot 2!}$. **18.** $\frac{12!}{2!\cdot 2!}$. **19.** 10^7. **20. а)** 5^3; **б)** $\sum_{k=1}^{5} k^3$. **21.** $\frac{11!}{5!\cdot 6!}$. **22.** 8^{10}. **23.** 5^3. **24.** $(10!)^5$. **25.** 10. **26.** $\frac{7!}{5!\cdot 2!}$. **27. а)** 60; **б)** 20. **28.** $10^3 \cdot 26^3$. **29.** $C_{10}^2 \cdot C_8^3$. **30.** $\frac{8!}{1!\cdot 3!\cdot 4!}$.

1.4 Задания для самостоятельной работы

1. В автомашине 7 мест. Каким количеством способов 7 человек могут усесться в эту машину, если правами водителя обладают только 3 из них?

2. Пять мальчиков и пять девочек рассаживаются в ряд на 10 мест, причем мальчики садятся на нечетные, а девочки – на четные места. Каким количеством способов они могут это сделать?

3. В забеге участвуют 10 мальчиков. Каким количеством способов могут распределиться первые 3 места?

4. Сколько сигналов можно поднять на мачте, имея 4 флага различных цветов, если каждый сигнал должен состоять не менее, чем из двух флагов?

5. Сколько четырехзначных чисел можно составить, используя цифры 1,2,3,4,5, если: а) цифры не повторяются; б) цифры могут повторяться? Сколько в обоих случаях может получиться четных и нечетных чисел?

6. Энциклопедия состоит из 9 томов. Каким количеством способов ее можно поставить на полке в беспорядке (то есть когда не все тома поставлены в порядке следования их номеров)?

7. Каким количеством способов можно разместить учеников в классе, если присутствуют 26 человек, а мест 28?

8. Из колоды в 36 карт последовательно берется 4 карты. Сколько различных комбинаций при этом может получиться?

9. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин, если все уроки должны быть различны.

10. Подрядчику нужны 4 плотника. К нему с предложением услуг обратилось 10 человек. Каким количеством способов он может выбрать среди них 4?

11. На окружности выбрано 10 точек. Сколько можно провести хорд с концами в этих точках. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках. Сколько выпуклых десятиугольников. Каково число замкнутых ломаных линий с вершинами в этих точках?

12. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и 5 членов комиссии. Сколько различных комиссий может быть составлено?

13. Каким количеством способов можно расположить в один ряд 13 различных карт, если определенные 10 карт должны идти (не обязательно подряд) в заранее выбранном порядке?

14. Каким количеством способов можно выписать в ряд 9 троек и 6 пятерок?

15. Каким количеством способов можно расположить в один ряд 5 красных, 5 белых и 4 черных мяча так, чтобы мячи, лежащие на краях, были одного цвета?

16. Сколько существует различных телефонных номеров, если каждый номер содержит не более 7-ми цифр?

17. Код в секретном замке набирается с помощью 6 цифр. Сколько потребуется времени для перебора всех кодов, если один код устанавливается в среднем за 5 сек.?

18. R шаров нужно разместить по K ящикам. Каким количеством способов это можно сделать?

19. Сигнал составлен из 7 флагов (1 красный, 2 синих, 3 зеленых, 1 белый). Сколько различных сигналов можно составить?

20. Из списка в 5 различных наименований продуктов требуется купить не менее трех. Сколько продуктовых наборов может быть куплено?

Ответы: 1. $3!\cdot 6!$. **2.** $5!\cdot 5!$. **3.** 720. **4.** 60. **5. а)** 120, четных 48, нечетных 72; **б)** 4^5, четных $2^2\cdot 3^4$. **6.** $9!$. **7.** $\frac{28!}{2!}$. **8.** $\frac{36!}{32!}$. **9.** 55 440. **10.** C_{10}^4. **11.** C_{10}^2, C_{10}^3, 1, $\sum_{k=3}^{10} C_{10}^k$. **12.** C_{40}^7. **13.** $\frac{13!}{10!}$. **14.** $\frac{15!}{9!\cdot 6!}$. **15.** Если по краям красные или белые шары, то $\frac{12!}{3!\cdot 5!\cdot 4!}$; если по краям черные шары, то $\frac{12!}{5!\cdot 5!\cdot 2!}$. **16.** $\sum_{k=1}^{7} 7^k$. **17.** $6^{10}\cdot 5$ сек. **18.** $\frac{(R+K-1)!}{R!(K-1)!}$. **19.** $\frac{7!}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!}$. **20.** $C_5^3+C_5^4+C_5^5$.

2 Элементы теории графов

2.1 Основные понятия теории графов

Пусть дано некоторое множество X и множество отношений Γ, устанавливающих соответствие между каждым элементом множества X и некоторым подмножеством множества X.

Графом называют упорядоченную пару объектов $G = (X, \Gamma)$.

Граф называют ***конечным***, если множество X – конечное.

Элементы множества X называют ***вершинами графа*** и обозначают x_1, x_2, …, x_n.

Отношение, устанавливающее соответствие между вершинами графа x_i и x_j в направлении от x_i к x_j, называют ***дугой***.

Множество Γ называют ***множеством дуг графа***.

В виде графа можно изобразить сеть улиц в городе: вершины графа – перекрестки, дуги – улицы с разрешенным направлением движения (улицы могут быть с односторонним и двусторонним движением). В виде графа можно изобразить схему железных дорог или метро: вершины графа – станции, дуги – перегоны между ними (две вершины графа могут быть соединены несколькими дугами, идущими в одном направлении). В виде графа можно представить диаграмму причинно-следственной информации: вершины – основные факторы, дуги – взаимосвязи или влияние факторов.

Отношение, устанавливающее соответствие между вершинами графа x_i и x_j без указания направления, называют ***ребром***.

Ребром графа также называют пару дуг, устанавливающих соответствие между вершинами графа x_i и x_j в направлении от x_i к x_j и в направлении от x_j к x_i.

Граф, состоящий только из дуг, называют ***ориентированным графом*** (***орграфом***).

Граф, состоящий только из ребер, называют ***неориентированным*** (***полностью неориентированным***) ***графом.***

Граф, состоящий из дуг и ребер, называют ***смешанным графом***.

Дугу графа, у которой начальная и конечная вершины совпадают, называют ***петлей***.

Дуги графа называют ***кратными,*** если они соединяют две заданных вершины графа и идут в одном направлении.

Граф, содержащий кратные дуги, называют ***мультиграфом***.

Полностью неориентированный граф (орграф) называют ***полным***, если любые две его вершины соединены одним и только одним ребром (дугой).

В полном графе каждая вершина принадлежит одному и тому же числу ребер, так как она соединена со всеми остальными вершинами. Для задания полного графа достаточно знать число его вершин.

Существуют ***аналитический***, ***графический*** и ***матричные*** способы задания графа.

2.2 Аналитический способ задания графа

Введем обозначения: дуга, устанавливающая соответствие между вершинами графа x_i и x_j в направлении от x_i к x_j – $u_k = (x_i, x_j, k)$ или (x_i, x_j, k), x_i – начальная вершина, x_j – конечная вершина, k – номер дуги; петля – (x_i, x_i, k); ребро – $\bar{u}_k = (x_i, x_j, k)$.

Иногда и ребро, и дугу, устанавливающую соответствие между вершинами графа x_i и x_j в направлении от x_i к x_j, обозначают (x_i, x_j). Для неориентированных графов ребра (x_i, x_j, k) и (x_j, x_i, k) тождественны. Множество всех ребер полностью неориентированного графа будем обозначать $\overline{\Gamma}$.

При ***аналитическом способе задания графа*** указывают множества вершин X и дуг Γ обозначением и перечислением их элементов.

2.3 Графический способ задания графа

При ***графическом способе задания графа*** вершины изображают точками или окружностями и произвольным образом располагают на плоскости; дуги изображают отрезками и кривыми линиями со стрелками, ребра – отрезками и кривыми линиями. На рисунке указывают обозначения вершин и, по необходимости, нумерацию дуг.

Пример 5. Граф задан графически (рисунок 1).

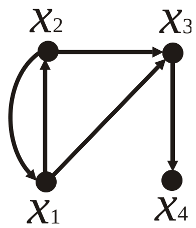


Рисунок 1 – Граф к примеру 5

Аналитически его можно задать соотношениями $G = (X, \Gamma)$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\Gamma = \{(x_1, x_2, 1), (x_2, x_1, 1), (x_1, x_3, 1), (x_2, x_3, 1), (x_3, x_4, 1)\}$.

Пример 6. Граф, изображенный на рисунке 2, можно аналитически задать соотношениями:

$$G = (X, \Gamma),\ X = \{x_1, x_2\},\ \Gamma = \{(x_2, x_1, 1), (x_2, x_1, 2), (x_2, x_1, 3), (x_1, x_1, 1)\}.$$

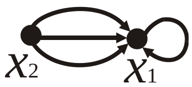


Рисунок 2 – Граф к примеру 6

Дуги, соединяющие его вершины x_2 и x_1, являются кратными. Дуга, исходящая из вершины x_1, является петлей.

При изображении графа по своему усмотрению можно располагать его вершины, выбирать форму дуг, в произвольной последовательности нумеровать кратные дуги. При нумерации дуг не требуется, чтобы были использованы все номера, начиная с единицы и до числа дуг между данными вершинами.

Поэтому один и тот же граф можно изобразить и аналитически задать по-разному.

Графы, построенные на одних и тех же множествах X и Γ, отличающиеся только обозначением и нумерацией вершин и дуг, называют ***изоморфными***.

Если при графическом задании граф можно представить в виде рисунка на плоскости, то граф называют ***плоским***.

Не любой граф на плоскости можно изобразить так, чтобы дуги пересекались только в вершинах (рисунок 3).

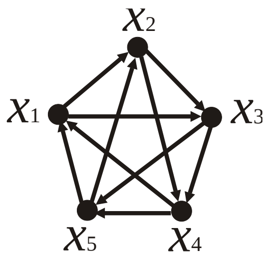


Рисунок 3 – Разновидность плоского графа

Граф $G = (X, \Gamma)$ называют ***симметрическим***, если для любых i и j из включения $(x_i, x_j, k) \in \Gamma$ следует включение $(x_j, x_i, k) \in \Gamma$ (рисунок 4 а).

Каждый симметрический граф однозначно определяет некоторый полностью неориентированный граф (рисунок 4 б).

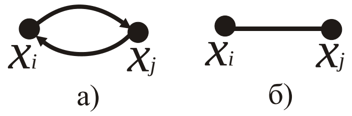


Рисунок 4 – Виды симметрических графов

2.4 Матричные способы задания графа

При большом числе элементов рисунок графа теряет наглядность. В таком случае его целесообразно задать матричным способом. Граф можно задать различными матрицами, выбор которых обусловлен особенностями конкретной задачи.

Вершины x_i и x_j графа называют ***смежными***, если они соединены дугой (ребром).

Матрицей смежности вершин $P = \left(p_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ ***орграфа*** называют квадратную матрицу n-го порядка, в которой n – число вершин графа; строки и столбцы матрицы соответствуют вершинам графа; элементы p_{ij} матрицы равны числу дуг, направленных из вершины x_i в вершину x_j.

Если орграф состоит из однократных дуг, то элементы его матрицы смежности вершин равны либо 0, либо 1. В случае неориентированного графа ему вместе с ребром $\left(x_i, x_j\right)$ принадлежит и ребро $\left(x_j, x_i\right)$, поэтому матрица неориентированного графа будет симметрической (то есть ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны). Справедливо и обратное утверждение: любой симметрической матрице с целыми неотрицательными элементами можно поставить в соответствие неориентированный граф.

Дуги u_i и u_j называют ***смежными***, если дуга u_i входит в вершину x_k, а дуга u_j выходит из нее.

Матрицей смежности дуг $Q = \left(q_{ij}\right)_{i,j=1}^{m}$ ***орграфа*** называют квадратную матрицу m-го порядка, в которой m – число дуг графа; строки и столбцы матрицы соответствуют дугам графа; элементы q_{ij} матрицы равны 1, если дуга u_i непосредственно предшествует дуге u_j, и 0 в остальных случаях.

Ребра $\bar{u}_i$ и $\bar{u}_j$ называют ***смежными***, если они имеют общую вершину.

Матрицей смежности ребер $Q = \left(q_{ij}\right)_{i,j=1}^{m}$ ***неориентированного графа*** называют квадратную матрицу m-го порядка, в которой m – число ребер графа; строки и столбцы матрицы соответствуют ребрам графа; элементы q_{ij} матрицы равны 1, если ребра $\bar{u}_i$ и $\bar{u}_j$ имеют общую вершину, и 0 в остальных случаях.

Матрица смежности ребер графа является симметрической.

Дугу $u \in \Gamma$ и вершину $x \in X$ называют ***инцидентными***, если вершина x является началом или концом дуги u.

Ребро $\bar{u} \in \Gamma$ и вершину $x \in X$ называют ***инцидентными***, если инцидентны вершина x и дуга $u \in \bar{u}$ (другими словами, вершина x является началом или концом ребра $\bar{u}$).

Матрицей инцидентности $R = \left(r_{ij}\right)_{i,\ j=1}^{n,\ m}$ ***орграфа*** называют прямоугольную матрицу размерности $n \times m$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – дугам орграфа, причем

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если дуга } u_j \text{ исходит из вершины } x_i; \\ -1, \text{ если дуга } u_j \text{ заходит в вершину } x_i; \\ 0, \text{ если дуга } u_j \text{ и вершина } x_i \text{ неинцидентны.} \end{cases}$$

В случае неориентированного графа элементами матрицы инцидентности будут только числа 0 и 1.

Таким образом, всякий граф можно задать одной из матриц смежности или матрицей инцидентности.

Пример 7. Для графа, изображенного на рисунке 5, найти матрицу смежности вершин, матрицу смежности дуг и матрицу инцидентности.

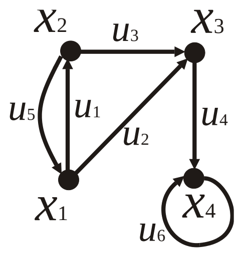


Рисунок 5 – Граф к примеру 7

Решение. Найдем матрицу смежности вершин. Граф, изображенный на рисунке 5, содержит четыре вершины, поэтому матрица смежности его вершин $P = \left(p_{ij}\right)_{i,\,j=1}^{n}$ будет четвертого порядка ($n = 4$). Граф является орграфом и состоит из однократных дуг. Смежными являются вершины x_1 и x_2, x_2 и x_3, x_3 и x_4, x_1 и x_3, x_2 и x_1, x_4 и x_4 (так как у вершины x_4 есть петля). Поэтому элементы матрицы смежности вершин p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{13}, p_{21} и p_{44} равны единице, а остальные – нулю.

Вычисления удобно проводить с помощью таблицы, у которой строки и столбцы выделенной части заполняют следующим образом: если вершины x_i и x_j являются смежными (соединены хотя бы одной дугой), то на пересечении строки x_i и столбца x_j пишут количество дуг, соединяющих вершины x_i и x_j (элемент p_{ij}); если же вершины x_i и x_j не являются смежными (не соединены ни одной дугой), то $p_{ij} = 0$.

Таблица 1 – Матрица смежности вершин

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	0
x_2	1	0	1	0
x_3	0	0	0	1
x_4	0	0	0	1

Выделенная часть таблицы представляет собой матрицу смежности вершин орграфа. Таким образом, матрица смежности вершин графа имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу смежности вершин. Всего в данном графе шесть дуг, поэтому матрица смежности дуг $Q = \left(q_{ij}\right)_{i,j=1}^{m}$ орграфа будет порядка $m = 6$. Смежными дугами при вершине x_1 являются дуги u_5 и u_1 (u_5 входит в вершину x_1, а u_1 выходит из нее), поэтому $q_{51} = 1$; а также – дуги u_5 и u_2, поэтому $q_{52} = 1$. Смежными дугами при вершине x_2 являются дуги u_1 и u_5, поэтому $q_{15} = 1$; а также – дуги u_1 и u_3, поэтому $q_{13} = 1$. Смежными дугами при вершине x_3 являются дуги u_2 и u_4, поэтому $q_{24} = 1$; а также – дуги u_3 и u_4, поэтому $q_{34}=1$. Смежными дугами при вершине x_4 являются дуги u_4 и u_6, поэтому $q_{46}=1$; а дуга u_6 является смежной сама себе, поэтому $q_{66}=1$. Остальные элементы равны нулю.

Вычисления элементов матрицы Q удобно выполнять в виде таблицы. Таблицу заполняют следующим образом: если две дуги u_i и u_j являются смежными при некоторой вершине x_k, то на пересечении строки u_i и u_j (элемент q_{ij}) пишут единицу; в противном случае – 0.

Таблица 2 – Матрица смежности дуг

u_i	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	0	0	1	0	1	0
u_2	0	0	0	1	0	0
u_3	0	0	0	1	0	0
u_4	0	0	0	0	0	1
u_5	1	1	0	0	0	0
u_6	0	0	0	0	0	1

Выделенная часть таблицы представляет собой матрицу смежности дуг графа. Тогда

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу инцидентности графа. Граф состоит из четырех вершин и шести дуг, поэтому его матрица инцидентности будет иметь размерность $n \times m = 4 \times 6$. Для вычисления ее элементов заполним вспомогательную таблицу: если дуга u_i заходит в вершину x_k, то на пересечении строки x_k и столбца u_i ставим (–1), элемент $r_{ki}=-1$; если дуга u_j исходит из вершины x_k, то на пересечении строки x_k и столбца u_j ставим 1, элемент $r_{kj}=1$; если дуга u_j и вершина x_k никак не связаны, то $r_{kj}=0$.

Например, дуга u_5 входит в вершину x_1, поэтому $r_{15}=-1$.

Таблица 3 – Матрица инцидентности

x_k \ u_i	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	1	1	0	0	–1	0
x_2	–1	0	1	0	1	0
x_3	0	–1	–1	1	0	0
x_4	0	0	0	1	0	–1; 1

Выделенная часть таблицы представляет собой матрицу инцидентности графа.

Тогда матрица инцидентности имеет вид $R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1;1 \end{pmatrix}$.

Пример 8. По заданной матрице смежности вершин $P=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ построить наглядное изображение графа.

Решение. Матрица смежности вершин графа не является симметрической и не содержит симметрических подматриц, следовательно, данный граф является орграфом (полностью ориентированным). Составим вспомогательную таблицу:

Таблица 4 – Матрица смежности вершин

x_k	x_1	x_2	x_3
x_1	0	2	1
x_2	1	1	0
x_3	0	1	0

Так как матрица P является матрицей смежности вершин и имеет размерность 3×3, то граф имеет три вершины. Найдем направления дуг. Так как $p_{11} = 0$, то вершина x_1 не является смежной сама себе, то есть граф не имеет петли в этой вершине. Так как $p_{12} = 2$, то вершину x_1 с вершиной x_2 соединяют две дуги. Так как $p_{13} = 1$, то вершину x_1 с вершиной x_3 соединяет одна дуга. Так как $p_{21} = 1$, то вершину x_2 с вершиной x_1 соединяет одна дуга. Так как $p_{22} = 1$, то вершина x_2 является смежной сама себе. Следовательно, граф имеет петлю у вершины x_2. Так как $p_{23} = 1$, то вершину x_3 с вершиной x_2 соединяет одна дуга. Остальные элементы третьей строки равны нулю, то есть других соединений нет. Расположим на плоскости вершины графа и соединим их стрелками, имеющими соответствующие направления. Получим искомый орграф (рисунок 6).

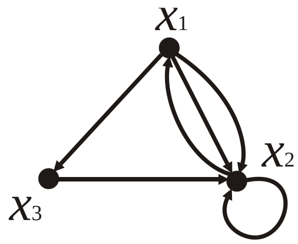


Рисунок 6 – Граф к примеру 8

2.5 Некоторые характеристики графов

Степенью вершины графа x_i называют число дуг (ребер), которым она принадлежит. Степень вершины обозначают $P(x_i)$.

Полустепенью захода $P^+(x_i)$ ***вершины*** x_i ***орграфа*** называют количество дуг, заходящих в вершину x_i.

Полустепенью исхода $P^-(x_i)$ ***вершины*** x_i ***орграфа*** называют количество дуг, исходящих из вершины x_i.

Для всякого орграфа $P(x_i) = P^+(x_i) + P^-(x_i)$.

Степени и полустепени вершин графа удобно находить по его графическому изображению непосредственным подсчетом или с помощью матрицы смежности вершин: полустепень захода вершины x_i определяют как сумму элементов i-го столбца матрицы P ($P^+(x_i)=\sum_{j=1}^{n} p_{ji}$), а полустепень исхода вершины x_i – как сумму элементов i-й строки матрицы P ($P^-(x_i)=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$).

Вершину орграфа x_i называют ***источником***, если $P^+(x_i)=0$.

Вершину орграфа x_i называют ***стоком***, если $P^-(x_i)=0$.

Вершину симметрического мультиграфа $G=(X,\Gamma)$ называют ***четной***, если она инцидентна четному числу ребер, и ***нечетной***, если она инцидентна нечетному числу дуг.

У четных вершин симметрического мультиграфа степень $P(x_i)$ является четным числом, у нечетных – нечетным.

Если конечный полный граф $G=(X,\Gamma)$, не имеющий петель, имеет n вершин и m ребер, то справедливо равенство $\sum_{i=1}^{n} P(x_i)=2m$.

Теорема. Число нечетных вершин конечного полного графа четно.

Пример 9. Для графа, изображенного на рисунке 2, полустепень исхода вершины x_2: $P^-(x_2)=3$, а полустепень захода вершины x_2: $P^+(x_2)=0$; полустепень исхода вершины x_1: $P^-(x_1)=1$, а полустепень захода вершины x_1: $P^+(x_1)=4$. Тогда степень вершины x_2: $P(x_2)=3$, степень вершины x_1: $P(x_1)=5$.

Рассмотрим некоторый мультиграф $G=(X,\Gamma)$.

Путем **в** ***мультиграфе*** $G = (X, \Gamma)$***, соединяющим вершины*** x_i ***и*** x_j, называют такую конечную последовательность его дуг $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $u_i \in \Gamma$, в которой для всех $i = \overline{1, m-1}$ дуга u_i заходит в некоторую вершину x_k, а дуга u_{i+1} исходит из нее; дуга u_1 исходит из вершины x_i, дуга u_m входит в вершину x_j.

Путь $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ называют ***контуром,*** если начальная и конечная вершины пути совпадают.

Путь $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ называют ***простым***, если из неравенства $i \neq j$ следует неравенство $u_i \neq u_j$ (при его прохождении каждая дуга встречается в нем не более одного раза, вершины могут повторяться).

Простой путь $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ называют ***элементарным***, если последовательность вершин $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ не содержит совпадающих элементов, кроме, может быть, крайних (при его прохождении каждая вершина, кроме, может быть, крайних, встречается в нем не более одного раза).

Пример 10. Для мультиграфа, изображенного на рисунке 7, например:

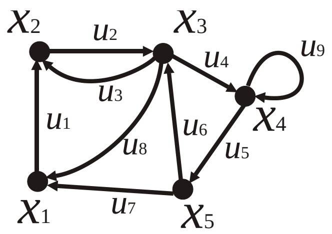


Рисунок 7 – Мультиграф к примеру 10

$\{u_1, u_2, u_3, u_2, u_4, u_9, u_5, u_6\}$ – путь;

$\{u_1, u_2, u_4, u_9, u_5, u_6\}$ – простой путь;

$\{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\}$ – элементарный путь;

$\{u_1, u_2, u_3, u_2, u_8\}$ – контур;

$\{u_1, u_2, u_3, u_1\}$ – элементарный контур.

Цепью **в** ***симметрическом мультиграфе*** $G = (X, \Gamma)$ называют такую последовательность $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m\}$, $\bar{u}_i \in \bar{\Gamma}$, ребер графа, что существует путь $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ в G, проходящий по этим ребрам (то есть удовлетворяющий условию $u_i \in \bar{u}_i$ для $i = \overline{1, m}$).

Цепь называют ***циклом***, если соответствующий ей путь является контуром.

Цепь называют ***простой*** (***элементарной***), если соответствующий ей путь является простым (элементарным).

Для любой цепи $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m\}$ $(m \geq 2)$ существует ровно один путь $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ такой, что $u_i \in \bar{u}_i$ для $i = \overline{1, m}$.

Мультиграф $G = (X, \Gamma)$ называют ***связным***, если для любых двух вершин $x_i, x_j \in X$ существует путь $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, соединяющий эти вершины. В противном случае граф называют ***несвязным***.

Пример 11. Графы, изображенные на рисунках 1–7 являются связными, а граф на рисунке 8 – несвязным.

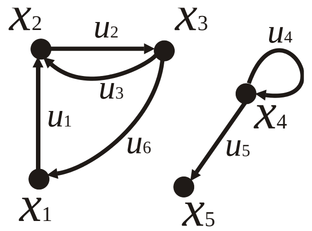


Рисунок 8 – Несвязный граф

Вершины x_i и x_j называют ***связными***, если существует путь $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, соединяющий эти вершины.

Дугу (ребро) u_k, соединяющую вершины x_i и x_j, называют ***мостом***, если в графе $G = (X, \Gamma)$ после удаления этой дуги (ребра) вершины x_i и x_j становятся несвязными.

Теорема. Дуга u_k, соединяющая вершины x_i и x_j является мостом тогда и только тогда, когда она является единственным путем, соединяющим вершины x_i и x_j.

Теорема. Ребро u_k, соединяющее вершины x_i и x_j является мостом тогда и только тогда, когда оно не принадлежит ни одному циклу.

2.6 Задачи, послужившие основой теории графов

Задача о кенигсбергских мостах (Л. Эйлер, 1736 г.). На рисунке 9 а схематически изображена карта города Кенигсберга, относящаяся к XVIII в. Город был расположен на берегах и двух островах реки Преголи (Прегель). Острова между собой и берегами были связаны семью мостами. Можно ли, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту только один раз?

Так как при решении задачи интересны только переходы по мостам, то план города можно представить в виде полностью неориентированного мультиграфа (рисунок 9 б). Вершины x_1 и x_4 соответствуют правому и левому берегам реки, вершины x_2 и x_3 – островам; ребра мультиграфа – мостам. На языке графов задача формулируется следующим образом: существует ли в мультиграфе простой цикл, содержащий все ребра?

Простой цикл, содержащий все ребра графа, называют ***эйлеровым циклом*** **(*циклом Эйлера*)**.

Другими словами, эйлеров цикл проходит по каждому ребру ровно один раз.

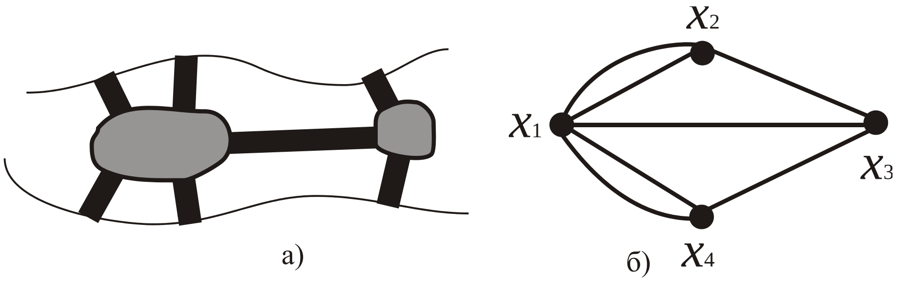


Рисунок 9 – Схема карты города Кенингсберга

Л. Эйлер сформулировал и доказал необходимое и достаточное условие того, чтобы в произвольном полностью неорентированном связном мультиграфе существовал эйлеров цикл.

Теорема. Эйлеров цикл в симметрическом связном мультиграфе существует тогда и только тогда, когда все его вершины являются четными.

Заметим, что в задаче о кенигсбергских мостах все вершины графа являются нечетными. Поэтому данная задача решения не имеет.

Граф, все вершины которого четны, называют ***эйлеровым графом***.

Простой путь, содержащий все ребра графа, называют ***эйлеровым путем*** **(*путем Эйлера*)**.

Теорема. У связного графа с двумя единственными нечетными вершинами существует эйлеров путь тогда и только тогда, когда этот путь начинается в одной из нечетных вершин и заканчивается в другой.

Задача о размещении экспозиции. Устроители больших художественных выставок часто вынуждены решать одну и ту же задачу: как организовать осмотр так, чтобы дать возможность в отведенное время ознакомиться с экспозицией наибольшему числу желающих. Для этого нужно расставить указатели таким образом, чтобы, перемещаясь в соответствии с предложенными в них рекомендациями, любой посетитель мог побывать у каждой картины ровно по одному разу. Возникает вопрос: можно ли найти общую методику организации осмотра выставки?

Если рассматривать стены и стенды, на которых размещены картины, как ребра, а точки поворотов как вершины, то помещение, в котором проводится выставка, будет представлять собой некоторый граф. Тогда задача об оптимальном размещении экспозиции сводится к построению на этом графе эйлерова цикла, если вход на экспозицию совпадает с выходом, и эйлерова пути, если вход и выход различны.

Алгоритм построения эйлерова цикла

1. Убедиться, что граф эйлеров.

2. Построить любой цикл. После построения возникают 2 возможности:

   а) в цикл входят все ребра, и тогда задача решена;

   б) на графе остались не пройденные ребра.

3. В построенном цикле найти вершину, из которой выходит еще не пройденное ребро (таких ребер должно быть четное число, если граф эйлеров).

4. Построить цикл из не пройденных ребер.

Алгоритм продолжать до тех пор, пока не будут пройдены все ребра.

Задача о коммивояжере (У.Р. Гамильтон). Район, который должен посетить бродячий торговец (коммивояжер), содержит некоторое количество городов, расстояния между которыми известны. Требуется найти маршрут, проходящий через все пункты по одному разу и возвращающийся в исходную точку. Если таких маршрутов несколько, то выбрать наиболее короткий из них.

Цепь, проходящую через каждую вершину полностью неориентированного графа $G=\left(X,\overline{\Gamma}\right)$ ровно по одному разу, называют ***гамильтоновой цепью***.

Цикл, проходящий через все вершины полностью неориентированного графа $G=\left(X,\overline{\Gamma}\right)$ ровно одному разу через каждую (за исключением исходной, совпадающей с последней), называют ***гамильтоновым циклом.***

Путь, проходящий через все вершины графа $G=\left(X,\overline{\Gamma}\right)$ ровно по одному через каждую, называют ***гамильтоновым путем.***

В терминах теории графов задача о коммивояжере равносильна задаче поиска на некотором полностью неориентированном графе элементарного гамильтонова цикла.

Задача поиска гамильтонова цикла является более сложной по сравнению с задачей поиска эйлерова цикла, так как, во-первых, пока не найдено достаточно общих теорем существования гамильтоновых циклов; во-вторых, пока не получено достаточно эффективных алгоритмов, позволяющих находить кратчайший путь, отличающихся по объему вычислений от простого перебора вариантов. Однако, доказано несколько утверждений, позволяющих определять наличие гамильтонова цикла у графа.

Теорема. Если степень каждой вершины графа $G=\left(X,\overline{\Gamma}\right)$, имеющего n вершин, удовлетворяет соотношению $P\left(x_i\right)\geq \frac{n}{2}$, то граф имеет гамильтонов цикл.

Теорема. Всякий полный граф является гамильтоновым.

К задаче о построении гамильтонова цикла сводится задача о выборе маршрута кругосветного путешествия или экскурсии по достопримечательностям города.

Задача о четырех красках (У. Кэли, 1878). Можно ли на политико-административной карте раскрасить страны так, чтобы никакие две страны, имеющие общую границу, не были раскрашены одинаковой краской, и чтобы были использованы всего 4 краски (если две страны граничат по точке, то считается, что они не имеют общей границы).

В терминах теории графов эта задача формулируется следующим образом. Дан произвольный полностью неориентированный плоский граф. Можно ли каждую его вершину раскрасить с помощью одной из четырех красок так, чтобы никакие две смежные вершины не были раскрашены в один цвет.

В общем виде эта задача до сих пор не решена. Доказано лишь, что такую раскраску можно осуществить для всех плоских графов с числом вершин, не превышающим 38. Общая теорема доказана для случая любого плоского графа и пяти красок.

Лабиринты. Задача о поиске выхода из лабиринта в терминах теории графов сводится к построению цепи, связывающей две данные вершины связного полностью неориентированного графа.

2.7 Деревья и сети

Сетью называют конечный связный орграф без циклов и петель, ориентированный в одном общем направлении от вершины I к вершине S.

Вершину I называют ***истоком*** **(*входом*)** сети.

Вершину S называют ***стоком*** **(*выходом*)** сети.

Вершины графа называют ***узлами сети***.

Пример 12. У сети, изображенной на рисунке 10, истоком является вершина x_1, а стоком – x_{10}.

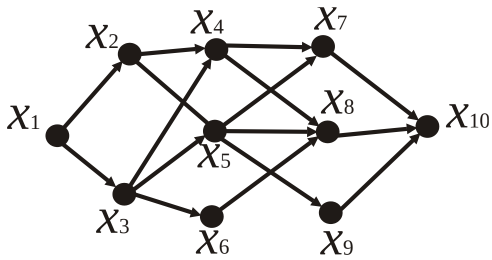


Рисунок 10 – Граф к примеру 12

Деревом называют сеть, имеющую ровно один исток x_1 (рисунке 11).

Вершину сети x_1, являющуюся истоком, называют ***корнем*** дерева.

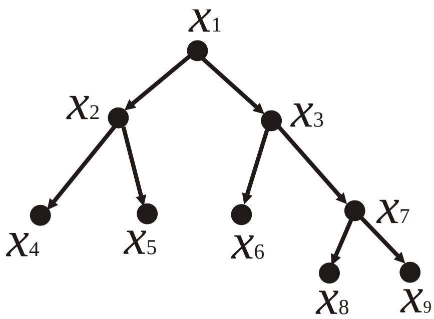


Рисунок 11 – Пример сети «дерево»

Для всякого дерева полустепень захода корня $P^{(+)}(x_1) = 0$.

Вершины дерева, для которых полустепени исхода равны нулю ($P^{(-)}(x_i) = 0$), называют ***крайними***.

Пути от исходной вершины к крайним называют ***ветвями***.

Теорема. Число вершин n и число ребер m любого дерева связаны равенством $n = m + 1$.

Всякое дерево является сетью, но не всякая сеть является деревом. У сети может быть несколько истоков, а у дерева – ровно один.

Остовным деревом называют граф без циклов, который содержит все вершины исходного графа.

Граф, каждому ребру (дуге) которого присвоено некоторое числовое значение, называют ***размеченным***.

Числовое значение в зависимости от смысла задачи может обозначать расстояние, пропускную способность, стоимость, время и т.п.

2.8 Понятие о сетях Петри

Сетями Петри называют математические модели дискретных динамических, в том числе информационных, систем, ориентированные на качественный анализ и синтез таких систем (обнаружение блокировок, тупиковых ситуаций и узких мест и др.).

Сеть Петри может быть представлена размеченным орграфом с множеством вершин двух типов ($T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ – конечное множество вершин, называемых ***переходами***, $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ – конечное множество вершин, называемых ***местами***), заданной функцией инцидентности вида

$$F(t_i, p_j) = \begin{cases} 1, \text{ если существует дуга из } t_i \text{ в } p_j, \\ 0, \text{ если нет дуги из } t_i \text{ в } p_j; \end{cases}$$

и

$$F(p_j, t_i) = \begin{cases} 1, \text{ если существует дуга из } p_j \text{ в } t_i, \\ 0, \text{ если нет дуга из } p_j \text{ в } t_i; \end{cases}$$

и начальной разметкой мест M_0. Вершины-места изображают кружками, разметку – соответствующим числом точек (фишек) в этих кружках. Вершины-переходы изображают прямоугольниками (рисунок 12).

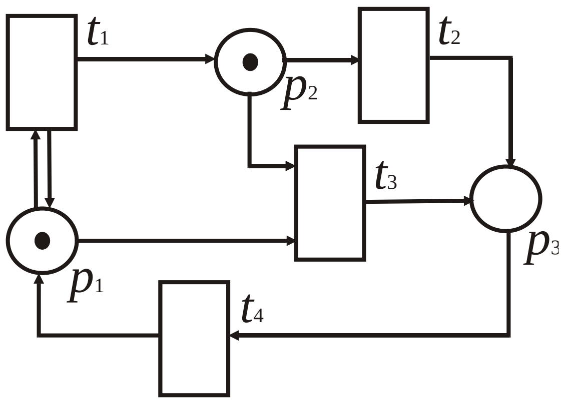


Рисунок 12 – Пример сети Петри

Сеть функционирует в дискретном времени от разметки к разметке. Смена разметок происходит в результате срабатывания переходов сети. Переход может сработать, если на предшествующем ему месте (входном месте) есть хотя бы одна фишка. Если может сработать несколько переходов, то срабатывает любой из них, следовательно, при одной и той же начальной разметке сеть Петри может порождать различные последовательности срабатываний переходов. Сеть останавливается, если при некоторой разметке не может сработать ни один переход. Последовательности срабатываний переходов называют ***языком*** данной сети Петри.

Сети Петри исследуют в двух направлениях. Первое (математическая теория) разрабатывает методы формального анализа их свойств (задачи распознавания тупиковых ситуаций, задачи распознавания эквивалентных по языкам сетей, оценки сложности анализа сетей и др.) Второе – применение сетей как основы дискретных динамических систем в информатике, экономике, цифровой технике и т.п.

2.9 Приложения теории графов

С использованием теории графов могут быть решены следующие задачи:

1) о соединении городов (задача о построении минимального остовного дерева);

2) о кратчайшем маршруте;

3) о пропускной способности сети дорог (задача о максимальном потоке);

4) о назначениях;

5) о выборе оптимальной стратегии поведения в условиях неопределенности.

Задача о соединении городов. Имеется n городов A_1, A_2, …, A_n, которые нужно соединить между собой сетью дорог. Стоимость строительства дороги A_iA_j известна и равна c_{ij}. Какой должна быть сеть дорог, чтобы стоимость ее строительства была минимальной?

В качестве величин c_{ij} также может выступать расстояние между городами, время, затрачиваемое на переезд и т.п. Величину c_{ij} называют длиной ребра.

В терминах теории графов задачу можно сформулировать следующим образом: используя n вершин A_1, A_2, …, A_n, построить граф, имеющий минимальную суммарную длину ребер.

Теорема. Граф, имеющий минимальную суммарную длину ребер, является минимальным остовным деревом.

В силу определения, минимальное остовное дерево не имеет циклов. В противном случае (то есть граф имеет цикл) можно удалить одно ребро графа, стоимость сети уменьшится, а города останутся соединенными. Число ребер графа, имеющего n вершин, должно быть $(n-1)$.

Алгоритм реализации

1. Составить список всех ребер графа в порядке возрастания их длины (стоимости).

2. Из списка всех ребер графа выбрать ребро с минимальной длиной и исключить его из списка всех ребер.

3. Из списка всех оставшихся ребер выбрать ребро, имеющее минимальную длину. При поиске добавляемого ребра надо перебирать все ребра, имеющие общую вершину с уже построенной сетью. Если при этом имеется несколько ребер одинаковой длины, то выбирают любое из них.

4. Проверить, чтобы выбранное ребро не образовывало цикла ни с одним из ранее выбранных ребер. Если цикл образуется, то исключить данное ребро из общего списка ребер и перейти к следующему ребру. Если цикл не образуется, то включить данное ребро в минимальное остовное дерево и исключить из общего списка ребер.

5. Пункты 3, 4 данного алгоритма повторять до тех пор, пока число ребер в списке, составляющем минимальное остовное дерево, станет равным $n-1$.

6. Стоимость построенной сети вычислить по формуле $C = \sum_{i=1}^{n-1} c_{ij}$.

Пример 13. Сетью дорог нужно соединить города A, B, D и F. Стоимость строительства дорог, соединяющих любые два города, известна и в условных денежных единицах приведена в таблице 5. Найти самую дешевую сеть соединения городов и ее стоимость.

Таблица 5 – Стоимость строительства дорог

Города	*A*	*B*	*D*	*F*
A	–	11	13	12
B	11	–	6	9
D	13	6	–	10
F	12	9	10	–

Решение. Надо соединить четыре города, следовательно, сеть дорог будет состоять из трех ребер.

1) Список ребер и их стоимостей представлен в условии в таблице.

2) Ребро минимальной длины BD, $c_{BD} = 6$.

3) Из оставшихся ребер минимальную длину имеет BF, $c_{BF} = 9$.

4) При соединении ребер BD и BF цикл не образуется. Соединены города *D*, *B*, *F*. Так как в построенном минимальном остовном дереве только два ребра BD и BF, то продолжим поиск.

5) Ребро минимальной длины из оставшихся ребер FD ($c_{FD} = 10$) не подходит, так как BDF – цикл, а город *A* не соединен. Исключаем из общего списка ребро FD и выбираем ребро AB, которое имеет минимальную длину из оставшихся ребер ($c_{AB} = 11$) и не образует цикла с ребрами, включенными в минимальное остовное дерево.

Таким образом, искомая сеть дорог состоит из звеньев *AB*, *BF* и *BD* (рисунок 13), ее стоимость $C = c_{AB} + c_{BF} + c_{BD} = 11 + 9 + 6 = 26$ ден. ед.

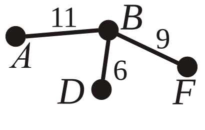


Рисунок 13 – Граф к примеру 13

Задача о кратчайшем маршруте. Задана сеть дорог, соединяющая несколько населенных пунктов, расстояния между которыми известны. Требуется найти наиболее короткий (оптимальный) маршрут из одного заданного города в другой.

Вместо расстояний между населенными пунктами могут быть известны стоимости доставки единицы груза из пункта в пункт, время, затрачиваемое на переезд из пункта в пункт.

В терминах теории графов задачу можно сформулировать следующим образом: между двумя заданными вершинами графа найти цепь с минимальной длиной ребер.

Данная задача может быть решена методом динамического программирования с минимизируемой целевой функцией, выражающей стоимость затрат на перевозку единицы груза из начального пункта в пункт назначения.

Пример 14. Найти наиболее экономный маршрут перевозки груза из города A_1 в город A_{10} и стоимость перевозки для сети дорог, показанной на рисунке 14. Над ребрами сети указаны стоимости перевозки единицы груза из одного города в другой (в денежных единицах).

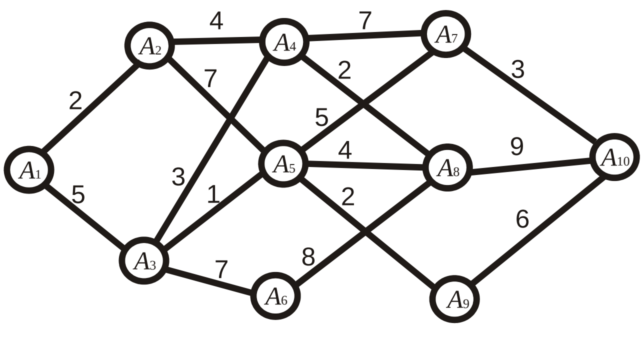


Рисунок 14 – Граф к примеру 14

Решение. Математическая модель задачи. Система **S**: транспорт с грузом, который нужно переместить из пункта A_1 в пункт A_{10}, и сеть дорог, соединяющая эти пункты.

Представим процесс перевозки груза как многошаговый процесс. Для этого сгруппируем населенные пункты следующим образом. К группе x_0 отнесем пункт A_1, к группе x_1 все пункты, в которые можно попасть из A_1, то есть A_2 и A_3. К группе x_2 – все пункты, куда можно попасть из A_2 и A_3, то есть A_4, A_5, A_6. В группу x_3 – все, куда можно попасть из A_4, A_5, A_6, то есть A_7, A_8, A_9. К группе x_4 – пункт A_{10}. Результат группировки удобно представить в виде таблицы 6.

Таблица 6 – Группы населенных пунктов

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
A_1	A_2	A_4	A_7	A_{10}
	A_3	A_5	A_8	
		A_6	A_9	

Тогда движение транспорта с грузом из пункта A_1 в пункт A_{10} можно представить как N- шаговый процесс: на первом шаге груз перемещают из пункта группы x_0 в пункт группы x_1; на втором шаге – из пункта группы x_1 в пункт группы x_2; на третьем шаге – из пункта группы x_2 в пункт группы x_3; на четвертом шаге – из пункта группы x_3 в пункт группы x_4.

Таким образом, формирование наиболее экономного маршрута может быть реализовано за $N = 4$ шага.

Составленная таблица содержит сведения о множестве состояний x_i – множестве местонахождений транспорта с грузом в некотором пункте группы с номером i. Множество начальных состояний $x_0 = \{A_1\}$. Множество конечных состояний $x_4 = \{A_{10}\}$. Множество состояний в начале i-го шага: $x_{i-1} = \{A_{k_{i-1}}\}$ – множество пунктов группы с номером $(i-1)$ (откуда выезжает транспорт с грузом).

Управление u_i на i-м шаге: выбор дороги $(A_{k_{i-1}}, A_{j_i})$, по которой следует направить груз из данного населенного пункта в соседний в общем направлении к пункту A_{10}. Множество состояний в конце i-го шага: $x_i = \{A_{j_i}\}$ – множество пунктов группы с номером i (куда прибывает транспорт с грузом в результате принятого управления). Целевая функция $z_i(x_{i-1}, u_i)$ на i-м шаге – затраты на перевозку единицы груза из данного пункта в выбранный соседний пункт.

Рекуррентные соотношения Р. Беллмана имеют вид

$$\begin{cases} F_i(x_{i-1}, u_i) = \min\limits_{u_i} \{z_i(x_{i-1}, u_i) + F_{i+1}(x_i)\}, \ i = \overline{1, 3}, \\ F_4(x_3, u_4) = \min\limits_{u_4} \{z_4(x_3, u_4)\}. \end{cases}$$

Воспользуемся алгоритмом метода динамического программирования.

Условная оптимизация

1. На четвертом шаге требуется найти условно оптимальные значения целевой функции при транспортировке груза из пунктов группы $x_3 = \{A_7, A_8, A_9\}$ в A_{10}. Тогда управление u_4 – выбор дороги для доставки. Условно оптимальные значения целевой функции равны затратам при передвижении по этим дорогам. Целевая функция однозначна на каждом шаге. Вычисления запишем в таблицу 7.

Таблица 7 – Перемещение на четвертом шаге

x_3	u_4	x_4	$z_4(x_3, u_3) = F_4(x_3)$
A_7	(A_7, A_{10})	A_{10}	3
A_8	(A_8, A_{10})	A_{10}	9
A_9	(A_9, A_{10})	A_{10}	6

2. На третьем шаге требуется найти условно оптимальные значения целевой функции при транспортировке груза из пунктов группы $x_2 = \{A_4, A_5, A_6\}$ в A_{10}, причем путь из пунктов группы $x_3 = \{A_7, A_8, A_9\}$ в A_{10} уже оптимизирован и представлен в последнем столбце таблицы 7. Вычисления запишем в таблицу 8.

Таблица 8 – Перемещение на третьем шаге

x_2	u_3	x_3	$z_3(x_2, u_3)$	$F_4(x_3)$	$z_3(x_2, u_3)+F_4(x_3)$	$F_3(x_2)$
A_4	(A_4, A_7)	A_7	7	3	10	10
	(A_4, A_8)	A_8	2	9	11	
A_5	(A_5, A_7)	A_7	5	3	8	8
	(A_5, A_8)	A_8	4	9	13	
	(A_5, A_9)	A_9	2	6	8	8
A_6	(A_6, A_8)	A_8	8	9	17	17

3. На втором шаге требуется найти условно оптимальные значения целевой функции при транспортировке груза из пунктов группы $x_1 = \{A_2, A_3\}$ в A_{10}, причем путь из пунктов группы $x_2 = \{A_4, A_5, A_6\}$ через пункты группы $x_3 = \{A_7, A_8, A_9\}$ в A_{10} уже оптимизирован и представлен в последнем столбце таблицы 8. Вычисления запишем в таблицу 9.

Таблица 9 – Перемещение на втором шаге

x_1	u_2	x_2	$z_2(x_1, u_2)$	$F_3(x_2)$	$z_2(x_1, u_2)+F_3(x_2)$	$F_2(x_1)$
A_2	(A_2, A_4)	A_4	4	10	14	14
	(A_2, A_5)	A_5	7	8	15	
A_3	(A_3, A_4)	A_4	3	10	13	
	(A_3, A_5)	A_5	1	8	9	9
	(A_3, A_6)	A_6	7	17	17	

На первом шаге требуется найти условно оптимальные значения целевой функции при транспортировке груза из пункта A_1 в пункт A_{10}, причем путь из пунктов группы $x_1 = \{A_2, A_3\}$ через пункты групп $x_2 = \{A_4, A_5, A_6\}$ и $x_3 = \{A_7, A_8, A_9\}$ в A_{10} уже оптимизирован и представлен в последнем столбце таблицы 9. Вычисления запишем в таблицу 10.

Таблица 10 – Перемещение на первом шаге

x_0	u_1	x_1	$z_1(x_0, u_1)$	$F_2(x_1)$	$z_1(x_0, u_1)+F_2(x_1)$	$F_1(x_0)$
A_1	(A_1, A_2)	A_2	2	14	16	
	(A_1, A_3)	A_3	5	9	14	14

Этап условной оптимизации завершен.

Безусловная оптимизация

Проанализируем результаты вычислений. Согласно таблице 10 получаем, что минимальная стоимость перевозки груза из пункта A_1 в пункт A_{10} равна $F_1(x_0)=14$ ден. ед. Этой стоимости соответствует дорога (A_1, A_3). В таблице 9, в строке A_3, находим минимальную стоимость перевозки на оставшемся пути $F_2(x_1)=9$ ден. ед., ей соответствует дорога (A_3, A_5). В таблице 8, в строке A_5, минимальной стоимости оставшегося пути $F_3(x_2)=8$ ден. ед. соответствует две дороги (A_5, A_7) или (A_5, A_9). В таблице 7 строке A_7 соответствует минимальная стоимость оставшегося пути $F_4(x_3)=3$ ден. ед. и дорога (A_7, A_{10}), а строке A_9 – минимальная стоимость $F_4(x_3)=6$ ден. ед. и дорога (A_9, A_{10}).

Минимальная стоимость перевозки груза из пункта A_1 в пункт A_{10} 14 денежных единиц. Наиболее экономные маршруты: $A_1 \to A_3 \to A_5 \to A_7 \to A_{10}$ и $A_1 \to A_3 \to A_5 \to A_9 \to A_{10}$.

2.10 Задания для решения на практическом занятии

1. Для графов, изображенных на рисунках 1-2, найти матрицу смежности вершин, матрицу смежности дуг, матрицу инцидентности, построить по два изоморфных графа.

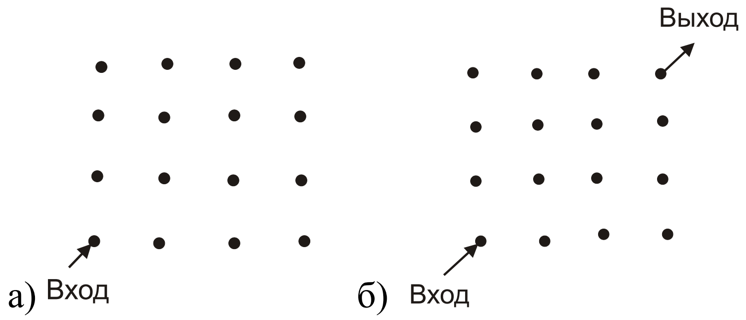
2. Для графов, изображенных на рисунках 3, 4, 7, 8 найти: матрицу смежности вершин; полустепени захода и исхода вершин; степени вершин; матрицу смежности дуг, матрицу инцидентности; задать графы аналитически, построить по два изоморфных графа.

3. Построить наглядное изображение графа, если задана матрица инцидентности:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Указать, какие из графов, изображенных на рисунках 1–11, допускают построение гамильтонова цикла или эйлерова цикла. Ответ обосновать.

5. Составить план обхода экспозиции (точки – это пункты поворота).



6. Построить наглядное изображение графа, если задана:

1) матрица смежности вершин; 2) матрица смежности дуг:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Торговец, живущий в городе A, намерен посетить города B, C и D, расстояния между которыми ему известны: $c_{AB} = 11$, $c_{AC} = 13$, $c_{BC} = 6$, $c_{BD} = 9$, $c_{AD} = 17$, $c_{CD} = 10$. Требуется указать кратчайший циклический маршрут из города A, проходящий через три других города.

8. Телефонная компания планирует соединить подземным кабелем 6 городов, расстояния между которыми заданы в таблицах 11, 12. Найти минимальную длину кабеля, позволяющую жителям любых двух городов связаться друг с другом по телефону.

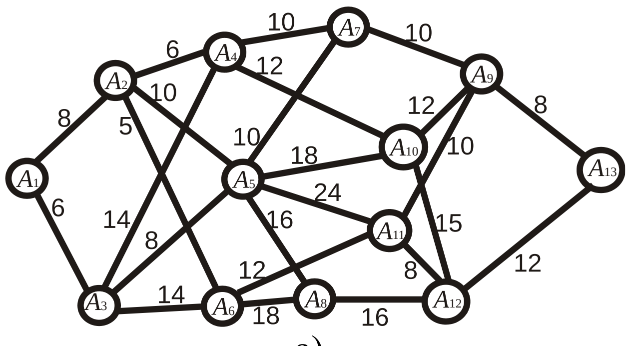
Таблица 11 – Исходные данные к заданию 8а

а)	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A		10	9	30	27	20
B	10		15	18	17	20
C	9	15		25	21	16
D	30	18	25		8	17
E	27	17	21	8		13
F	20	20	16	17	13	

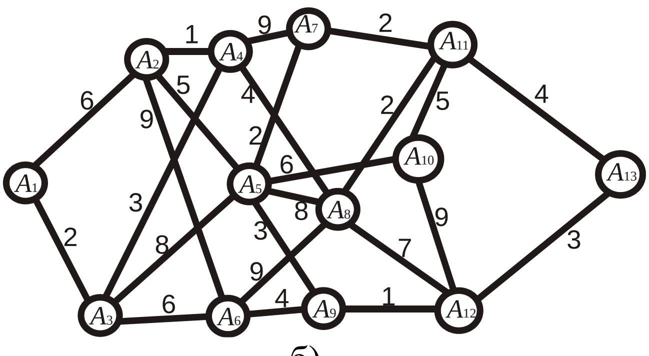
Таблица 12 – Исходные данные к заданию 8б

б)	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A		12	9	10	27	10
B	12		5	18	17	25
C	9	5		15	11	13
D	10	18	15		8	17
E	27	17	11	8		4
F	10	25	13	17	4	

9. Найти наиболее экономный маршрут перевозки груза из города в город и стоимость перевозки (ден. ед.) для сети дорог, показанных на рисунке.



а)



б)

Рисунок 15 – Исходные данные к заданию 9

Ответы: 7. *ACDBA* или *ABDCA* длиной 43. **9. а)** $A_1A_2A_4A_7A_{11}A_{13}$, $A_1A_3A_5A_7A_{11}A_{13}$, 42; **б)** $A_1A_3A_4A_8A_{11}A_{13}$, 15.

2.11 Задания для самостоятельной работы

1. Задать аналитически граф, изображенный на рисунке 6, найти его матрицу смежности дуг и матрицу инцидентности.

2. Построить наглядное изображение графа, если задана:

1) матрица смежности вершин; 2) матрица смежности дуг:

$$
а) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ б) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ в) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ г) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
$$

3. Для графа, изображенного на рисунке, найти матрицу смежности вершин, матрицу смежности дуг, матрицу инцидентности, полустепени захода и исхода вершин, степени вершин.

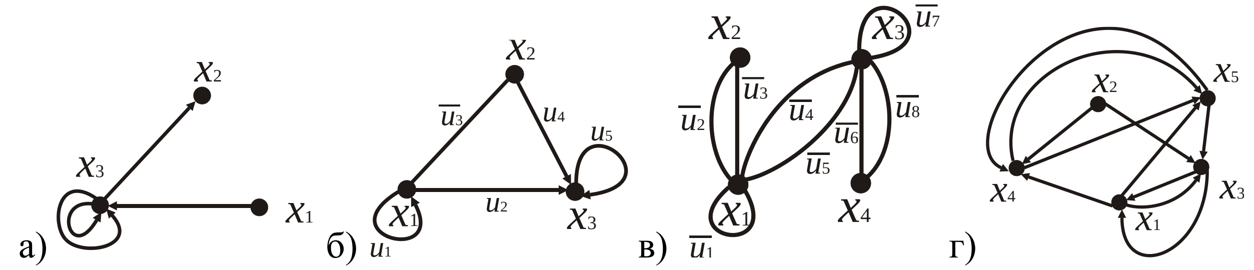


Рисунок 16 – Исходные данные к заданию 3

4. Построить гамильтонов цикл или гамильтонову цепь на следующих графах (рисунок 17).

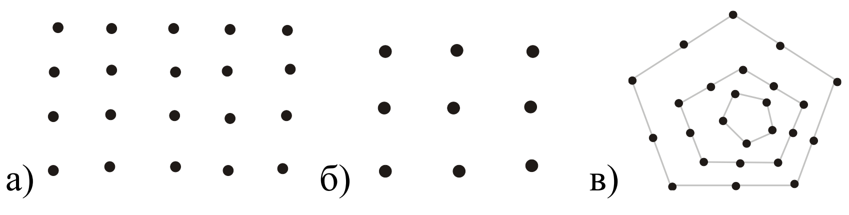


Рисунок 17 – Исходные данные к заданию 4

5. Построить гамильтонову цепь или гамильтонов цикл в задаче «ход конем» на поле:

а) 8 на 8 клеток;

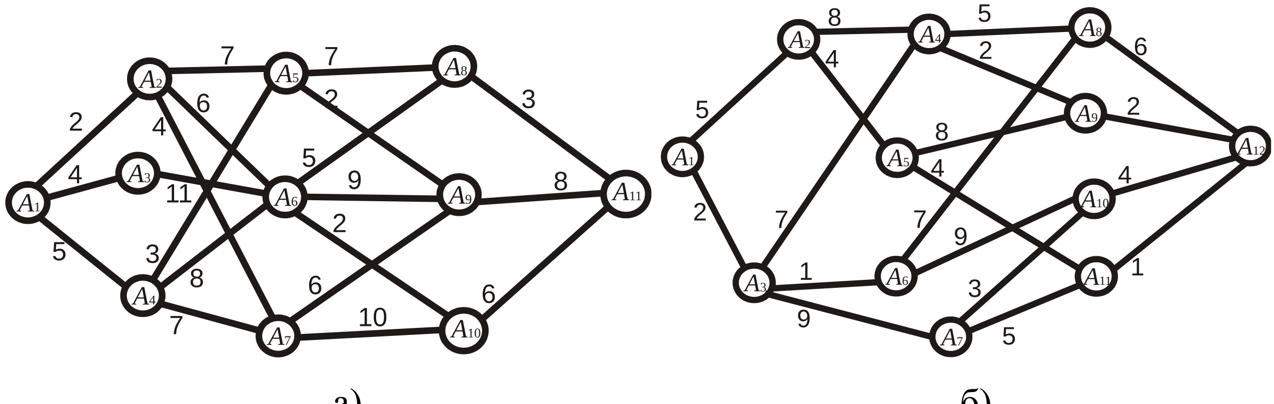
б) 10 на 10 клеток.

6. Телефонная компания планирует соединить подземным кабелем 9 домов, расстояния между которыми (в метрах) заданы при помощи таблицы 13. Найти минимальную длину кабеля.

Таблица 13 – Исходные данные к заданию 6

	Д 1	*Д 2*	*Д 3*	*Д 4*	*Д 5*	*Д 6*	*Д 7*	*Д 8*	*Д 9*
Д 1		60	68	300	270	200	300	300	350
Д 2	60		250	38	170	100	400	150	150
Д 3	68	250		150	210	110	50	50	150
Д 4	300	38	150		80	170	50	50	210
Д 5	270	170	210	80		230	70	70	110
Д 6	200	100	110	170	230		90	90	50
Д 7	300	400	50	50	70	90		100	50
Д 8	300	150	50	50	70	90	100		300
Д 9	350	150	150	210	110	50	50	300	

7. Найти наиболее экономный маршрут перевозки груза из города в город и стоимость перевозки для сети дорог, показанных на рисунке.



а) б)

Рисунок 17 – Исходные данные к заданию 7

Ответы: 7. б) $A_1 A_3 A_4 A_9 A_{12}$, 13.

Библиографический список

1. Андерсон, Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсон. – М.: Диалектика, 2019. – 960 с.

2. Баврин, И.И. Дискретная математика для педагогических вузов: Учебник и задачник для прикладного бакалавриата / И.И. Баврин. – Люберцы: Юрайт, 2015. – 208 с.

3. Вороненко, А.А. Дискретная математика. Задачи и упр. с реш.: Учебно-методическое пособие / А.А. Вороненко, В.С. Федорова. – М.: Инфра-М, 2018. – 160 с.

4. Гашков, С.Б. Дискретная математика: Учебник и практикум для академического бакалавриата / С.Б. Гашков, А.Б. Фролов. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 423 с.

5. Гусева, А.И. Дискретная математика: Учебник / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. – М.: Инфра-М, 2018. – 31 с.

6. Дмитриевский, В.Н. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: Учебное пособие / В.Н. Дмитриевский. – СПб.: Лань КПТ, 2016. – 368 с.

7. Ерусалимский, Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник / Я.М. Ерусалимский. – СПб.: Лань, 2018. – 476 с.

8. Зуев, Ю.А. Современная дискретная математика в задачах и решениях: От перечислительной комбинаторики до криптографии XXI века: Более 700 задач с решениями / Ю.А. Зуев. – М.: Ленанд, 2019. – 304 с.

9. Иванов, А.А. Дискретная математика для инженера: Учебник / А.А. Иванов, Г.И. Пронина, Н.Ю. Корягина. – СПб.: Лань П, 2016. – 400 с.

10. Кадырова, С.В. Дискретная математика: Учебное пособие / С.В. Кадырова, Е.А. Немцева, Г.Л. Тульчинский. – СПб.: Лань П, 2016. – 304 с.

11. Канцедал, С.А. Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. – М.: Форум, 2017. – 320 с.

12. Коростелёва, Л.А. Дискретная математика: Учебное пособие / Л.А. Коростелёва, А.Г. Кощаев. – СПб.: Лань, 2016. - 592 с.

13. Соболева, Т.С. Дискретная математика: Учебник / Т.С. Соболева. – М.: Академия, 2018. – 240 с.

14. Спирина, М.С. Дискретная математика: Учебник / М.С. Спирина. – М.: Академия, 2017. – 256 с.

15. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. – М.: Техносфера, 2016. – 400 с.

Учебное издание

Чихачева Ольга Александровна

Тихонова Оксана Валентиновна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Учебное пособие

Подписано в печать __________. Тираж 5 экз.
Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета
390000, г.Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53