

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емец Валерий Сергеевич
Должность: Директор филиала
Дата подписания: 02.07.2026 19:45:39
Уникальный программный ключ:
f2b8a1573c931f1098cfe699d1debd94fcff35d7

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Архитектура, градостроительство и дизайн»

Г.С. Нечипорук

ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Рязань
2023

УДК 539.3
ББК 38.112
Н59

Нечипорук, Г.С.

Н59 Основы сопротивления материалов: конспект лекций, / Г.С.
Нечипорук. – Рязань: Рязанский институт (филиал)
Московского политехнического института, 2023. – 96 с.

В учебно-методическом пособии даны необходимые сведения о методах расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость и приведены примеры по определению внутренних усилий и перемещений и определению критических параметров при сжатии гибких стержней. Даны схемы и исходные данные для выполнения расчетно-графических работ. конспект лекций предусмотрен для студентов подготовки по направлению 07.03.01 Архитектура.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

УДК 539.3
ББК 38.112

© Г.С. Нечипорук 2023
© Рязанский институт (филиал)
Московского политехнического
университета, 2023

Содержание

Введение.....	5
1 Задачи курса. Гипотезы, применяемые в курсе «Сопротивление материалов».....	6
2 Напряжения и деформации.....	6
3 Внутренние усилия.....	8
4 Виды простых деформаций.....	9
5 Закон Гука.....	10
6 Центральное растяжение-сжатие.....	10
7 Поперечный изгиб. Построение эпюр внутренних усилий при изгиб.....	13
8 Дифференциальные зависимости при изгибе.....	18
9 Построение эпюр внутренних усилий в ломаных стержнях.....	20
10 Механические характеристики материалов.....	26
11 Условие прочности	28
12 Постановка задач расчета на прочность.....	29
13 Геометрические характеристики плоских сечений	32
13.1 Понятие геометрических характеристик.....	32
13.2 Определение положения центра тяжести плоской фигуры.....	33
13.3 Моменты инерции.....	34
13.4 Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.....	36
13.5 Моменты инерции простых фигур.....	36
13.6 Составные сечения.....	38
14 Изгиб.....	40
14.1 Определение напряжений при изгибе	40
14.2 Условие прочности при изгибе.....	42
14.3 Рациональные типы сечений при изгибе	43
15 Определение деформаций при изгибе.....	45
15.1 Дифференциальное уравнение упругой линии.....	46
15.2 Определение перемещений в стержневых системах методом Мора.....	48
16 Основы теории напряженного и деформированного состояния.....	52
16.1 Линейное напряженное состояние.....	53
16.2 Плоское напряженное состояние.....	54
16.3 Зависимость между деформациями и напряжениями при плоском и объемном напряженном состоянии.....	57
17 Сдвиг.....	58
17.1 Напряженное состояние при чистом сдвиге.....	59
17.2 Деформации при сдвиге.....	59
17.3 Определение напряжений и деформаций при кручении вала круглого сечения.....	60
17.4 Рациональные типы сечений при кручении.....	62
17.5 Практические расчеты на сдвиг.....	64

18 Сложное сопротивление (постановка задачи).....	65
18.1 Косой изгиб	68
18.2 Изгиб с растяжением (сжатием)	72
18.3 Внецентренное сжатие	73
18.4 Изгиб с кручением.....	75
19 Продольный изгиб	79
19.1 Влияние условий опирания стержня на величину критической силы	80
19.2 Полный график критических напряжений.....	80
19.3 Подбор сечения сжатого стержня с учетом продольного изгиба..	81
20 Динамическое воздействие нагрузок.....	82
20.1 Расчет неравномерно движущихся деталей.....	83
20.2 Ударные нагрузки.....	86
20.3 Вибрационные нагрузки.....	90
Библиографический список.....	91
Вопросы для самоподготовки.....	92

Введение

При проектировании различных инженерных сооружений приходится определять размеры отдельных элементов конструкций. Эта задача решается на основе расчетов, цель которых – создание прочного, устойчивого, долговечного и вместе с тем экономичного сооружения. Такая же задача возникает при проектировании машин, судов, летательных аппаратов.

В настоящее время курс сопротивления материалов изучается по сокращенной программе. В этом случае целесообразно иметь конспект краткого курса, в котором содержался бы основной материал изучаемой дисциплины. Настоящий конспект лекций, написанный в соответствии с программой, имеет целью восполнить недостаток в кратких руководствах по сопротивлению материалов.

Основные вопросы курса иллюстрированы примерами, хотя число их не велико. Предполагается, что студенты, параллельно с изучением теоретического материала на практических занятиях и самостоятельно выполняют расчетно-графические работы, позволяющие освоить методику расчета элементов конструкций.

Что такое сопромат?
Это знают все подряд.
Сопромат – это наука
Интереснейшая штука
Для ученых и студентов
О расчете элементов
Человеческих творений,
Нужных нам сооружений.
Чтоб не рушили мосты,
И дома стояли гордо,
Помни, друг мой, должен ты
Знать науку эту твердо.
И поверьте мне ребята,
Инженер без сопромата,
Что художник без холста,
Что опора без моста,
Что без неба самолет,
Что без песни хоровод.

И. А. Шестаков

1 Задачи курса. Гипотезы, применяемые в курсе «Сопротивление материалов»

Курс «Сопротивление материалов» является составной частью дисциплины «Механика деформируемого твердого тела», который занимается изучением методов по расчету элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. Сопротивление материалов изучает поведение *деформируемых* тел. В МДТТ кроме того входит курс «Строительной механики», изучающий поведение стержневых конструкций и курс «Теория упругости», в котором рассматриваются континуальные (балки-стенки, пластины, оболочки) системы.

При разработке методов курса «Сопротивление материалов» вводится ряд гипотез о материале тела и о работе самого тела.

1. Гипотеза о *сплошности* материала: материал заполняет весь отведенный ему объем.

2. Гипотеза об *однородности* материала: во всех точках тела свойства материала этого тела одинаковы.

3. Гипотеза об *изотропности*: в любой точке тела свойства материала по различным направлениям одинаковы.

4. Тело считается *абсолютно упругим*, т. е. при снятии нагрузки полностью восстанавливаются его форма и первоначальные размеры.

5. Материал тела подчиняется *закону Гука*: деформации прямо пропорциональны напряжениям (нагрузке).

6. Справедлив *принцип независимости действия сил*: результат воздействия суммы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки отдельно.

7. Деформации тела от нагрузки малы по сравнению с его размерами. Поэтому при рассмотрении условий равновесия нагруженных элементов конструкций деформации элементов учитывать не будем.

2 Напряжения и деформации

При действии на тело внешних нагрузок внутри тела возникают внутренние усилия p , являющиеся результатом взаимодействия частиц тела друг на друга.

Мысленно разрежем тело и покажем эти внутренние усилия (рисунок 2.1). Величина p/dA представляет собой интенсивность внутренних усилий, действующих на поверхность сечения в точке с площадкой dA . Предел отношения внутреннего усилия к этой площадке $\lim p/dA$ при $dA > 0$ называется *полным напряжением* p по площадке dA . Его можно заменить его проекциями на оси x , y и z , которые имеют свои обозначения и названия: σ – *нормальное напряжение* в точке (проекция на ось x) и τ_y, τ_z – *касательные напряжения* в точке (проекции на оси y и z , соответственно).

Размерность напряжений Па (Н/м^2) или МПа (Н/м^2).

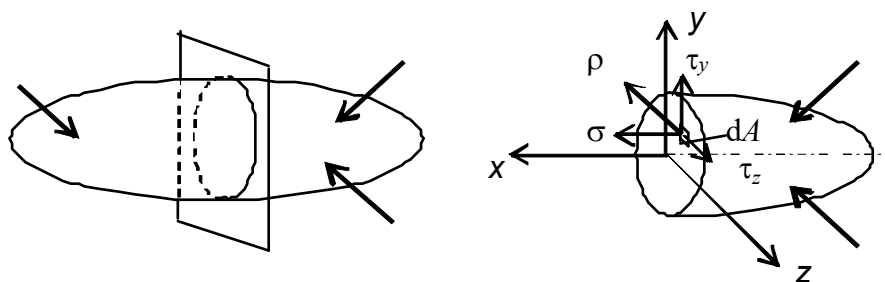


Рисунок 2.1 – Внутренние усилия

Деформации тела могут быть *упругими* и *пластическими*. Упругие – это такие деформации, которые исчезают со снятием нагрузки, пластические – остаточные деформации. В этом случае при снятии нагрузки тело окажется деформированным, т. е. будет иметь размеры и форму, отличающиеся от первоначальных размеров и формы.

При изучении деформированного тела следует различать перемещения отдельных точек и собственно деформацию тела. Выделим в плоском теле до приложения нагрузки бесконечно малый прямоугольник (рисунок 2.2).

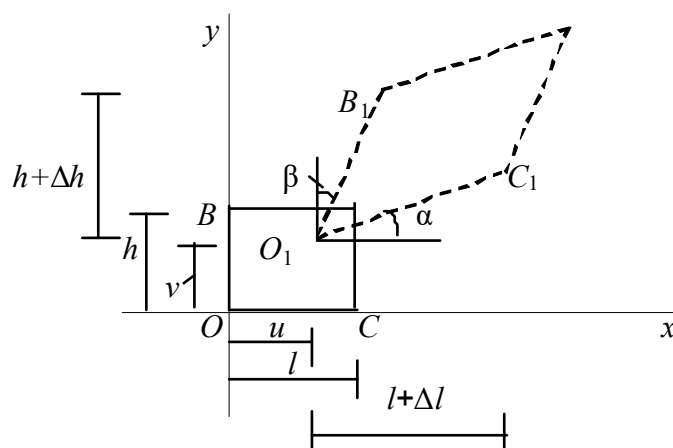


Рисунок 2.2 – Деформации элемента

После нагружения он займет новое положение, обозначенное пунктиром. При этом произойдет изменение его размеров и формы.

Через u и v обозначены *перемещения* точки O : Δl и Δh – абсолютные *линейные деформации* вдоль координатных осей x и y соответственно; γ – *угловая деформация* выделенного элемента.

Чаще используются понятия *относительных линейных деформаций*

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{и} \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta h}{h},$$

позволяющих сравнить степень деформированности различных объектов.

Когда в поперечном сечении действует какое-либо одно напряжение σ или τ деформации называют *простыми*. К ним относятся центральное растяжение (сжатие), чистый сдвиг (рисунок 2.3).

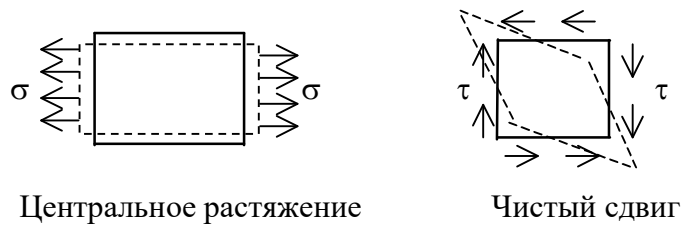


Рисунок 2.3 – Простые деформации

3 Внутренние усилия

Распределенные по всему поперечному сечению внутренние усилия с интенсивностью $\rho(y,z)$, (в плоской задаче $\rho(y)$), можно свести к равнодействующим вектору и моменту, приложенным в центре тяжести поперечного сечения. Для определения этих равнодействующих используют *метод сечений*.

Суть метода сечений в следующем: если тело под действием внешних сил находится в равновесии, то и любая его часть под действием приложенных к ней внешних сил и внутренних усилий (рисунок 3.1) находится в равновесии.

Другими словами, внутренние усилия заменяют действие сил, приложенных к отброшенной части тела. Внутренние усилия, действующие в поперечном сечении и являющиеся составляющими главного вектора и главного момента, можно получить путем переноса всех напряжений σ , τ_y, τ_z , действующих по элементарным площадкам, к центру тяжести поперечного сечения O .

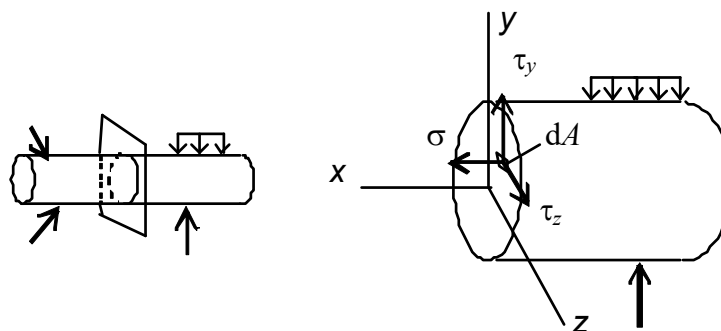


Рисунок 3.1 – Метод сечений

Для этого запишем уравнения проекций и уравнения моментов для всех напряжений, действующих в рассматриваемом сечении, площадь которого обозначим через A :

$$\Sigma X = \int_A \sigma dA = N - \text{продольная сила, равная сумме проекций}$$

нормальных напряжений σ на ось x ;

$$\Sigma m_z = \int_A \sigma dA \cdot y = M_z - \text{изгибающий момент вокруг оси } z;$$

$$\Sigma m_y = \int_A \sigma dA \cdot z = M_y - \text{изгибающий момент вокруг оси } y;$$

$$\Sigma y = \int_A \tau_y dA = Q_y - \text{поперечная сила (вдоль оси } y);$$

$$\Sigma z = \int_A \tau_z dA = Q_z - \text{поперечная сила (вдоль оси } z);$$

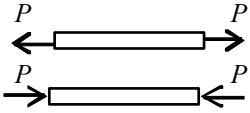
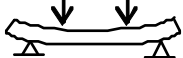
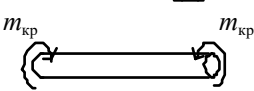
$$\Sigma m_x = \int_A (\tau_z dA \cdot y + \tau_y dA \cdot z) = M_x = M_{кр} - \text{крутящий момент.}$$

Таким образом, в поперечном сечении при пространственном (объемном) нагружении может возникнуть шесть внутренних усилий. В плоской задаче, когда все внешние силы лежат в одной плоскости, проходящей через ось стержня (например, плоскость xOy), может возникать только три внутренних усилия N , M_z и Q_y .

4 Виды простых деформаций

Виды простых деформаций стержня можно представить таблицей 4.1.

Таблица 4.1 – Виды простых деформаций

Схема деформации	Внутренние усилия, вызывающие эту деформацию	Название вида деформации
	$N > 0$ $N < 0$	Центральное растяжение (сжатие)
	M_z	Чистый изгиб
	M_z, Q_y	Поперечный изгиб
	$M_{кр}$	Кручение

5 Закон Гука

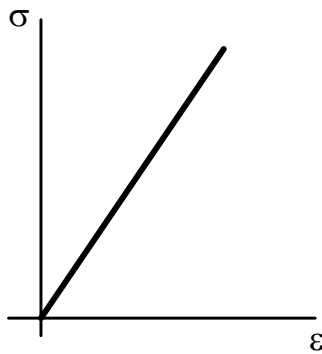


Рисунок 5.1 –
Иллюстрация закона Гука

Выше мы условились, что материал элементов конструкций подчиняется *закону Гука*, суть которого в следующем: *деформации прямо пропорциональны напряжениям* (рисунок 5.1), то есть

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (5.1)$$

где коэффициент пропорциональности E называется *модулем упругости 1-го рода*, или модулем Юнга. Для ряда материалов он имеет такие значения: $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_{дер} = 1 \cdot 10^4$ МПа, $E_{бет} = 3 \cdot 10^4$ МПа, $E_{чуг} = 1 \cdot 10^5$ МПа.

6 Центральное растяжение, сжатие

Рассмотрим поведение стержня, верхний край которого зашкреплен, под действием растягивающего усилия P (рисунок 6.1).

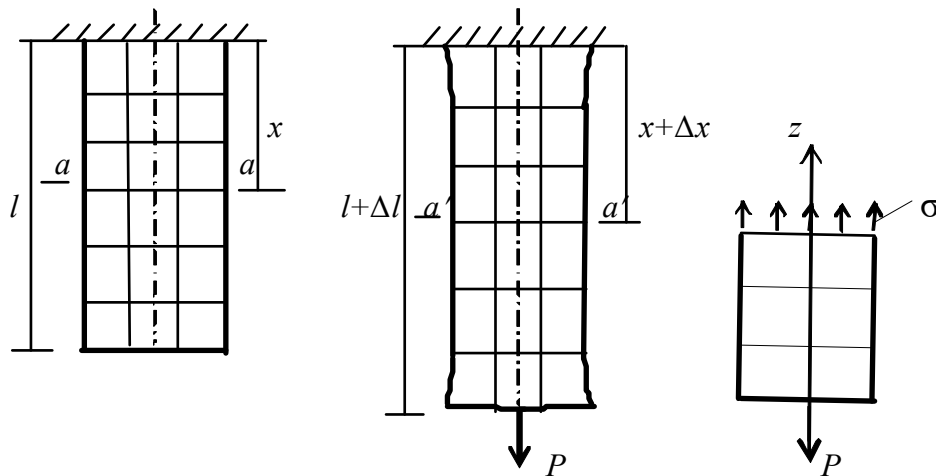


Рисунок 6.1 – Центральное растяжение

После приложения силы P прямоугольная сетка, нанесенная на поверхность стержня, останется прямоугольной (опорную зону и зону приложения нагрузки из рассмотрения исключим). Другими словами, прямая линия $a - a$, нанесенная на стержень до деформации, остается прямой $a' - a'$ и после приложения нагрузки. На основании этого можно применить гипотезу плоских сечений: *сечение, плоское до деформации и удаленное от зон нагружения, остается плоским и после приложения нагрузки*.

Это, в свою очередь, позволяет считать, что все продольные волокна стержня получают одинаковую продольную деформацию и, следовательно, в соответствии с законом Гука, одинаковые напряжения σ . Следовательно

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A,$$

или

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (6.1)$$

Выражение (6.1) позволяет вычислить напряжения в поперечном сечении стержня при центральном растяжении. При центральном сжатии усилие N и напряжения σ имеют знак минус.

Запишем выражение для относительной линейной деформации

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (6.2)$$

и, подставляя выражения (6.1) и (6.2) в (5.1), получим выражение для абсолютной линейной деформации при центральном растяжении (сжатии):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (6.3)$$

При сжатии Δl как и N отрицательно. Из выражения (6.3) видно, что чем больше модуль упругости и площадь поперечного сечения, тем меньше деформация. Произведение EA называется *жесткостью при растяжении (сжатии)*.

Пример 1. Вычислить наибольшие нормальные напряжения $\sigma_{\max}$ и подсчитать полную деформацию сжато-растянутого стержня (рисунок 6.2). $P = 16$ кН. Материал стержня – дерево ($E = 10^4$ МПа), площадь поперечного сечения $A = 20$ см².

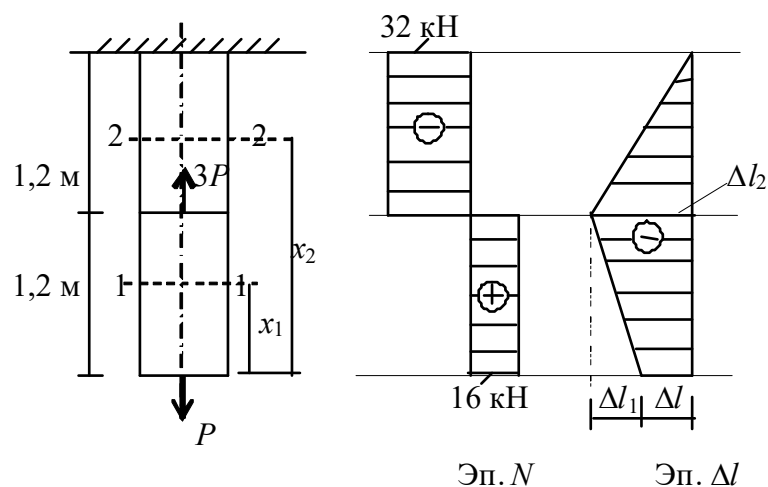


Рисунок 6.2 – Эпюры напряжений и деформаций

Для определения $\sigma_{\max}$ в общем случае необходимо найти положение *опасного сечения*, в котором и возникают наибольшие напряжения. Для этого

необходимо построить *эпюру* (график) продольных сил N , а если стержень ступенчатый, то и эпюру σ .

При построении эпюры N стержень разбивается на участки, границами которых являются края стержня, точки приложения сил и границы изменения площади поперечного сечения стержня.

В данном примере задан консольный стержень, поэтому реакцию в опоре можно не вычислять, а рассматривать на каждом участке только нижнюю часть стержня, приложенные внешние нагрузки на которую известны.

Для вычисления N воспользуемся на каждом участке **методом сечений**. Наглядно покажем эту процедуру на примере 1-го участка (рисунок 6.3).

1-й участок $0 < x_1 < 1,2$ м.

$$\Sigma x = 0. \quad N_1 - P = 0, \quad N_1 = P = 16 \text{ кН.}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{16 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} = 8 \text{ МПа.}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{10^4 \cdot 20 \cdot 10^2} = 0,96 \text{ мм.}$$

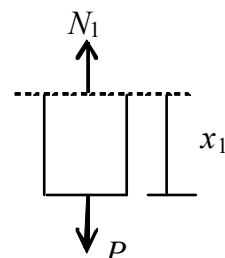
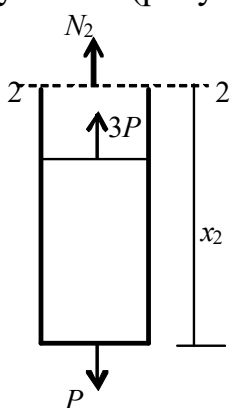


Рисунок 6.3 – Первый участок

При вычислении напряжений и деформаций силы переводились в размерность ньютонов, давление в паскали и сантиметры в миллиметры.

2-й участок (рисунок 6.4) $1,2 \text{ м} < x_2 < 2,4$ м.



$$\Sigma x = 0. \quad N_2 - P + 3P = 0,$$

$$N_2 = -2P = -32 \text{ кН.}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{32 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} = -16 \text{ МПа.}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{32 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{10^4 \cdot 20 \cdot 10^2} = -1,92 \text{ мм.}$$

Рисунок 6.4 – Второй участок

Знак «-» у усилия N_2 означает, что 2-й участок сжат, а минус у деформации Δl_2 означает укорочение стержня на данном участке. Итак,

$$\sigma_{\max} = -16 \text{ МПа.}$$

Полную деформацию получим как сумму деформаций на каждом участке стержня

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0,96 - 1,92 = -0,96 \text{ мм.}$$

Пример 2. Для заданного ступенчатого стержня (рисунок 6.5), нагруженного сосредоточенной силой P и распределенной нагрузкой q , построить эпюры внутренних усилий N и напряжений σ , если $P = 1,4qa$, $A_1 = A$, $A_2 = 1,6A$.

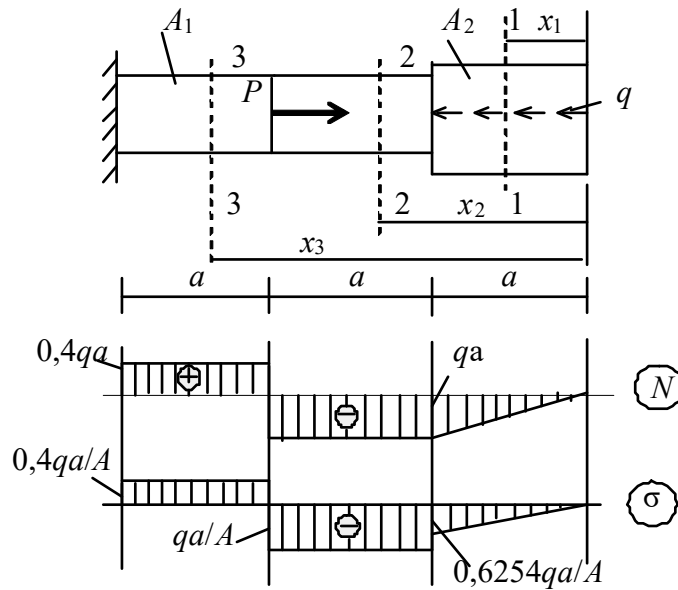


Рисунок 6.5 – Схема и эпюры к примеру 2

Стержень консольный, имеет три участка. При вычислении внутренних усилий во всех трех случаях будем рассматривать равновесие правой части стержня, исключая неизвестную реакцию в опоре.

1-й участок: $0 < x_1 < a$.

$$N_1 = -qx_1. \quad N_{x=0} = 0, \quad N_{x=a} = -qa.$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{qx}{A_2}. \quad \sigma_{x=0} = 0, \quad \sigma_{x=a} = -0,625 \frac{qa}{A}.$$

2-й участок: $a < x_2 < 2a$.

$$N_2 = -qa, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = -\frac{qa}{A}.$$

3-й участок: $2a < x_3 < 3a$.

$$N_3 = -qa + P = 0,4qa, \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{A_1} = 0,4 \frac{qa}{A}.$$

По полученным значениям внутренних усилий и напряжений строим эпюры (рисунок 6.5).

7 Поперечный изгиб. Построение эпюр внутренних усилий при изгибе

Изгиб является наиболее распространенным видом деформации элементов конструкций, и умение определять изгибающие моменты и поперечные силы приобретает особое значение. Методику вычисления внутренних усилий и построения эпюр рассмотрим на конкретных примерах. Как и в случае центрального растяжения, в основе этих методов лежит *метод сечений*.

В расчетных схемах балок и ломаных стержней (рам) в качестве опорных приняты три вида устройств.

1) Шарнирная подвижная опора (рисунок 7.1 (а)), когда возникает только одна реакция, направленная вдоль опоры.

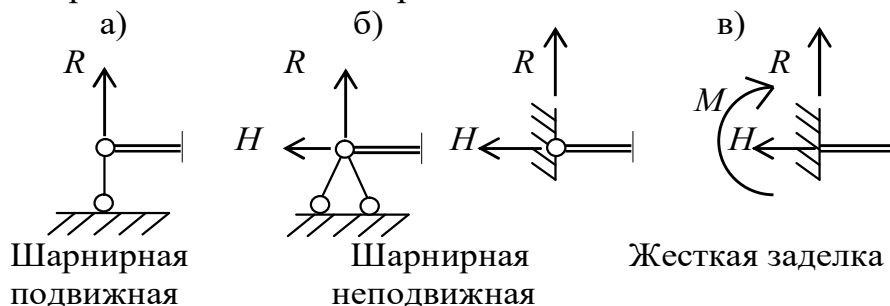


Рисунок 7.1 – Схемы опорных устройств

2) Шарнирно неподвижная опора (рисунок 7.1 (б)). Возможны два варианта схемы опоры. В этом случае в опоре возникает наклонная реакция, имеющая две проекции реакции R и H . 3) Жесткая опора (заделка) (рисунок 7.1 (в)), когда в опоре кроме реактивных сил R и H возникает реактивный момент M .

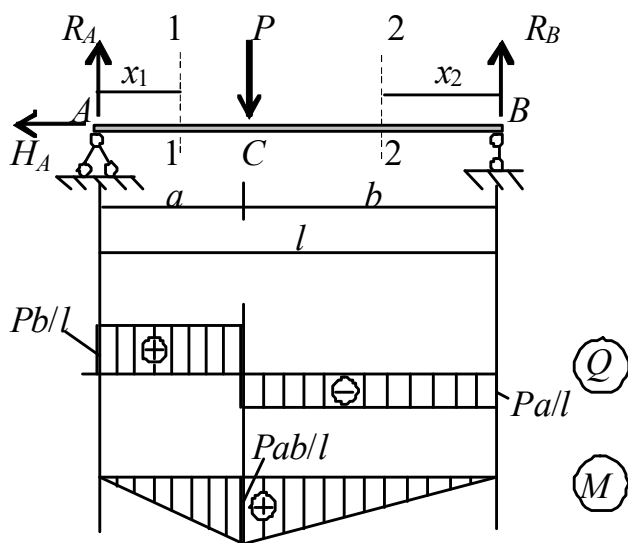


Рисунок 7.2 – Схема балки

и эпюры к примеру 3

Пример 3. Построить эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q для шарнирно опертой балки под действием приложенной в пролете сосредоточенной силы P (рисунок 7.2). Порядок решения следующий.

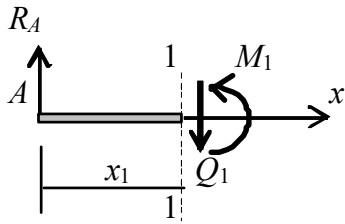
1. Вычисляем опорные реакции. Отметим вначале, что при отсутствии наклонных или горизонтальных внешних сил реакция H_a всегда равна нулю.

$$\sum m_A = 0. - Pa + R_B \cdot l = 0,$$

$$R_B = \frac{Pa}{l}.$$

$$\Sigma m_B = 0. - R_A l + Pb = 0, \quad R_A = \frac{Pb}{l}.$$

Проверка реакций. $\Sigma y = 0. \quad R_A - P + R_B = 0.$



2. Разбиваем балку на участки и записываем выражения для внутренних усилий M и Q . Вычисляем их значения на каждом участке, используя метод сечений.
1-й участок AC (рисунок 7.3):

Рисунок 7.3 – Пример 3,
1-й участок

$$0 > x_1 > a.$$

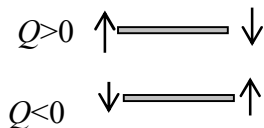
Из уравнения суммы проекций на поперечную ось y следует:

$$\Sigma y = R_A - Q_1 = 0, \quad Q_1 = R_A = Pb/l,$$

т. е. *поперечная сила Q численно равна сумме проекций на эту ось всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.*

Правило знаков:

если поперечная сила вращает оставшуюся часть по часовой стрелке – она положительна.



Для нахождения изгибающего момента в рассматриваемом сечении необходимо записать сумму моментов относительно центра тяжести сечения 1–1

$$\Sigma m = - R_A x_1 + M_1 = 0, \quad M_1 = R_A x_1.$$

Отсюда следует, что *изгибающий момент равен сумме моментов всех внешних сил, приложенных к оставшейся части стержня, относительно центра тяжести рассматриваемого сечения.*

Правило знаков:

момент, растягивающий нижние волокна, — положителен.



Записанное выше выражение для M_1 — уравнение прямой линии, для построения графика которой необходимо найти два значения M (рисунок 7.4).

$$M_{x=0} = R_A 0 = 0, \quad M_{x=a} = R_A a = Pab/l.$$

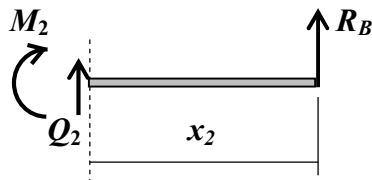


Рисунок 7.4 – Пример 3,
2-й участок

2 - й участок CB (рисунок 7.4):

$$0 > x_2 > b.$$

В соответствии со сформулированными выше определениями и правилами знаков запишем

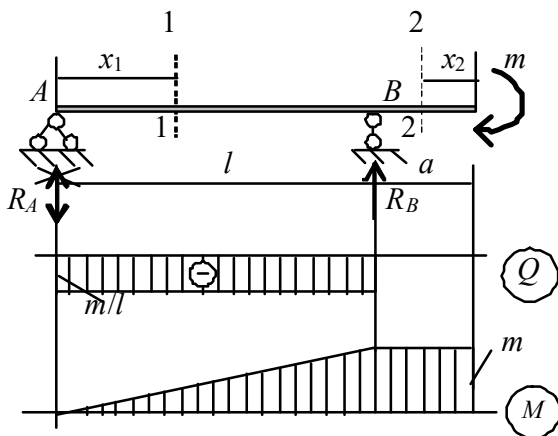
$$Q_2 = -R_B = -\frac{Pa}{l}.$$

$$M_2 = R_B x_2. \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=b} = R_B b = \frac{Pab}{l}.$$

3. Строим эпюры Q и M . Масштаб эпюр выбираем так, чтобы наибольшая ордината не превышала одной трети пролета балки. Положительные значения Q откладываются сверху. Эпюра M строится со стороны растянутого волокна, то есть значения положительных моментов откладываются вниз (рисунок 7.2).

4. Проводим проверку правильности построенных эпюр по их соответствию заданным внешним (активным и реактивным) нагрузкам. Проверка заключается в следующем. При обходе эпюры Q слева направо все скачки (разрывы) эпюры по величине и направлению должны соответствовать приложенным в этих сечениях внешним силам. На эпюре моментов наличие на балке сосредоточенной силы вызывает излом на эпюре M в сторону действия этой силы.

Пример 4. Построить эпюры внутренних усилий для шарнирно опертой балки с консолью, нагруженной сосредоточенным моментом (рисунок 7.5).



1. Определяем опорные реакции

$$\Sigma m_A = 0.$$

$$R_B l - m = 0. \quad R_B = \frac{m}{l}.$$

$$\Sigma m_B = 0.$$

$$R_A l + m = 0. \quad R_A = -\frac{m}{l}.$$

Рисунок 7.5 - Схема балки и эпюры к примеру 4

Знак минус у реакции означает, что первоначально выбранное направление реакции неверно. Изменим направление этой реакции и будем считать ее положительной (см. рисунок 7.5).

Проверка полученных реакций: $\sum y = 0$. $-R_A + R_B = 0$.

2. Вычисляем по участкам значения внутренних усилий.

1-й участок: $0 < x_1 < l$.

$$Q_1 = -R_A = -\frac{m}{l}.$$

$$M_1 = -R_A x_1, \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=l} = -\frac{m}{l} \cdot l = -m.$$

2-й участок: $0 < x_2 < a$.

$$Q_2 = 0, \quad M_2 = \Sigma m.$$

3. Строим эпюры (рисунок 7.5).

4. Проводим статическую проверку построенных эпюр. Эпюры должны отражать приложенную к стержню нагрузку. Действительно, на эпюре поперечных сил при обходе ее слева направо имеем в точке A скачок на величину приложенной в этой точке реакции R_A и совпадающий с ней по направлению. Аналогично в точке B имеем скачок вверх по направлению приложенной здесь реакции R_B и равный ей.

На эпюре моментов в точке приложения сосредоточенного момента имеем скачок на величину этого момента, а в тех сечениях, где приложены сосредоточенные усилия, имеют место изломы по направлению этих сил.

Пример 5. Построить эпюры внутренних усилий для консольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $q=10$ кН/м (рисунок 7.6).

1. Опорные реакции R_A и M_A можно не вычислять, если на каждом участке рассматривать в качестве оставшейся части свободный (правый) край балки.

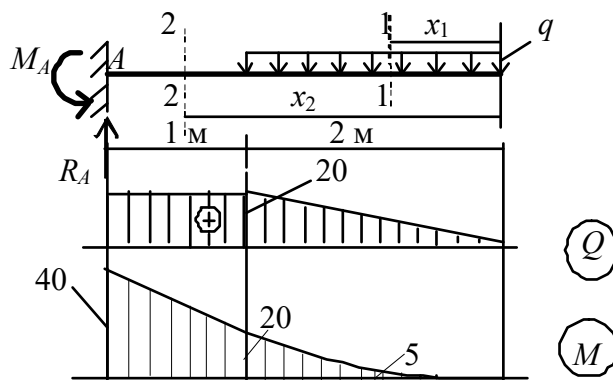


Рисунок 7.6 - Схема балки и эпюры к примеру 5

2. Вычисляем по участкам значения внутренних усилий.

1-й участок: $0 < x_1 < 2$ м.

$$Q_1 = qx_1, \quad Q_{x=0} = 0, \quad Q_{x=2} = 20 \text{ кН.}$$

$$M_1 = -qx^2,$$

выражение для M_1 – уравнение квадратной параболы. Для построения ее графика необходимо вычислить не менее трех значений момента на данном участке.

$$M_{x=0} = 0, \quad M_{x=1 \text{ м}} = 5 \text{ кН·м}, \quad M_{x=2 \text{ м}} = 20 \text{ кН·м.}$$

2-й участок: $2 < x_2 < 3$ м.

$$Q_2 = q \cdot 2 = 20 \text{ кН.}$$

$$M_2 = -q2(x_2 - 1),$$

$$M_{x=2} = -20 \text{ кН·м}, \quad M_{x=3} = -40 \text{ кН·м.}$$

3. Строим эпюры в выбранном масштабе (рисунок 7.6) и проводим статическую проверку эпюр.

8 Дифференциальные зависимости при изгибе

Рассмотрим балку (рисунок 8.1), нагруженную произвольно распределенной нагрузкой $q(x)$. Выделим малый элемент этой балки длиной dx , на котором можно считать нагрузку распределенной равномерно, и рассмотрим его равновесие с учетом действия внутренних усилий, записав следующие уравнения равновесия:

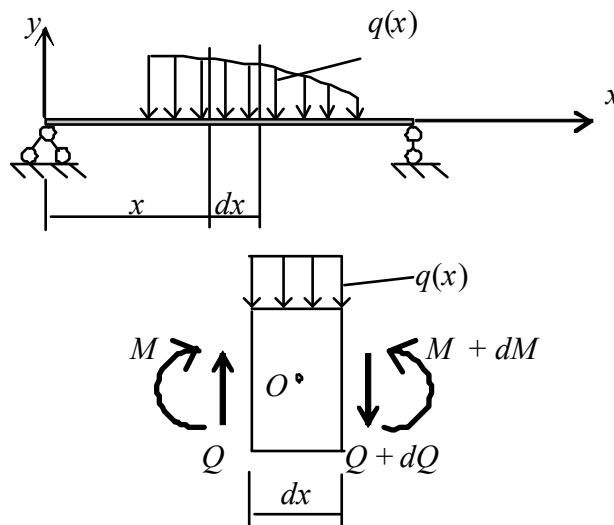


Рисунок 8.1 – Равновесие элементарного участка

$$\Sigma y = 0.$$

$$Q - q(x)dx - (Q + dQ) = 0.$$

$$q(x) = \frac{dQ}{dx}. \quad (8.1)$$

$$\Sigma m_O = 0.$$

$$-M - Qdx/2 - (Q + dQ)dx/2 + (M + dM) = 0.$$

$$Qdx + dM = 0.$$

$$Q = \frac{dM}{dx}. \quad (8.2)$$

Выражения (8.1) и (8.2) показывают дифференциальные зависимости между внутренними усилиями и нагрузкой при изгибе и позволяют проводить проверку на соответствие эпюр друг другу.

Пример 6. Построить эпюры внутренних усилий для шарнирно опертой балки с консолью, нагруженной в соответствии со схемой (рисунок 8.2).

1. Вычисляем опорные реакции

$$\Sigma m_A = 0. -q \cdot 6 \cdot 3 - m + R_B \cdot 6 - P \cdot 8 = 0. \quad R_B = 40,7 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_B = 0. -R_A \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 3 - m - P \cdot 2 = 0. \quad R_A = 17,3 \text{ кН.}$$

Проверка: $\Sigma y = 0.$

$$R_A - q \cdot 6 + R_B - P = 17,3 - 8 \cdot 6 + 40,7 - 10 = 58,2 - 58 = 0,2.$$

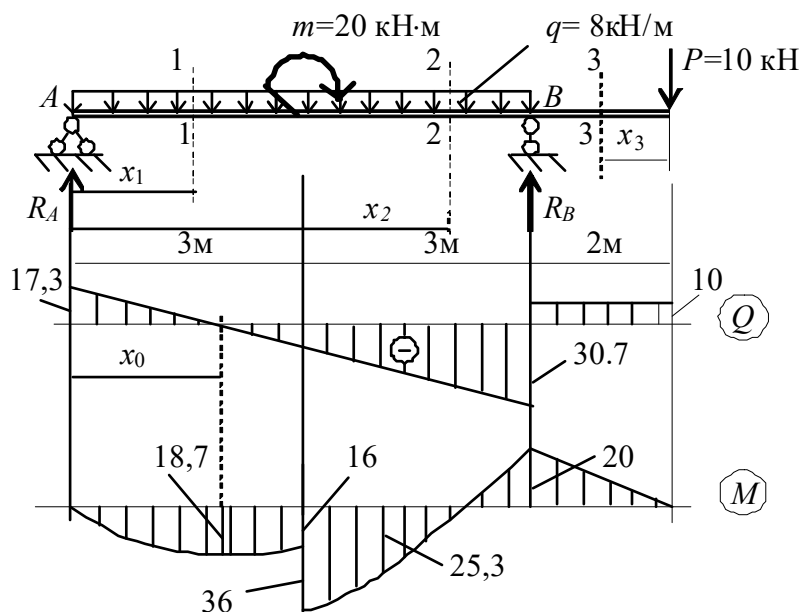


Рисунок 8.2 - Схема балки и эпюры к примеру 6

2. Вычисляем по участкам значения внутренних усилий.

1-й участок: $0 < x_1 < 3$ м.

$$Q_1 = R_A - qx_1, \quad Q_{x=0} = R_A = 17,3 \text{ кН}, \quad Q_{x=3} = -6,7 \text{ кН}.$$

$$M_1 = R_A x_1 - qx_1^2/2.$$

$$M_{x=0} = 0, \quad M_{x=3} = 17,3 \cdot 3 - 8 \cdot 3^2/2 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для выбора третьей промежуточной точки используем то обстоятельство, что Q на этом участке меняет знак, то есть существует точка с $M_{\text{экт}}$. Определим ее координату

$$Q_1 = R_A - qx_0 = 0, \quad x_0 = \frac{R_A}{q} = 2,13 \text{ м}.$$

$$M_{x=2,13} = 18,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2-й участок: $3 < x_1 < 6$ м.

$$Q_2 = R_A - qx_2, \quad Q_{x=3} = -6,7 \text{ кН}, \quad Q_{x=6} = -30,7 \text{ кН}.$$

$$M_2 = R_A x_2 - \frac{qx_2^2}{2} + m.$$

$$M_{x=3} = 36 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_{x=6} = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_{x=4} = 25,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3-й участок: $0 < x_3 < 2$ м.

$$Q_3 = P = 10 \text{ кН}.$$

$$M_3 = -Px_3. \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=2} = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Строим эпюры, проводим статическую проверку и проверяем соответствие эпюр друг другу и нагрузке по правилам, изложенным в формулах (8.1) и (8.2). В данном примере это соответствие выражается в том, что на первом участке в сечении, имеющем $Q=0$, изгибающий момент принимает экстремальное значение (имеется в виду локальный экстремум).

9 Построение эпюр внутренних усилий в ломаных стержнях

В отличие от балок в ломаных стержнях (рамах) кроме изгибающего момента M и поперечной силы Q может возникать, в силу геометрии стержня, еще одно внутреннее усилие – продольная сила N . При вычислении внутренних усилий, как и прежде, используется метод сечений. Порядок построения эпюр внутренних усилий рассмотрим на примерах.

Пример 7. Построить эпюры внутренних усилий для заданной рамы (рисунок 9,1), если: $l = 3$ м, $h = 4$ м, $q = 8$ кН/м.

1. Разбиваем раму на участки и записываем выражения для внутренних усилий на каждом участке.

1-й участок: $0 < x_1 < 3$ м.

$$N_1 = 0,$$

$$Q_1 = qx_1, \quad Q_{x=0} = 0, \quad Q_{x=3} = 24 \text{ кН},$$

$$M_1 = -\frac{qx_1^2}{2}, \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=3} = -36 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты верхние волокна)},$$

$$M_{x=2} = -16 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2-й участок: $2 < x_2 < 4$ м.

$$N_2 = -ql = -24 \text{ кН},$$

$$Q_2 = 0,$$

$$M_2 = -ql^2/2 = -36 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты левые волокна)}.$$

2. Строим эпюры (рисунок 9.2). Для эпюр N и Q принимаем единый масштаб и проставляем знаки усилий. Эпюра M строится со стороны растянутых волокон.

3. Выполняем проверку равновесия узла по значениям внутренних усилий, взятым из эпюр.

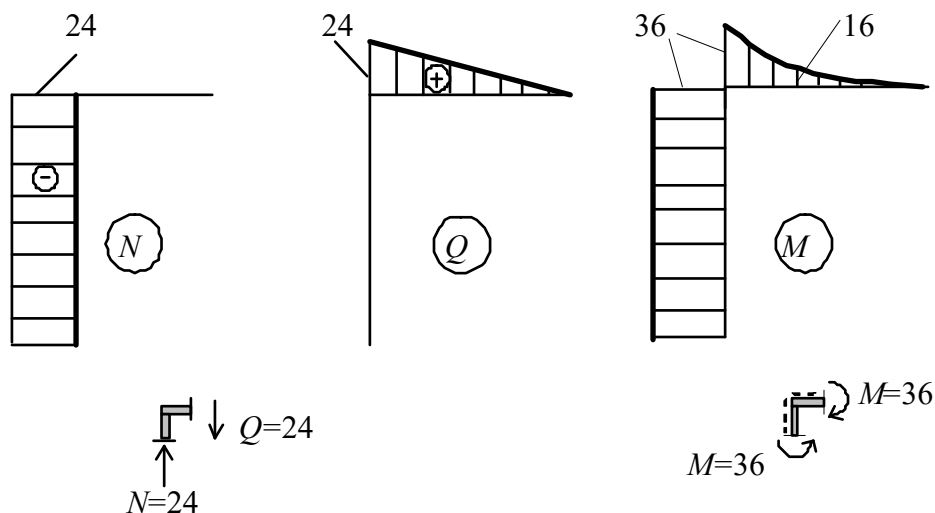


Рисунок 9.2 – Эпюры внутренних усилий в ломаном стержне

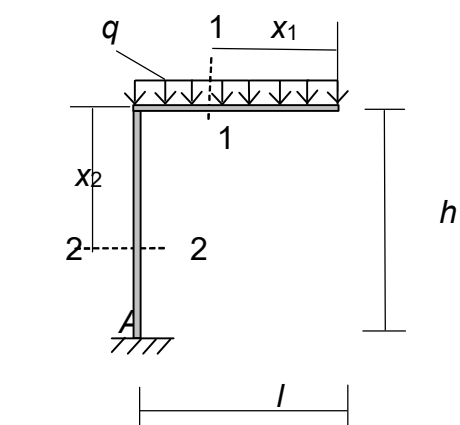


Рисунок 9.1 – Ломаный стержень

Пример 8. Построить эпюры внутренних усилий для заданной рамы (рисунок 9.3), если:

$$l = 4 \text{ м}, \quad h = 5 \text{ м}, \quad M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

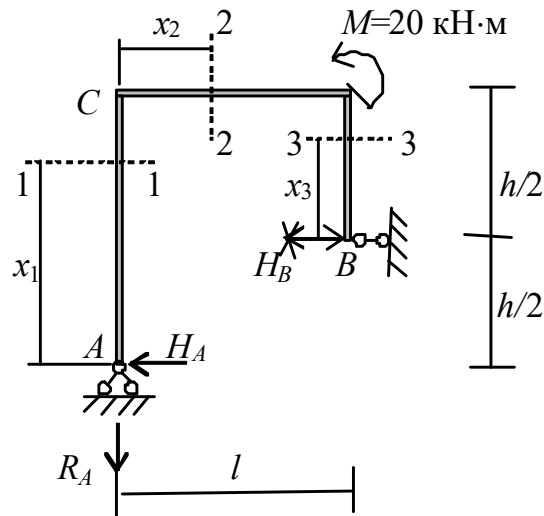


Рисунок 9.3 – Рама с шарнирным опиранием

1. Определяем опорные реакции.

$$\Sigma m_A = 0.$$

$$H_B \cdot h/2 + M = 0.$$

$$H_B = -20/2,5 = -8 \text{ кН} \quad (\text{реакция } H_B \text{ направлена вправо (рисунок 9.3)}).$$

$$\Sigma m_C = 0.$$

$$M + H_B 2,5 - H_A 5 = 0. \quad H_A = \frac{20 + 8 \cdot 2,5}{5} = 8 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m_B = 0.$$

$$R_A 4 - H_A 2,5 + M = 0. \quad R_A = \frac{8 \cdot 2,5 - 20}{4} = 0.$$

$$\text{Проверка: } \Sigma x = 0. \quad -H_A + H_B = 0.$$

2. Разбиваем раму на участки и записываем выражения для внутренних усилий.

1-й участок: $0 < x_1 < 5 \text{ м}.$

$$N_1 = R_A = 0,$$

$$Q_1 = H_A = 8 \text{ кН},$$

$$M_1 = H_A x_1,$$

$$M_{x=0} = 0, \quad M_{x=5} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты правые волокна)}.$$

2-й участок: $0 < x_2 < 4 \text{ м}$.

$$N_2 = H_A = 8 \text{ кН},$$

$$Q_2 = R_A = 0,$$

$$M_2 = H_A x_2 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3-й участок: $0 < x_3 < 2,5 \text{ м}$.

$$N_3 = 0,$$

$$Q_3 = -H_B = -8 \text{ кН},$$

$$M_3 = H_B x_3, \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=2,5} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3. Строим эпюры (рисунок 9.4).

4. Выполняем проверку равновесия узлов.

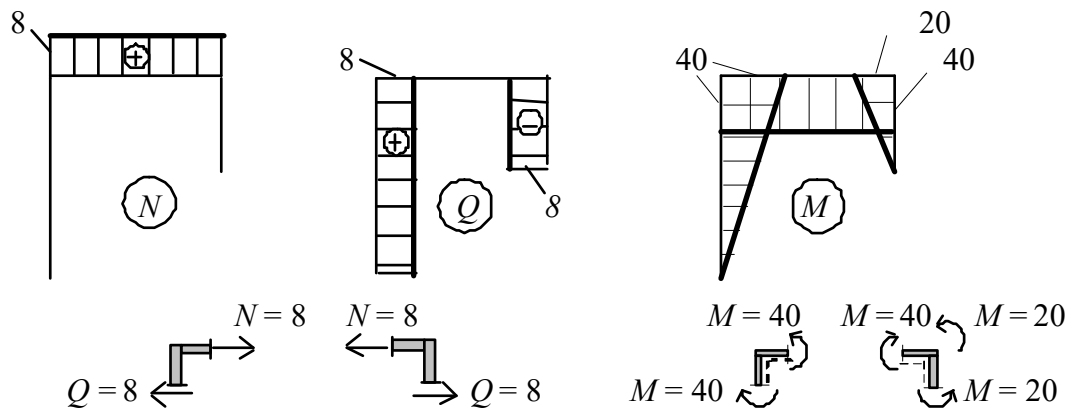


Рисунок 9.4 – Эпюры внутренних усилий

Пример 9. Построить эпюры внутренних усилий для заданной рамы (рисунок 9.5), если $a = 2 \text{ м}$, $b = 3 \text{ м}$, $P = 20 \text{ кН}$.

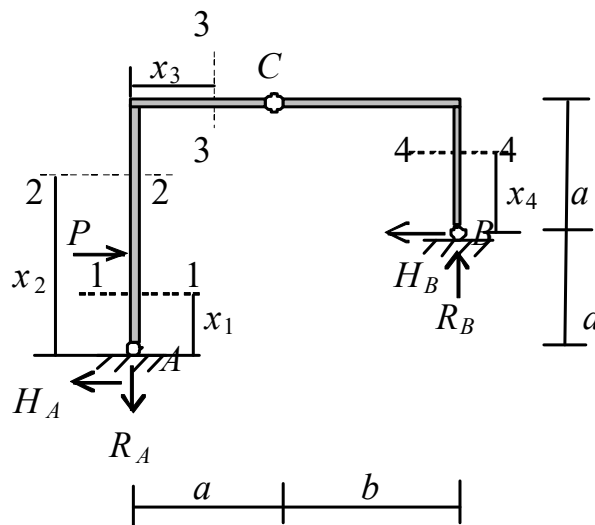


Рисунок 9.5 – Трехшарнирная рама

В данном случае имеем пример трехшарнирной рамы, особенностью которой является наличие четырех опорных реакций.

1. Определяем опорные реакции, используя в качестве 4-го дополнительного уравнения равновесия условие отсутствия изгибающего момента в ключевом шарнире C при рассмотрении левой или правой части рамы

$$M_{из}^C = 0.$$

$$\Sigma m_A = 0. \quad -R_B(b+a) - H_B a + P a = 0.$$

$$H_B = \frac{20 \cdot 2 - R_B 5}{2} = 20 - 2,5 R_B$$

$$\Sigma m_C^{прав} = 0. \quad -R_B 3 + H_B 2 = 0.$$

Решая полученную систему двух уравнений, находим:

$$R_B = 5 \text{ кН}, \quad H_B = 7,5 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m_B = 0. \quad R_A 5 - H_A 2 = 0.$$

$$\Sigma m_C^{лев} = 0. \quad R_A 2 - H_A 4 + P 2 = 0, \text{ откуда:}$$

$$R_A = 5 \text{ кН}, \quad H_A = 12,5 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка реакций: } \Sigma x = 0. \quad -H_A + P - H_B = -12,5 + 20 - 7,5 = 0.$$

2. Разбиваем раму на участки и записываем выражения для внутренних усилий.

1-й участок: $0 < x_1 < 2 \text{ м}.$

$$N_1 = R_A = 5 \text{ кН}, \quad Q_1 = H_A = 12,5 \text{ кН},$$

$$M_1 = H_A x_1, \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=2} = 25 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (растянуты правые волокна)}.$$

2-й участок: $2 < x_2 < 4 \text{ м}.$

$$N_2 = R_A = 5 \text{ кН},$$

$$Q_2 = H_A - P = 12,5 - 20 = -7,5 \text{ кН},$$

$$M_2 = H_A x_2 - P(x_2 - 2), \quad M_{x=2} = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_{x=4} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3-й участок: $0 < x_3 < 5 \text{ м}.$

$$N_3 = H_A - P = 12,5 - 20 = -7,5 \text{ кН},$$

$$Q_3 = -R_A = -5 \text{ кН},$$

$$M_3 = -R_A x_3 - P \cdot 2 + H_A 4, \quad M_{x=0} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_{x=5} = -15 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4-й участок: $0 < x_4 < 2 \text{ м}.$

$$N_4 = -R_B = -5 \text{ кН},$$

$$Q_4 = H_B = 7,5 \text{ кН},$$

$$M_4 = H_B x_4, \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=2} = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3. Строим эпюры (рисунок 9.6).

4. Выполняем проверку равновесия узлов по значениям внутренних усилий, взятым из эпюр.

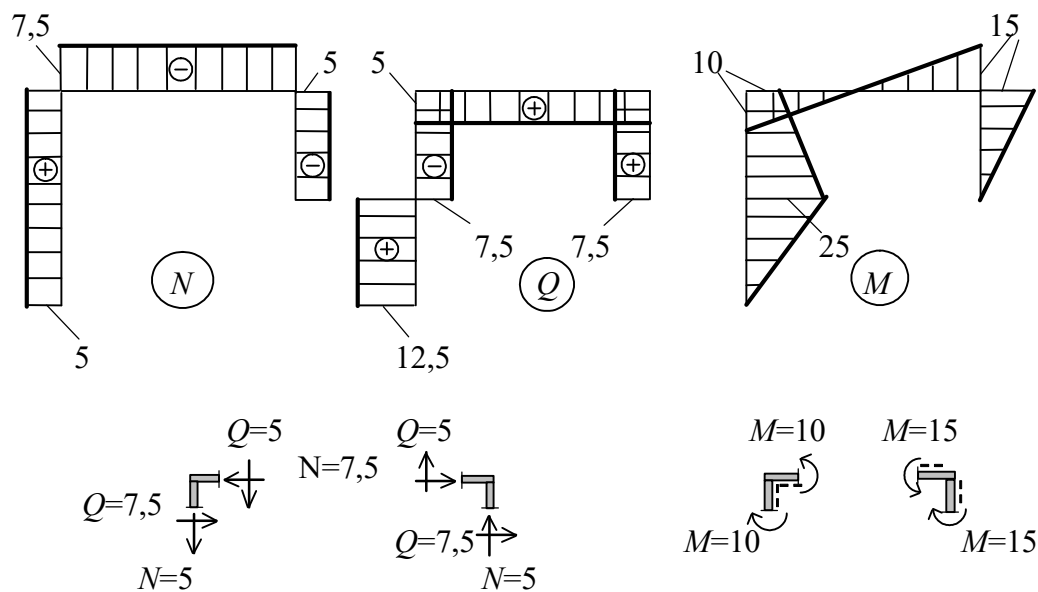


Рисунок 9.6 – Эпюры внутренних усилий

10 Механические характеристики материалов

Механические характеристики материалов позволяют оценить возможность материала воспринимать заданные нагрузки. Они определяются экспериментально, путем проведения испытания образцов из различных материалов. Основные механические характеристики определяются при испытании образцов на центральное растяжение и сжатие (рисунки 10.1, 10.2).

При испытании на растяжение исследуется поведение образца, имеющего определенные размеры (на рисунке 10.1) приведены размеры для образца из стали). При этом строится диаграмма $P(\Delta l)$, которая затем пересчитывается в диаграмму $\sigma(\epsilon)$ с учетом реальных размеров площади поперечного сечения.

При испытаниях на сжатие используются в зависимости от материала образцы цилиндрической или кубической формы (рисунок 10.2). Как и при растяжении, испытание ведется до разрушения образца с построением диаграмм $P(\Delta l)$ и $\sigma(\epsilon)$.



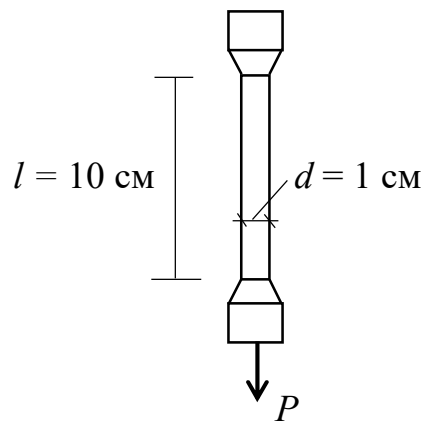


Рисунок 10.1 – Образец для испытаний на растяжение

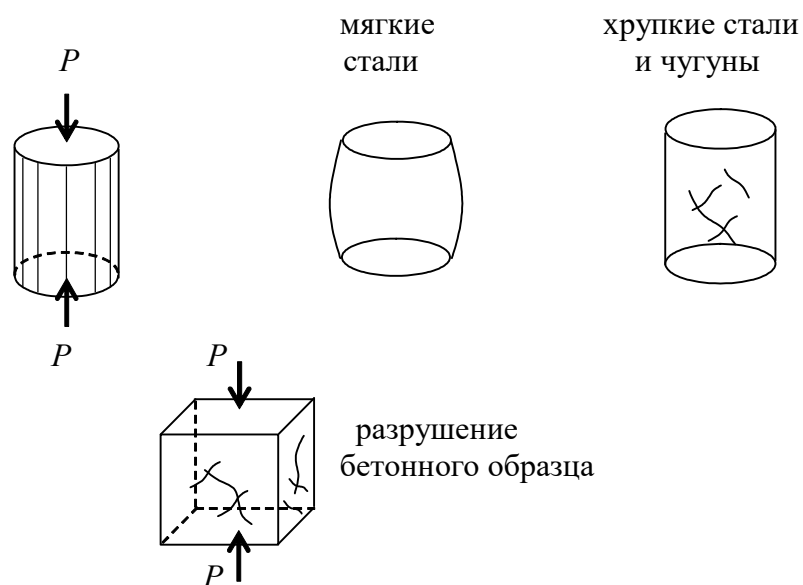


Рисунок 10.2 – Испытание на сжатие

Отметим, что разрушение хрупких материалов сопровождается появлением трещин, расположенных под углом около 45° , что объясняется действием по этим площадкам максимальных касательных напряжений.

Диаграмма растяжения – сжатия мягкой стали (на примере стали марки Ст. 3) (рисунок 10.3) позволяет получить следующие основные характеристики материала:

$\sigma_{\text{пр}}$ - *предел пропорциональности*, т. е. это наибольшие напряжения, при которых справедлив закон Гука;

$\sigma_{\text{т}}$ - *предел текучести*. При этих напряжениях наблюдается рост деформаций без заметного приращения напряжений;

$\sigma_{\text{вр}}$ - *предел прочности*, характеризует наибольшие напряжения, воспринятые образцом.

При сжатии предел прочности у пластичных материалов принимают равным пределу прочности при растяжении.

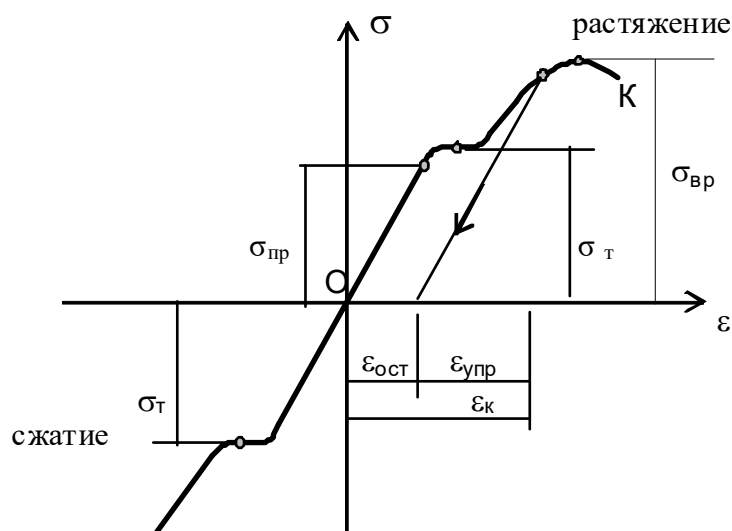


Рисунок 10.3 - Диаграмма растяжения - сжатия пластичных материалов

В качестве примера приведем механические характеристики конструкционной стали Ст. 3

$$\sigma_{\text{пр}} = 210 \text{ МПа}, \sigma_{\text{т}} = 240 \text{ МПа}, \sigma_{\text{вр}} = 320\text{--}360 \text{ МПа}.$$

Если процесс нагружения остановить еще до предела пропорциональности и затем снять нагрузку, то диаграмма вернется в первоначальное состояние в точку O . Если же загрузку остановить за площадкой текучести в точке K (рисунок 10.3), то при разгрузке диаграмма пойдет параллельно первоначальному пропорциональному участку. В результате образец получит остаточные деформации $\epsilon_{\text{ост}}$; упругие деформации $\epsilon_{\text{упр}}$ исчезнут.

На рисунке 10.4 приведена диаграмма растяжения-сжатия чугуна.

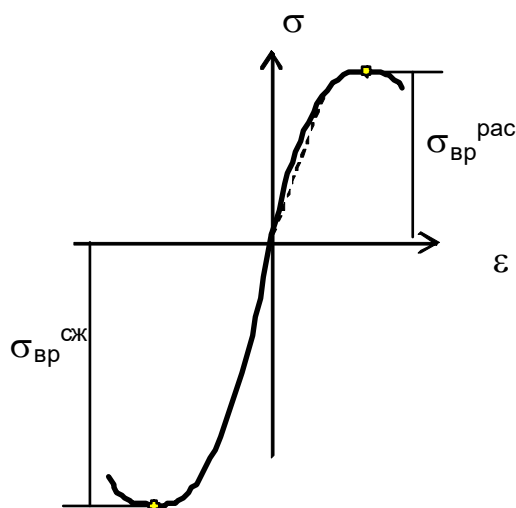


Рисунок 10.4 - Диаграмма растяжения - сжатия хрупких материалов

В отличие от мягких (пластичных) материалов, у хрупких отсутствует площадка текучести, а зависимость $\sigma(\epsilon)$ с самого начала испытания не

подчиняется закону Гука. В связи с этим принято считать, что хрупкие материалы условно подчиняются закону Гука (пунктирная линия) в основной части диаграммы.

Другим отличием хрупких материалов является то, что они лучше работают на сжатие, чем на растяжение.

$$|\sigma_{вр}^{сж}| > \sigma_{вр}^{рас}.$$

Подобный характер диаграмме на рисунке 10.4 имеет диаграмма растяжения-сжатия бетона.

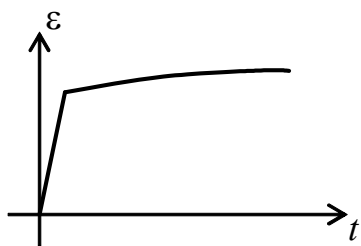


Рисунок 10.5 – Пример релаксации

Если в качестве несущих конструкций используются конструкции, выполненные из полимерных материалов, необходимо учитывать *релаксацию* материала. Релаксацией называется такое явление, когда при постоянных напряжениях во время эксплуатации конструкции продолжается рост деформаций (рисунок 10.5).

11 Условие прочности

Одной из основных задач курса «Сопротивление материалов» является задача расчета элементов конструкций на прочность, которая может быть в общем виде сформулирована следующим образом: наибольшие расчетные напряжения в элементе конструкции $\sigma_{\max}$ должны быть меньше или равны безопасным напряжениям $[\sigma]$ для данного материала, из которого выполнен этот элемент:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (11.1)$$

Безопасные или *допускаемые* напряжения $[\sigma]$ определяются как

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{n}, \quad (11.2)$$

где $\sigma_{пред}$ - предельные напряжения для данного материала (для пластичных материалов $\sigma_{пред} = \sigma_t$, для хрупких $\sigma_{пред} = \sigma_{вр}$); n - коэффициент запаса ($n > 1$).

Условие (11.1) записано для нормальных напряжений. Для ряда деформаций определяющими являются касательные напряжения. В этом случае условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (11.3)$$

При этом принимается:

$$[\tau] = 0,5[\sigma].$$

12 Постановка задач расчета на прочность

Различают три типа задач на прочность. Рассмотрим их на примере деформации центрального растяжения (сжатия), когда условие прочности (11.1) может быть записано в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (12.1)$$

1. Проверка прочности. В этом случае известны все параметры задачи: нагрузка, позволяющая вычислить внутренние усилия N ; размеры стержня (площадь поперечного сечения A); вид материала - $[\sigma]$. Проверяется выполнение условия (12.1).

2. Подбор сечения. Известны нагрузка и материал. Площадь сечения A неизвестна. Из условия прочности (12.1) можем записать:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (12.2)$$

3. Определение безопасной нагрузки. В таких задачах известны размеры (площадь) сечения A и материал, т. е. $[\sigma]$. Неизвестной является $N_{\text{безоп}} = [N]$. Безопасная нагрузка определяется в соответствии с условием прочности (12.1) как

$$[N] \leq A[\sigma]. \quad (12.3)$$

Пример 10. Проверить прочность деревянного ступенчатого бруса, нагруженного двумя сосредоточенными силами (рисунок.12.1). Дано:

$P=16 \text{ кН}$, $A_1=20 \text{ см}^2$, $A_2=12 \text{ см}^2$, $A_3=36 \text{ см}^2$, $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$.

Воспользуемся уравнением (12.1). Для нахождения $\sigma_{\max}$ необходимо определить опасное сечение. С этой целью строим эпюры N и σ .

1-й участок: $0 < x_1 < 1 \text{ м}$.

$$N_1 = P = 16 \text{ кН}, \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{16 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} = 8 \text{ МПа}.$$

2-й участок: $1 < x_2 < 2 \text{ м}$.

$$N_2 = P = 16 \text{ кН}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{16 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} = 13,33 \text{ МПа, что больше } [\sigma].$$

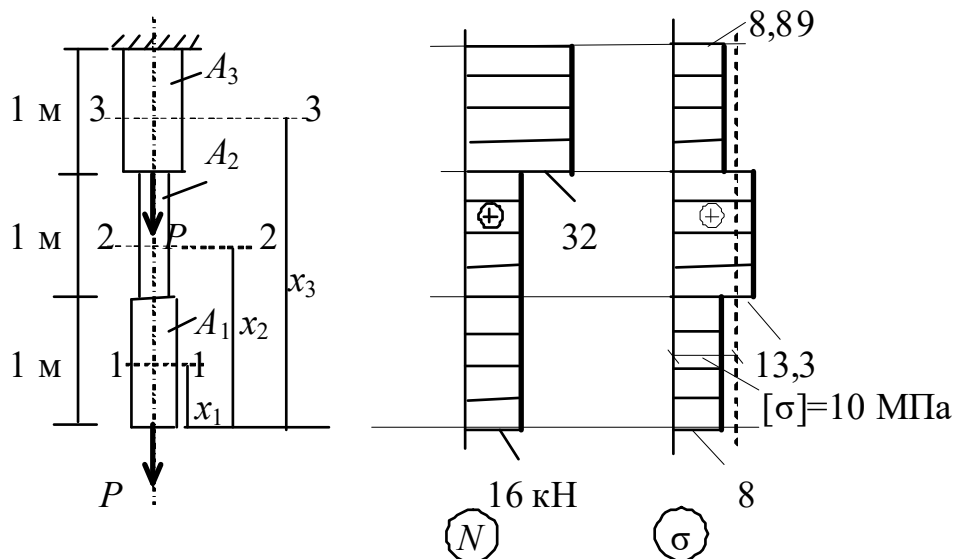


Рисунок 12.1 – Схема и эпюры к 10 примеру

3-й участок: $2 < x_3 < 3$ м.

$$N_3 = 2P = 32 \text{ кН}, \quad \sigma_3 = N_3/A_3 = 32 \cdot 10^3 / (36 \cdot 10^2) = 8,89 \text{ МПа}.$$

Вывод: на втором участке условие прочности не выполняется. Необходимо либо снизить нагрузку, либо увеличить площадь сечения второго участка.

Пример 11. Подобрать площади поперечных сечений стержней подвески, удерживающей груз $P=6$ кН (рисунок 12.2). Стержень AB деревянный, квадратного сечения, $[\sigma]_{\text{дер}}=10$ МПа, стержень BC стальной, круглого сечения, $[\sigma]_{\text{ст}}=160$ МПа.

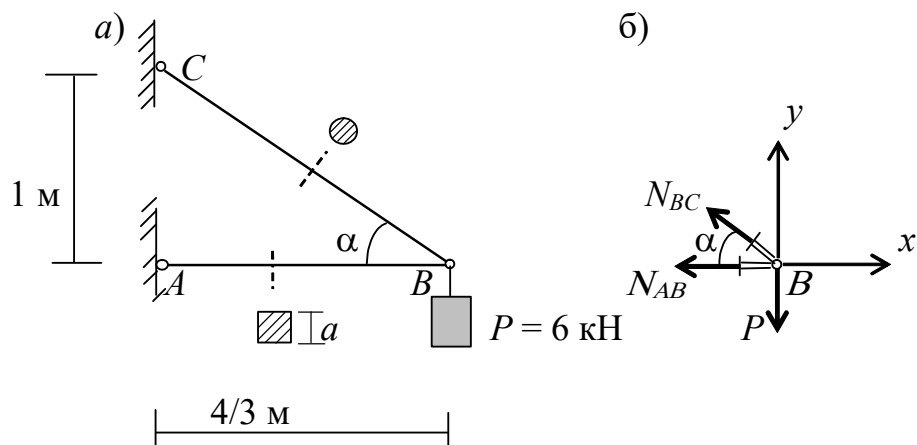


Рисунок 12.2 – Схема примера 11

1. Вычислим геометрические параметры заданной стержневой системы:

$$l_{BC} = \sqrt{1 + (4/3)^2} = 5/3 \text{ м},$$

$$\sin \alpha = 0,6, \quad \cos \alpha = 0,8.$$

Для определения внутренних усилий вырежем узел B (рисунок 12.2, б) и запишем для него уравнения равновесия:

$$\Sigma x = 0, \quad -N_{AB} - N_{BC} \cos \alpha = 0.$$

$$\Sigma y = 0, \quad -P + N_{BC} \sin \alpha = 0,$$

Откуда

$$N_{BC} = 6/0,6 = 10 \text{ кН, тогда.}$$

$$N_{AB} = -N_{BC} 0,8 = -10 \cdot 0,8 = -8 \text{ кН,}$$

Стержень AB сжат, и далее значение N_{AB} будем брать по модулю.

2. По условию (12.2) подбираем площади поперечных сечений.

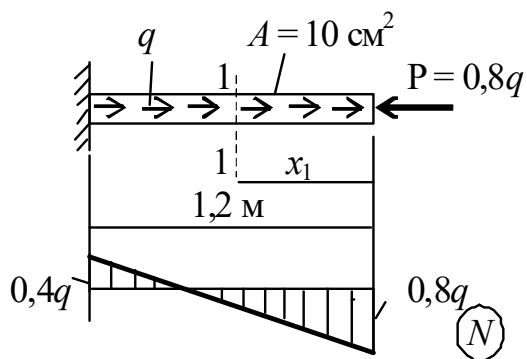
$$A_{BC} \geq \frac{10 \cdot 10^3}{160} = 62,5 \text{ мм}^2.$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 62,5}{3,14}} = 8,92 \text{ мм.} \quad \text{Принимаем } d=9 \text{ мм.}$$

$$A_{AB} \geq \frac{8 \cdot 10^3}{10} = 800 \text{ мм}^2,$$

$$a = \sqrt{800} = 28,3 \text{ мм.} \quad \text{Принимаем } a = 30 \text{ мм.}$$

Пример 12. Консольный стержень (рисунок 12.3) нагружен распределенной нагрузкой q и сосредоточенной силой P . Определить допускаемую нагрузку (параметр нагрузки $[q]$), действующую на стержень, если $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$.



1. Для определения опасного сечения строим эпюру N .

1-й участок: $0 < x_1 < 1,2 \text{ м}$.

$$N_1 = -P + qx_1,$$

$$N_{x=0} = -P = -0,8q, \quad N_{x=1,2} = 0,4q.$$

Опасное сечение в начале участка.

Рисунок 12.3 – схема и эпюра N
12 примера

2. Записываем условие прочности в форме (12.3)

$$|N_{\max}| = 0,8q < A[\sigma], \text{ тогда:}$$

$$[q] \leq \frac{10 \cdot 10^2 \cdot 8}{0,8} = 10000 \text{ Н/м} = 10 \text{ кН/м.}$$

13 Геометрические характеристики плоских сечений

13.1 Понятие геометрических характеристик

Геометрические характеристики учитывают ориентацию сечения в пространстве, что, в свою очередь, влияет на прочностные и деформационные способности элементов конструкций. Так, один и тот же элемент, стоящий на опорах на ребре (рисунок 13.1) и лежащий плашмя на этих же опорах, при одинаковом нагружении будет иметь различные деформации ($f_1 \ll f_2$).

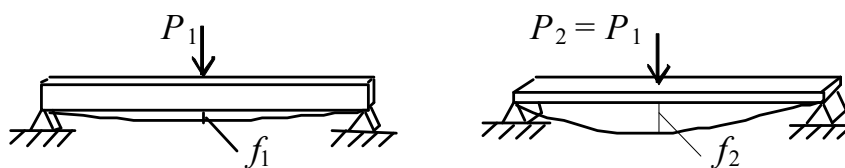


Рисунок 13.1 – Деформации стержня при разной ориентации сечения

В расчетах на прочность и жесткость принято различать ряд геометрических характеристик сечений, которые выражаются через связь элементарной площадки dA с ее координатами на плоскости (рисунок 13.2).

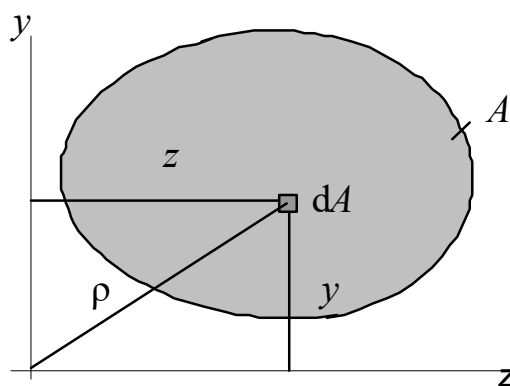


Рисунок 13.2 – Координаты элементарной площадки

1. Площадь поперечного сечения

$$A = \int_A dA. \quad (13.1)$$

2. Статический момент площади относительно оси z

$$S_z = \int_A y dA \quad (13.2)$$

и относительно оси y

$$S_y = \int_A z dA. \quad (13.3)$$

13.2 Определение положения центра тяжести плоской фигуры

Используя формулы для статического момента площади, можно получить выражения для определения центра тяжести плоского сечения. Воспользуемся свойством теоремы Вариньона о том, что момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих. В качестве равнодействующей выступает вся площадь фигуры A (рисунок 13.3), а в качестве составляющих – простейшие фигуры, на которые разбита эта площадь.

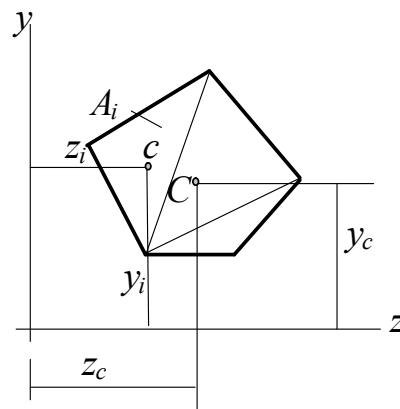


Рисунок 13.3 – Определение центра тяжести сечения

$$S_z = \int_A y dA = Ay_c = \sum A_i y_i,$$

отсюда координата центра тяжести

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad (13.4)$$

аналогично

$$z_c = \frac{\sum A_i z_i}{A}. \quad (13.5)$$

Пример 13. Определить положение центра тяжести уголка (рисунок 13.4).

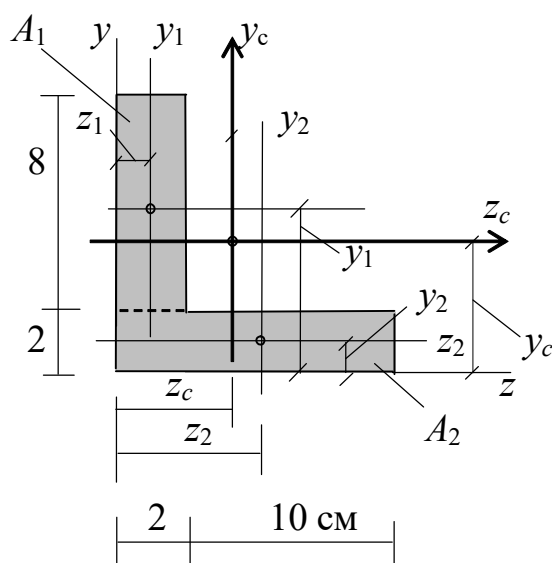


Рисунок 13.4 - Определение центра тяжести уголка

1. Для определения положения центра тяжести предложенной фигуры выберем в качестве произвольных оси z и y , совпадающие с внешними гранями уголка (см. рисунок 13.4).

2. Разбиваем исходную фигуру на две простые – на два прямоугольника с площадями $A_1 = 8 \times 2 = 16 \text{ см}^2$ и $A_2 = 12 \times 2 = 24 \text{ см}^2$, отмечаем их собственные центры тяжести, проводя через них центральные оси z_i и y_i , и вычисляем координаты центров тяжести простых фигур по отношению к первоначально выбранным осям z и y .

$z_1 = 1 \text{ см}$, $y_1 = 6 \text{ см}$, $z_2 = 6 \text{ см}$, $y_2 = 1 \text{ см}$.

3. По формулам (13.4) и (13.5) вычисляем:

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \frac{16 \cdot 1 + 24 \cdot 6}{16 + 24} = \frac{160}{40} = 4 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{16 \cdot 6 + 24 \cdot 1}{16 + 24} = \frac{120}{40} = 3 \text{ см}.$$

4. Проведенные через центр тяжести оси y_c и z_c называются *центральными осями*.

13.3 Моменты инерции

Следующая группа геометрических характеристик носит название моментов инерции и определяется следующим образом (см. рисунок. 13,2):

3. *Осевой момент инерции* сечения относительно оси z

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (13.6)$$

и относительно оси y

$$I_y = \int_A z^2 dA. \quad (13.7)$$

4. Центробежный момент инерции сечения

$$I_{zy} = \int_A zy \, dA. \quad (13.8)$$

5. Полярный момент инерции сечения

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (13.9)$$

Поскольку $\rho^2 = z^2 + y^2$ (рисунок 13.2), то после подстановки этого выражения в (13.9) можно записать

$$I_\rho = I_z + I_y. \quad (13.10)$$

Осевые и полярный моменты инерции по определению всегда положительны, Центробежный момент может иметь любой знак, а также может быть равным нулю, когда, например, одна из осей z или y совпадает с осью симметрии. Размерность моментов инерции измеряется в см^4 .

В том случае, когда оси z и y проходят через центр тяжести фигуры и если относительно этих осей центробежный момент равен нулю, они называются *главными центральными осями* u и v . Главные центральные оси есть у любой фигуры, при этом моменты инерции относительно этих осей I_u и I_v принимают экстремальные значения: один максимальное, а другой – минимальное, поскольку доказано, что сумма моментов инерции при повороте осей не меняется, т. е.

$$I_{z_c} + I_{y_c} = I_u + I_v = \text{const}$$

Угол, определяющий положение главных осей, можно вычислить как:

$$\text{tg} \alpha_0 = \frac{I_y - I_z}{2I_{zy}}. \quad (13.11)$$

По определению интегралов (13.6), (13.7), (13.8) момент инерции сложного сечения можно подсчитать как сумму моментов инерции простых фигур. Моменты инерции прокатных профилей приводятся в сортаментах (рисунок 13.5).

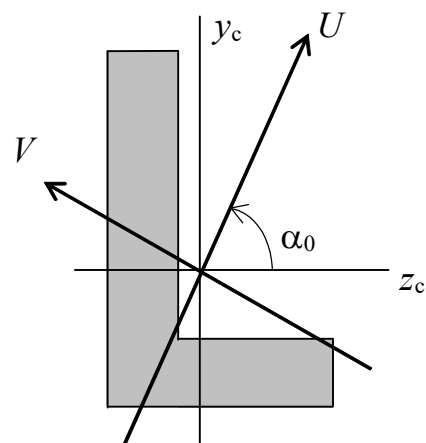


Рисунок 13.5 – Главные центральные оси

13.4 Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Приведем без доказательства формулы, описывающие изменение осевых моментов инерции при параллельном переносе осей. Пусть переход

осуществляется от оси z к оси z_1 (рисунок 13.6). Момент инерции I_z относительно оси z известен. Тогда

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A. \quad (13.12)$$

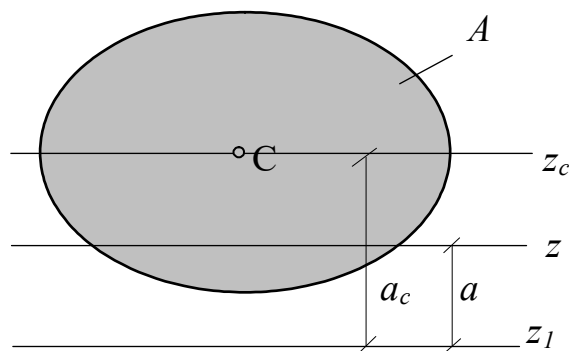


Рисунок 13.6 – Параллельный перенос осей

Выражение (13.12) необходимо понимать следующим образом: при удалении от центра тяжести осевой момент инерции увеличивается. В противном случае в выражении (13.12) должен быть проставлен минус.

Из всех осевых моментов инерции I_z

наименьшим является момент инерции относительно центральной оси.

13.5 Моменты инерции простых фигур

Прямоугольник

Вычислим вначале по формуле (13.6) осевой момент инерции прямоугольника относительно произвольной оси z , совпадающей с нижним основанием прямоугольника (рисунок 13.7)

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{by^3}{3} = \frac{bh^3}{3}.$$

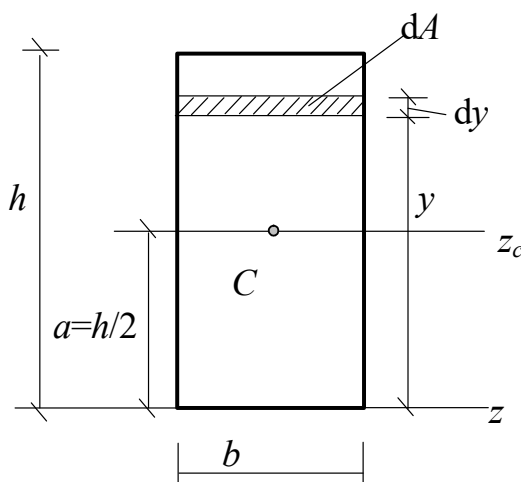


Рисунок 13.7 - Прямоугольник

Осуществим параллельный перенос оси z в положение z_c (т. C – центр тяжести прямоугольника), используя выражение (13.12).

$$I_{z_c} = I_z - a^2 A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}.$$

$$I_{z_c} = \frac{bh^3}{12}. \quad (13.13)$$

Для треугольника и круга (рисунок 13.8) формулы осевых моментов инерции относительно центральной оси приведем без доказательства.

Треугольник:
$$I_z = \frac{bh^3}{36}, \quad (13.14)$$

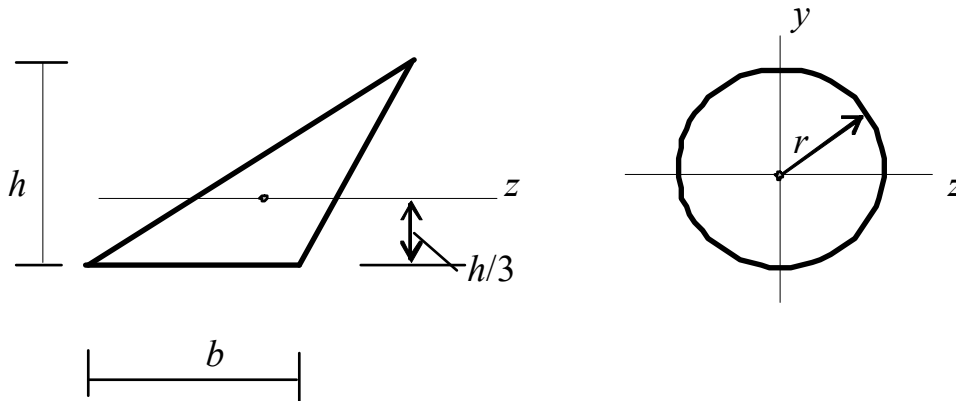


Рисунок 13.8 – Треугольник и круг

круг
$$I_\rho = I_z + I_y = \frac{\pi r^4}{2},$$

тогда
$$I_z = I_y = \frac{\pi r^4}{4}. \quad (13.15)$$

13.6 Составные сечения

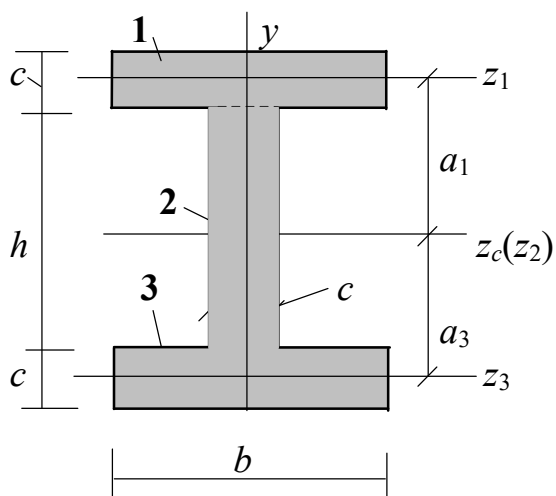


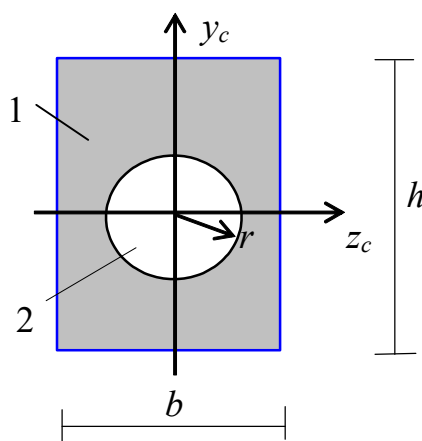
Рисунок 13.9 – Составное сечение

На рисунке 13.9 показано составное сечение в виде двутавра. Разобьем его на три простых фигуры - на три прямоугольника. Поскольку данная фигура имеет две оси симметрии, совпадающие с центральными осями второй фигуры, то эти оси и будут главными центральными осями заданного составного сечения.

Используя формулы для осевых моментов инерции при параллельном переносе осей, можем записать

$$I_{z_c} = I_{z_c}^1 + I_{z_c}^2 + I_{z_c}^3 = I_{z_1}^2 + a_1^2 A_1 + I_{z_2}^2 + I_{z_3}^3 + a_3^2 A_3;$$

$$I_{y_c} = I_y^1 + I_y^2 + I_y^3.$$



Другой пример составного сечения показан на рисунке 13.10. Принципиальное отличие от предыдущего примера заключается в том, что здесь имеется отверстие и вместо суммирования мы получим результат в виде разности моментов инерции двух фигур

Рисунок 13.10 – Составное сечение

$$I_{z_c} = I_{z_c}^1 - I_{z_c}^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4},$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^1 - I_{y_c}^2 = \frac{b^3 h}{12} - \frac{\pi r^4}{4}.$$

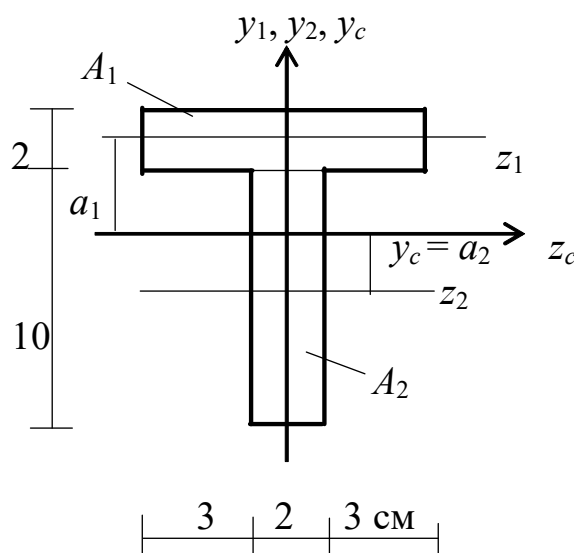


Рисунок 13.11 – Тавровое сечение

Пример 14. Вычислить значения главных центральных моментов инерции таврового сечения (рисунок 13.11).

Порядок решения задачи:

1. Определяем положение центра тяжести сечения, представляя данное сечение как составное из двух прямоугольников – верхнего (полка) и нижнего (стойка). За исходные возьмем центральные оси второй фигуры – стойки z_2 и y_2 . Площади простых фигур и координаты их центров тяжести:

$$A_1 = 16 \text{ см}^2, A_2 = 20 \text{ см}^2, y_1 = 6 \text{ см}, y_2 = 0.$$

Отметим, что в силу симметрии сечения центральные вертикальные оси простых фигур y_1, y_2 и центральная вертикальная ось y_c совпадают, т. е. $z_c = 0$.

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{16 \cdot 6 + 20 \cdot 0}{16 + 20} = \frac{96}{36} = \frac{8}{3} = 2,67 \text{ см.}$$

В силу симметрии всего составного сечения оси y_c и z_c являются главными центральными осями. Вычисляем осевые моменты относительно этих осей. Расстояния между центральными осями простых фигур и главными осями будут:

для z :

$$a_1 = y_1 - y_c = 6 - 2,67 = 3,33 \text{ см,}$$

$$a_2 = y_c = 2,67 \text{ см,}$$

для y :

$$b_1 = b_2 = 0.$$

$$I_{z_c} = I_{z_c}^1 + I_{z_c}^2 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 A_1 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2^2 A_2 =$$

$$= \frac{8 \cdot 2^3}{12} + 3,33^2 \cdot 16 + \frac{2 \cdot 10^3}{12} + 2,67^2 \cdot 20 = 492 \text{ см}^4.$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^1 + I_{y_c}^2 = \frac{b_1^3 h_1}{12} + b_1^2 A_1 + \frac{b_2^3 h_2}{12} + b_2^2 A_2 =$$

$$= \frac{8^3 \cdot 2}{12} + 0 + \frac{10 \cdot 2^3}{12} + 0 = 92 \text{ см}^4.$$

14 Изгиб

14.1 Определение напряжений при изгибе

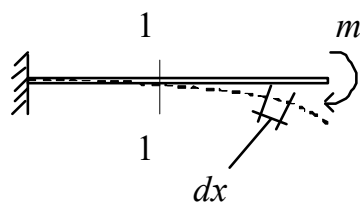


Рисунок 14.1 – Чистый изгиб

Рассмотрим вначале случай чистого изгиба (рисунок.14.1) когда в поперечном сечении балки возникает одно внутреннее усилие – изгибающий момент $M_{1-1} = m$.

Выделим малый элемент балки длиной dx и рассмотрим его деформированное состояние (рисунок 14.2). ρ – радиус кривизны слоя, не меняющего своей длины при деформировании стержня, который носит название *нейтрального слоя*.

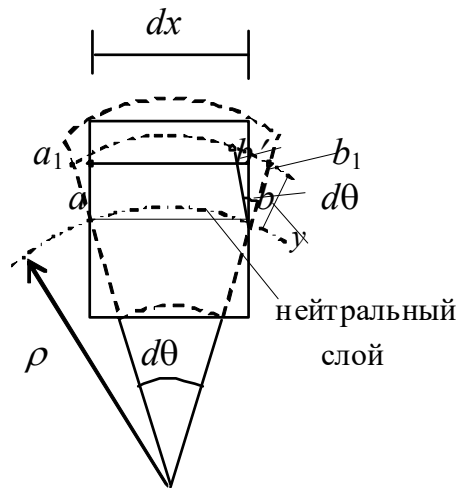


Рисунок 14.2 – Деформированное состояние элемента

Будем считать, что поперечное сечение, плоское до деформации, остается плоским и после приложения нагрузки (*гипотеза плоских сечений – гипотеза Бернулли*). Тогда в соответствии со схемой волокно ab , длина которого до деформации равна dx , займет положение a_1b_1 и в процессе изгиба получит удлинение $b_1b' = y \cdot d\theta$. Это абсолютная деформация волокна ab . Запишем относительную деформацию этого волокна:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{b_1b'}{ab} = \frac{y d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}.$$

Подставим полученное значение ε в закон Гука:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{y}{\rho},$$

откуда:

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}. \quad (14.1)$$

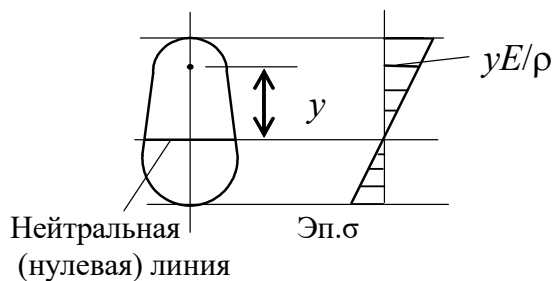


Рисунок 14.3 – Распределение напряжений по высоте

Из выражения (14.1) следует, что нормальные напряжения в продольных волокнах балки прямо пропорциональны расстоянию от волокна до нейтрального слоя. На нейтральной линии (рисунок 14.3) при $y = 0$ $\sigma = 0$.

Рассмотрим равновесие правой части консольной балки (рисунок 14.4).

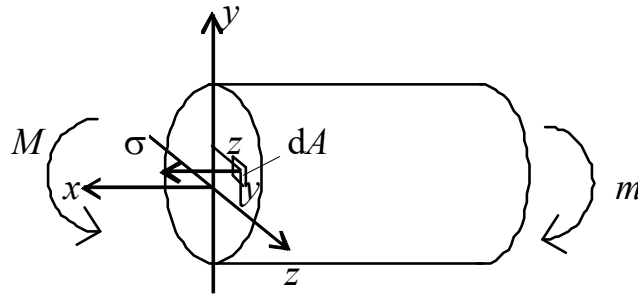


Рисунок 14.4 – Равновесие элемента

В данном случае можно записать для оставшейся части шесть уравнений равновесия:

$$\Sigma y = 0, 0 = 0.$$

$$\Sigma z = 0, 0 = 0.$$

$$\Sigma x = 0, \quad \int_A \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \frac{E}{\rho} S_z = 0. \quad \frac{E}{\rho} \neq 0, \quad S_z = 0.$$

Поскольку статический момент площади равен нулю, то ось z – центральная ось поперечного сечения.

$$\Sigma m_x = 0, 0 = 0.$$

$$\Sigma m_y = 0, \quad \int_A \sigma dA z = \frac{E}{\rho} \int_A y z dA = 0. \quad \frac{E}{\rho} \neq 0 \quad I_{zy} = 0.$$

Последнее условие говорит о том, что оси y и z – главные центральные оси сечения, поскольку центробежный момент относительно этих осей равен нулю.

$$\Sigma m_z = m, \quad \int_A \sigma dA y = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{EI_z}{\rho} = m = M,$$

откуда:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (14.2)$$

Выражение (14.2) показывает связь между кривизной стержня и $M_{из}$. Подставив (14.2) в (14.1), получим выражение для определения нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma = \frac{My}{I_z}. \quad (14.3)$$

14.2 Условие прочности при изгибе

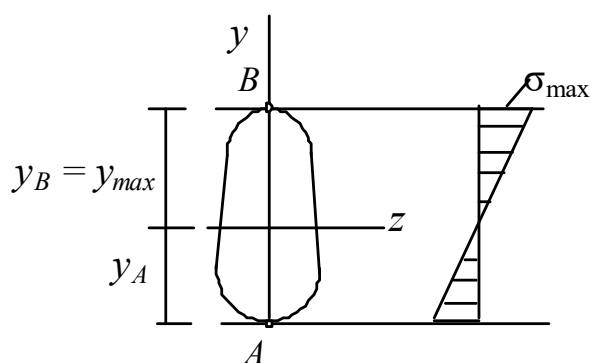


Рисунок 14.5 - Распределение напряжений по высоте

Из формулы (14.3) следует, что при изгибе нормальные напряжения в поперечном сечении по высоте сечения переменны. Наибольшие напряжения возникают (рисунок 14.5) в самых удаленных от центра тяжести (от нейтральной линии) волокнах – в точках *A* и *B*. То есть условие прочности будет иметь вид:

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = \frac{My_B}{I_z} \leq [\sigma]. \quad (14.4)$$

Принято обозначать:

$$\frac{I_z}{y_{\max}} = W_z, \quad (14.5)$$

где W_z – момент сопротивления.

Окончательно условие прочности при изгибе примет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (14.6)$$

Условие (14.6) записано для материала, одинаково работающего на растяжение и сжатие. В противном случае необходимо отдельно записать условие прочности (14.4) для растянутых и сжатых волокон.

Пример 15. Подобрать сечение балки из прокатного профиля (двутавра) (рисунок 14.6), если: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Общий порядок решения задачи может быть представлен в следующем виде:

- 1) по эпюрам M и Q находим опасное сечение и величину $M_{\max}$;
- 2) по формуле (14.6) вычисляем наименьшее допустимое значение момента сопротивления W_z ;
- 3) по сортаменту для двутавровых сечений выбираем номер прокатного профиля.

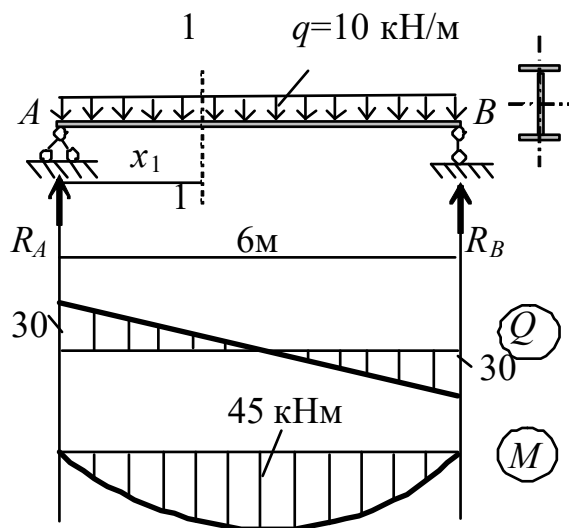


Рисунок 14.6 – Пример 15

1.1 Определяем опорные реакции:

$$R_A = R_B = 30 \text{ кН.}$$

1.2 Вычисляем внутренние усилия:

1-й участок: $0 < x_1 < 6 \text{ м.}$

$$Q_1 = R_A - qx_1, \\ Q_{x=0} = 30 \text{ кН}, Q_{x=6} = -30 \text{ кН.}$$

$$M_1 = R_A x_1 - qx_1^2/2, \\ M_{x=0} = 0, M_{x=6} = 0, M_{x=3} = 45 \text{ кН·м.}$$

1.3 Строим эпюры (рисунок 14.6). В опасном сечении $M_{\max} = 45 \text{ кН·м.}$

2. Из выражения (14.6) следует:

$$W \geq \frac{M}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^6}{160} = 28,1 \cdot 10^4 \text{ мм}^3 = 281 \text{ см}^3.$$

3. По таблице сортамента выбираем двутавр № 24, для которого $W_z = 289 \text{ см}^3$.

14.3 Рациональные типы сечений при изгибе

Анализируя характер распределения напряжений в поперечном сечении стержня при изгибе, видно, что материал, расположенный в районе нейтральной линии (в районе центра тяжести сечения), значительно недогружен. Очевидно, что рациональными будут те сечения, у которых основная часть материала (площади сечения) удалена от нейтральной линии. К таким сечениям относятся прокатные профили в виде двутавра, швеллера, тонкостенных труб, а также коробчатые и составные сечения.

Пример 16. Подобрать размеры сечения стальной балки из различных типов поперечных сечений (рисунок 14.7) и сравнить их вес. Выбрать наиболее экономичное.

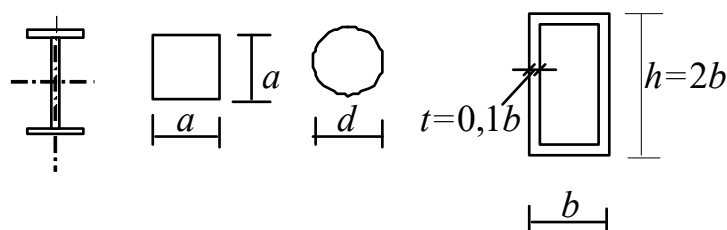


Рисунок 14.7 – Примеры сечений

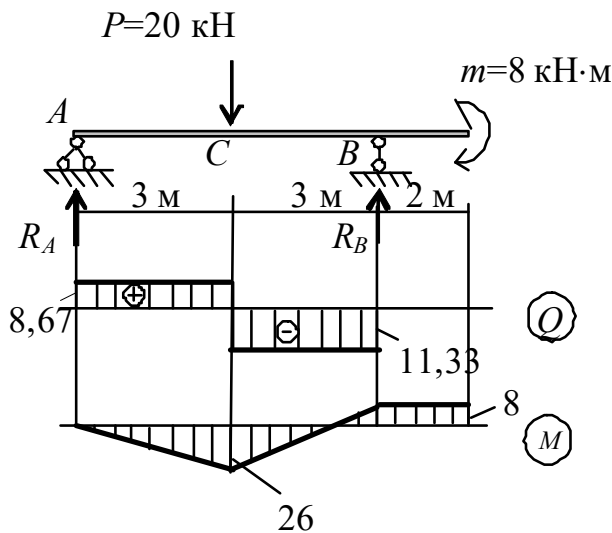


Рисунок 14.8 – Пример 16

Сама балка с заданной нагрузкой и эпюры внутренних усилий приведены на рисунке 14.8.

Как следует из анализа эпюры M опасным будет сечение C , в котором возникает наибольший изгибающий момент $M_C = M_{\max} = 26$ кН·м.

Подсчитаем наименьший допустимый момент сопротивления для сечения данного стержня, используя соотношение (14.6), приняв $[\sigma] = 150$ МПа:

$$W_z \geq \frac{M}{[\sigma]} = \frac{26 \cdot 10^6}{150} = 17,33 \cdot 10^4 \text{ мм}^3$$

или:

$$W_z = 173,3 \text{ см}^3.$$

1) по таблице сортамента выбираем двутавр № 20 с моментом сопротивления 184 см^3 . Площадь сечения этого двутавра равна $A = 26,8 \text{ см}^2$.

2) рассмотрим вариант квадратного сечения:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{a^3 a}{12 \cdot a} = \frac{a^3}{6} = 173,3 \text{ см}^3;$$

$$a = \sqrt[3]{173,3 \cdot 6} = 10,13 \text{ см}; \quad A = 102,6 \text{ см}^2.$$

3) вариант круглого сечения:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\pi r^4}{4r} = \frac{\pi r^3}{4} = 173,3 \text{ см}^3;$$

$$r = \sqrt[3]{1773,3 \cdot \frac{4}{3,14}} = 6,04 \text{ см}; \quad A = \pi r^2 = 114,5 \text{ см}^2.$$

4) коробчатое сечение. Это пример составного сечения, момент инерции которого будем искать как разность моментов инерции наружного и внутреннего прямоугольников. Размер наружного прямоугольника $2b \times b$, внутреннего $1,8b \times 0,8b$.

Тогда:

$$I_z = \frac{b(2b)^3}{12} - \frac{(0,8b)(1,8b)^3}{12} = \frac{b^4}{12}(8 - 4,666) = 0,278b^4;$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{0,278b^4}{b} = 0,278b^3 = 173,3 \text{ см}^3;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{173,3}{0,278}} = 8,54 \text{ см}; \quad A = 2(8,54)^2 - 0,8 \cdot 1,8(8,54)^2 = 40,84 \text{ см}^2.$$

Таким образом, по отношению к двутавру масса бруса с квадратным сечением будет больше в 3,83 раза, масса бруса с круглым сечением будет больше в 4,27 раза и масса бруса коробчатого сечения – в 1,52 раза.

15 Определение деформаций при изгибе

При выполнении деформационных расчетов при изгибе стоит необходимость определения двух основных параметров перемещения какого — либо сечения k (рисунок 15.1):

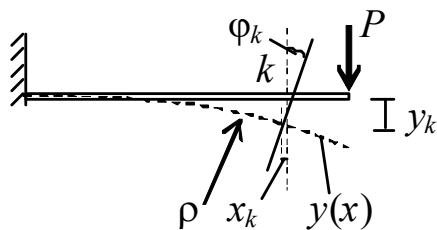


Рисунок 15.1 – Деформации сечения

- 1) линейного перемещения - прогиба y_k ,
- 2) углового перемещения - угла поворота сечения φ_k .

Другое линейное перемещение - вдоль оси стержня x_k в обычных строительных и машиностроительных конструкциях, обладающих значительной жесткостью, намного меньше поперечного y_k , и им пренебрегают. В силу малости угла φ_k можно записать:

$$\varphi_k \approx \operatorname{tg} \varphi_k = y'_k, \quad (15.1)$$

т. е. угол поворота сечения при изгибе жесткого стержня равен первой производной от выражения прогиба $y(x)$. Функция $y(x)$ называется *уравнением упругой линии* и описывает ту кривую, положение которой принимает ось изогнутого стержня.

15.1 Дифференциальное уравнение упругой линии

Для любой точки оси стержня по выражению (14.2) можно вычислить радиус кривизны ρ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}, \quad (15.2)$$

с другой стороны, из курса высшей математики выражение кривизны связано с производными уравнения кривой следующей зависимостью

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}. \quad (15.2)$$

Приравнявая выражения (14.2) и (15.2), получим *точное дифференциальное уравнение упругой линии*

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = -\frac{M}{EI_z}. \quad (15.3)$$

Выражение $E I_z$ называется *жесткостью при изгибе*.

В практических расчетах пользуются *приближенным дифференциальным уравнением упругой линии* (15.4), которое получается из точного (15.3), если пренебречь в этом выражении квадратом первой производной y' по сравнению с единицей в знаменателе.

$$y'' = \frac{M}{EI_z}. \quad (15.4)$$

В общем виде решение уравнения (17.4) имеет вид

$$y' = \int \frac{M}{EI_z} dx + C, \quad (15.5)$$

$$y = \int dx \int \frac{M}{EI_z} dx + Cx + D. \quad (15.6)$$

Константы C и D находят из граничных условий. Ими являются условия закрепления (опирания) стержня. Варианты записи граничных условий показаны на рисунке 15.2.

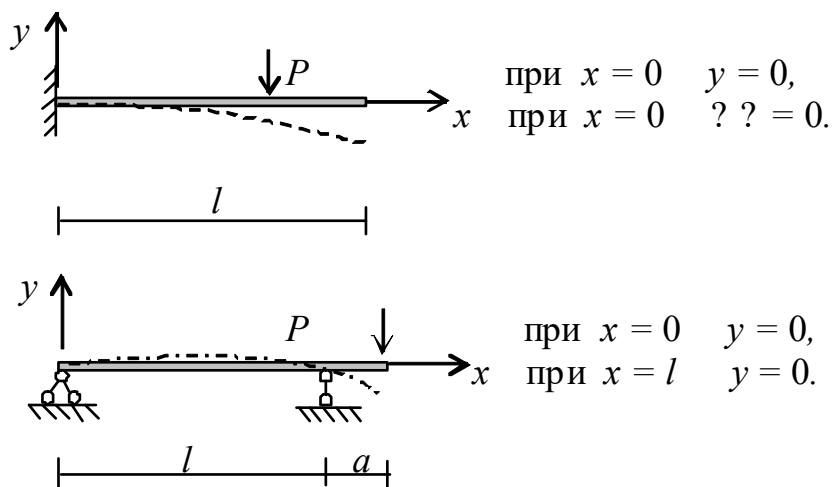


Рисунок 15.2 - Граничные условия

Пример 17. Вычислить прогиб и угол поворота конца консоли, нагруженной сосредоточенной силой P (рисунок 15.3).

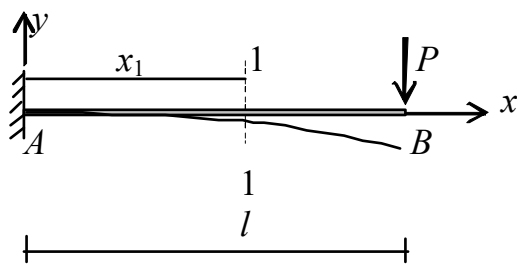


Рисунок 15.3 – Пример 17

Запишем выражение изгибающего момента и подставим его в выражения (15.4) – (15.6)

$$M_{l-l} = -P(l-x_l),$$

$$y'' = \frac{M}{EI} = -\frac{P(l-x)}{EI},$$

$$y' = \int \frac{M}{EI_z} dx + C = -\frac{P}{EI} \int (l-x) dx + C = -\frac{Plx}{EI} + \frac{Px^2}{2EI} + C,$$

$$y = \int y' dx + D = -\frac{P}{2EI} \int (2lx - x^2) dx + Cx + D = -\frac{Plx^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + Cx + D.$$

Получили уравнения углов поворота и прогибов. Для нахождения констант C и D воспользуемся граничными условиями. При выбранном начале координат они имеют вид:

1) при $x = 0$ $y' = 0$;

2) при $x = 0$ $y = 0$.

Подставим первое граничное условие в уравнение углов поворота:

$$y' = C = 0, \quad C = 0.$$

Второе граничное условие подставим в уравнение прогибов с учетом значения « C »

$$y = D = 0, \quad D = 0.$$

Окончательно уравнение прогибов принимает вид

$$y = \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 l}{2} \right),$$

аналогично уравнение углов поворота будет

$$y' = \frac{P}{EI} \left(-lx + \frac{x^2}{2} \right).$$

Вычисляем искомые деформации, приняв в полученных уравнениях $x=l$

$$y_B = y_{x=l} = -\frac{Pl^3}{3EI}, \quad y'_B = y'_{x=l} = -\frac{Pl^2}{2EI}.$$

Знак «минус» в выражении прогиба говорит о том, что перемещение происходит в сторону, обратную направлению оси y , а в выражении угла поворота минус означает поворот сечения по часовой стрелке.

Метод непосредственного интегрирования удобен при наличии одного - двух участков, поскольку уравнение (15.4) записывается для каждого участка и при 2 участках уже стоит необходимость нахождения 4 постоянных интегрирования, а при 3 участках – 6 постоянных и т. д. В этих случаях начальными условиями, кроме условий закрепления стержня, служат условия равенства деформаций на границах участков.

15.2 Определение перемещений в стержневых системах методом Мора

Это универсальный метод, который заключается в использовании известной формулы (интеграла) Мора (15.7) для определения перемещений (линейных перемещений и углов поворота) в любой стержневой системе от произвольной нагрузки. Формула получена из известной теоремы Мора о равенстве возможных работ внешних и внутренних сил. Метод широко применяется при расчете статически неопределимых систем.

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{N_p N_1}{EA} dx + \sum \int_0^l \frac{k Q_p Q_1}{GA} dx, \quad (15.7)$$

где Δ – искомое перемещение, M_p , Q_p , N_p – внутренние усилия в стержневой системе, вызванные заданной внешней нагрузкой, M_1 , Q_1 , N_1 – внутренние усилия в стержневой системе, вызванные единичной нагрузкой, приложенной по направлению искомого перемещения в той точке (в том сечении), где определяется перемещение (при нахождении линейного перемещения прикладывается единичная сила $P = 1$, при вычислении угла поворота прикладывается единичный момент $m = 1$, EI , EA , GA – жесткости при изгибе, растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно, k – поправочный коэффициент, учитывающий распределение касательных напряжений, l – длина участка.

Суммирование производится по всем участкам.

При расчете балок средней и большой длины и рамных конструкций влиянием продольной и поперечной сил (вторым и третьим членами формулы (15.7) можно пренебречь. В этом случае интеграл Мора примет вид

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} dx \quad (15.8)$$

При расчете стержней, работающих на растяжение (сжатие), и ферм в (15.7) останется только второй интеграл. В конструкциях, испытывающих

значительные поперечные силы (например, в коротких балках), необходимо учитывать влияние поперечных сил.

Пример 18. Вычислить прогиб и угол поворота свободного конца консоли (рисунок 15.4) от действия распределенной нагрузки.



Рисунок 15.4 – Пример 18

1. В данной задаче один участок. Запишем для него выражение изгибающего момента в грузовом состоянии (рисунок 15.4, а):

$$M_p = -\frac{qx_1^2}{2}.$$

2. Для вычисления прогиба свободного конца прикладываем на свободном конце единичную силу $P = 1$, т. е. создаем 1-е единичное состояние (рис. 15,4, б) и записываем выражение для единичного момента

$$M_1 = -1 \cdot x_1.$$

3. Записываем и вычисляем интеграл Мора

$$\Delta = y_C = \int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} dx = \int_0^l \frac{\left(-qx_1^2/2\right)(-1 \cdot x_1)}{EI} dx = \frac{qx^4}{8EI} \Big|_0^l = \frac{ql^4}{8EI}.$$

Знак «+» у Δ говорит о том, что перемещение происходит по направлению единичной силы $P = 1$.

4. Для вычисления угла поворота прикладываем в заданном сечении единичный момент (рисунок 15.4, в) и записываем выражение для единичного момента M_2 на данном участке

$$M_2 = m = 1.$$

5. Вычисляем интеграл Мора при 2-м единичном нагружении

$$\Delta = \varphi_C = \int_0^l \frac{M_p M_2}{EI} dx = \int_0^l \frac{(-qx_1^2/2) \cdot 1}{EI} dx = -\frac{qx^3}{6EI} = -\frac{ql^3}{6EI}.$$

Знак «минус» говорит о том, что перемещение (поворот сечения C) происходит против направления единичного момента $m = 1$, т. е. по часовой стрелке.

Обычно, в зависимости от нагрузки и условий опирания, стержневую систему приходится разбивать на несколько участков, и интегрирование по формуле (17.8) становится весьма трудоемким. В этом случае удобно использовать правило Верещагина для вычисления интеграла Мора (17.8). Оно заключается в следующем: если построить грузовую и единичную эпюры M_p и M_1 , то результат их «перемножения» (вычисления интеграла) на отдельном участке равен произведению площади грузовой эпюры ω_p на ординату единичной эпюры y_c , взятую под центром тяжести площади грузовой эпюры (рисунок 17.5).

$$\frac{1}{EI} \int_0^l M_p M_1 dx = \omega_p y_c. \quad (15.9)$$

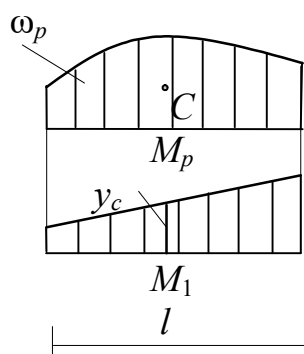


Рисунок 15.5 - Правило Верещагина

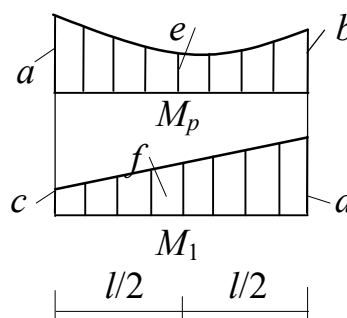


Рисунок 15.6 – Правило Симпсона

В тех случаях, когда определение положения центра тяжести и площади грузовой эпюры приводит к громоздким вычислениям, проще для «перемножения» эпюр воспользоваться формулой Симпсона (15.10)

$$\int_0^l M_p M_1 dx = \frac{l}{6} (ac + 4ef + bd) EI, \quad (15.10)$$

здесь a, b, c, d — ординаты на грузовой и единичной эпюрах в начале и конце участка длиной l (рисунок 15.6); e, f — ординаты в середине участка.

Пример 19. Для заданной балки (рисунок 15.7, а) вычислить прогибы в сечениях C и D , показать вид изогнутой линии. При определении деформаций воспользоваться методом Мора.

Для определения деформаций в заданных сечениях необходимо построить грузовую эпюру M от заданной нагрузки P и q , а также единичные

эпюры M_i , полученные от воздействия на балку соответствующих единичных нагрузок P_i .

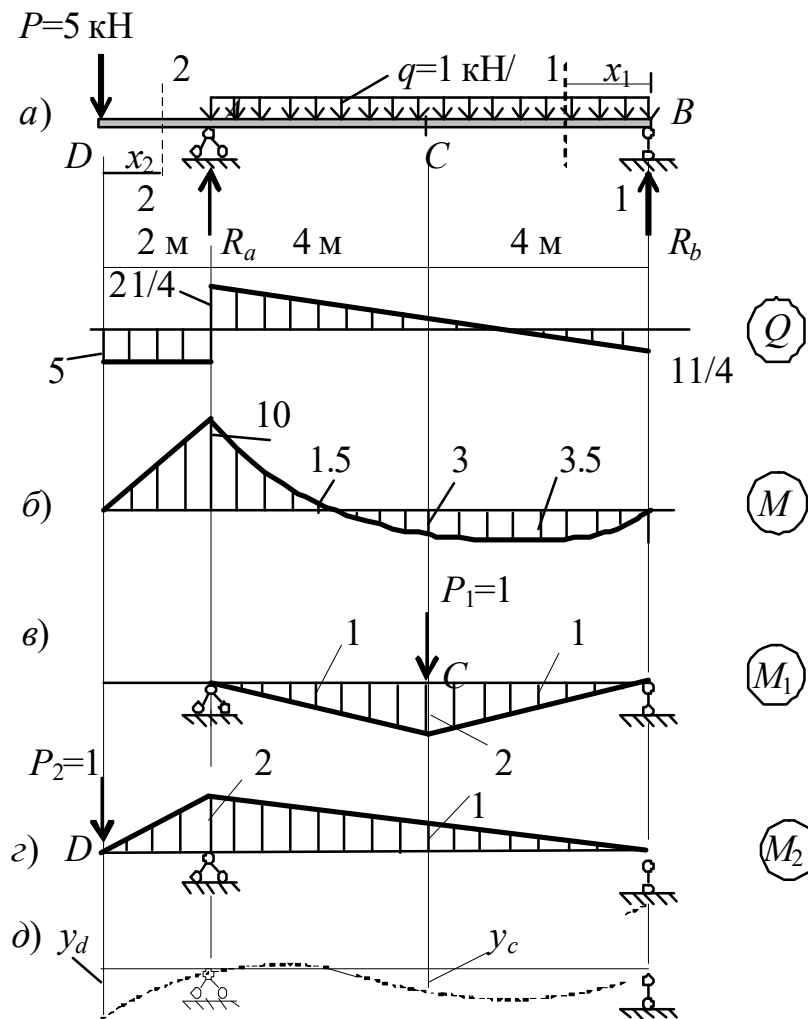


Рисунок 15.7 – Пример 19

Не останавливаясь на порядке построения грузовых эпюр M и Q , покажем их в окончательном виде (рисунок 15.7, б). Для построения единичных эпюр создаем единичные состояния (заданная балка нагружается только соответствующей единичной силой, приложенной в том сечении, в котором определяется перемещение). В соответствии с правилами строим эпюры M_1 от силы $P_1=1$, приложенной в точке C , и M_2 от силы $P_2=1$, приложенной в точке D . На рисунке единичные состояния и соответствующие единичные эпюры совмещены (рисунок 15.7, в и г).

Перемножение эпюр производим по правилу Симпсона

$$y_c = \frac{1}{EI} \left[\frac{4}{6} (0 \cdot 10 - 4 \cdot 1.5 \cdot 1 + 3 \cdot 2) + \frac{4}{6} (3 \cdot 2 + 4 \cdot 3.5 \cdot 1 + 0) \right] = \frac{80}{6EI}.$$

$$y_d = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 10 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 2 + \frac{8}{6} (10 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 + 0) \right] = \frac{144}{6EI}.$$

При вычислении y_d перемножение эпюр на участке DA произведено по правилу Верещагина (15.9), на участке AB – по формуле Симпсона (15.10).

16 Основы теории напряженного и деформированного состояния

Вырежем в районе точки A объемного тела (рисунок 16.1) элементарно малый элемент, по граням которого действующие напряжения практически не изменяются (рисунок 16.2).

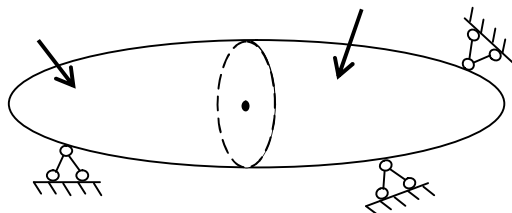


Рисунок 16.1 – Объемное тело

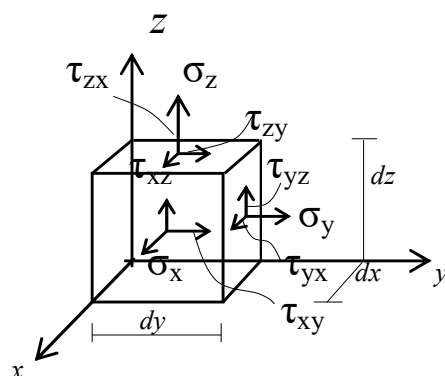


Рисунок 16.2 – Общий случай напряженного состояния

В этом случае имеет место общий случай напряженного состояния в точке. Если все касательные напряжения равны нулю, то площадки, на которых $\tau = 0$ называются **главными**, а нормальные напряжения σ , действующие на этих площадках – **главными напряжениями**.

При трехосном или объемном напряженном состоянии имеем такую картину (рисунок 16.3).

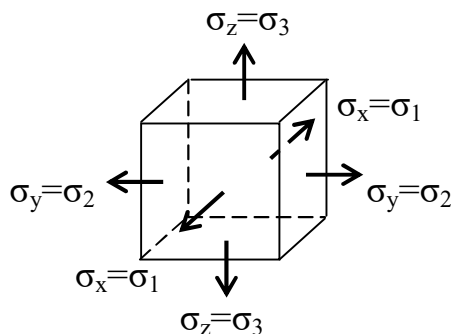


Рисунок 16.3 – Трехосное напряженное состояние

Принято, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Если $\sigma_3 = 0$, то имеем случай плоского (двухосного) напряженного состояния. Если $\sigma_3 = \sigma_2 = 0$, будем иметь линейное (одноосное) напряженное состояние.

16.1 Линейное напряженное состояние

Рассмотрим элемент, нагруженный центрально приложенной продольной силой (рисунок 16.4). Напряжения в поперечном сечении составят

$$\sigma = \frac{P}{A}. \quad (16.1)$$

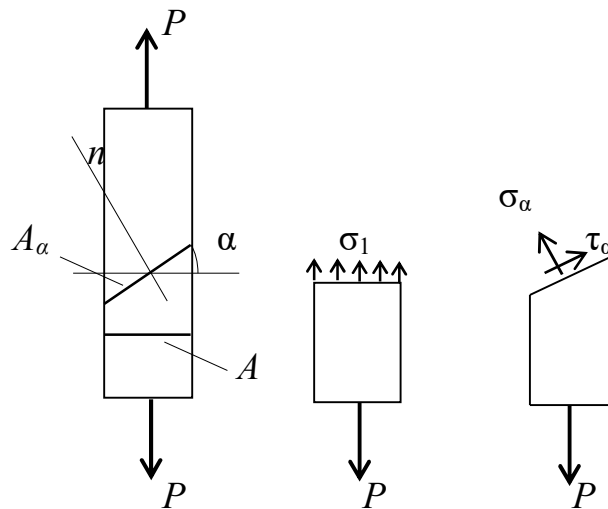


Рисунок 16.4 – Линейное напряженное состояние

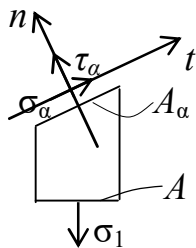


Рисунок 16.5

Выделим в районе наклонной площадки $A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$ элемент (рисунок 16.5) и спроецируем действующие по его граням напряжения на оси n и t , умножив напряжения на площадки, по которым они действуют.

$$\sum n = 0. \quad \sigma_\alpha \cdot A_\alpha = \sigma_1 \cdot A \cdot \cos \alpha.$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 A \cos \alpha}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha. \quad (16.2)$$

$$\sum t = 0, \quad \tau_\alpha \cdot A_\alpha = \sigma \cdot A \cdot \sin \alpha.$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma \cdot A \cdot \sin \alpha}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \sigma_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \quad (16.3)$$

Проанализируем формулы 16.2 и 16.3.

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\max} = \sigma_1 \text{ при } \alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} \text{ при } \alpha = 45^\circ;$$

$$\text{При } \alpha = 90^\circ \quad \sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0.$$

На площадке, повернутой на угол $\alpha + 90^\circ$

$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_1 \sin^2 \alpha$, тогда $\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_1$, т.е. величина постоянная.

$\tau_{\alpha+90^\circ} = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha$, т.е. $\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+90^\circ}$

Это свойство называется *закон парности касательных напряжений*.

Правила знаков – α положительный при вращении против часовой стрелки, τ положительно при вращении элемента по часовой стрелке.

16.2 Плоское напряженное состояние

Определение плоского напряжённого состояния (рисунок 16.6)

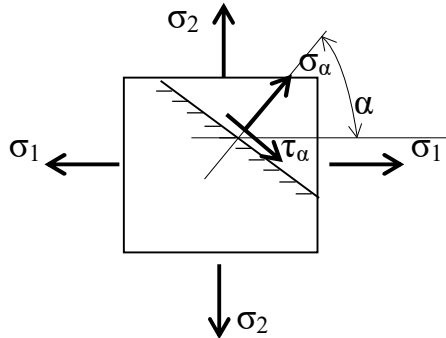


Рисунок 16.6 – Плоское напряженное состояние

Определим напряжения по наклонной площадке используя выражения (16.2) и (16.3), применив их к напряжениям σ_1 и σ_2 .

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha \quad (16.4)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha - \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha,$$

откуда
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (16.5)$$

Анализ:

а) при $\alpha = 45^\circ$ имеем $\tau_\alpha = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$;

б) при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ имеем $\sigma_\alpha = \sigma$, $\tau_\alpha = 0$. Имеет место равномерное растяжение (сжатие);

в) при $\sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_2 = -\sigma$ на площадках с $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 135^\circ$ $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_\alpha = \pm \sigma$. Имеет место чистый сдвиг.

Рассмотрим случай плоской задачи при действии произвольных напряжений (рисунок 16.7).

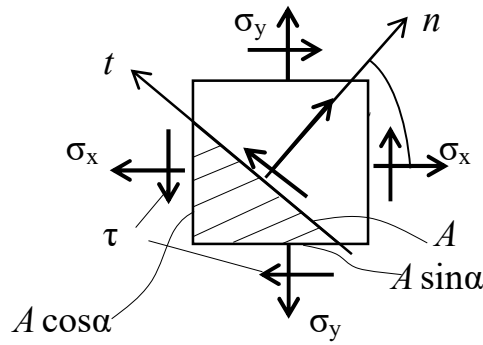


Рисунок 16.7 – Плоское напряженное состояние

Рассмотрим равновесие отсеченной (заштрихованной) части элемента.

$$\Sigma n = 0. \quad \sigma_{\alpha} \cdot A - \sigma_x A \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sigma_y A \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \tau \cdot A \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \tau \cdot A \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma t = 0. \quad \tau_{\alpha} A - \sigma_x A \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \sigma_y A \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \tau \cdot A \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \tau \cdot A \sin \alpha \cdot \sin \alpha = 0.$$

Сокращая на «A» получим

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha. \quad (16.6)$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cdot \cos 2\alpha \quad (16.7)$$

При изменении угла наклона площадки α будут меняться и напряжения σ_{α} и τ_{α} . Для определения положения главных площадок необходимо приравнять нулю $d\sigma_{\alpha}/d\alpha$, либо приравнять нулю касательные напряжения τ_{α} , которых нет на главных площадках. В результате получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (16.8)$$

Используя соответствующие тригонометрические формулы получим выражение для определения величины главных напряжений:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}. \quad (16.9)$$

Приравняв нулю $d\tau_{\alpha}/d\alpha$, получим выражение для экстремальных касательных напряжений

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (16.10)$$

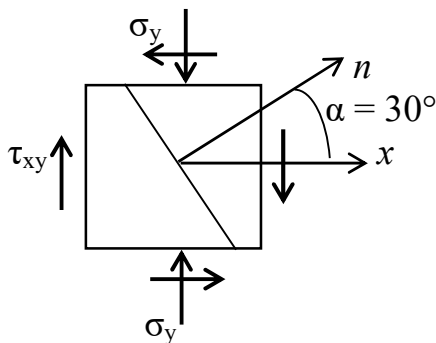


Рисунок 16.8 – Пример 20

Пример 20. Для элемента, нагруженного как показано на рисунке 16.8, необходимо:

- 1) вычислить напряжения по наклонной площадке, если $\sigma_y = 140$ МПа, $\tau_{xy} = 80$ МПа.
- 2) определить положение главных площадок и величину главных напряжений.

Для определения напряжений по заданной площадке воспользуемся выражениями (16.6) и (16.7).

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha = -140 \cdot (0,5)^2 - 80 \cdot 0,87 = -35 - 69,6 = -104,6 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cdot \cos 2\alpha = -70 \cdot 0,87 - 80 \cdot 0,5 = -60,9 - 40 = -100,9 \text{ МПа}.$$

По формуле (16.8) определяем положение главных площадок.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot (-80)}{-(-140)} = -1,14. \quad 2\alpha_0 = -48^{\circ}40', \quad \alpha_0 = -24^{\circ}20'.$$

Значения главных напряжений по формуле (16.9) будут

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y)^2 + 4\tau^2} = \frac{-140}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{140^2 + 4 \cdot 80^2} = -70 + 106,4 = 36,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\min} = -70 - 106,4 = -176,4 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \pm 0,5 \cdot \sqrt{140^2 + 4 \cdot 80^2} = \pm 106,4 \text{ МПа}.$$

Результаты расчетов показаны на рисунке 16.9.

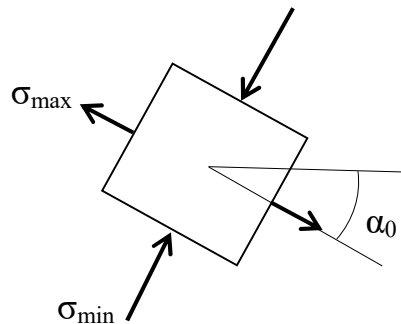


Рисунок 16.9 – Главные напряжения

16.3 Зависимость между деформациями и напряжениями при плоском и объемном напряженном состоянии

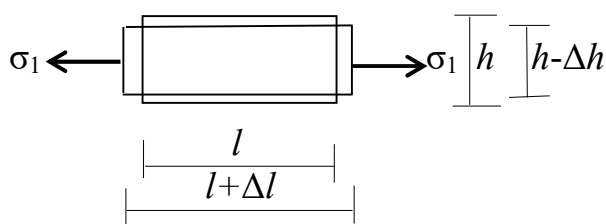


Рисунок 16.10 – Деформации элемента

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{21} = \frac{\Delta h}{h}.$$

При линейном напряженном состоянии картина деформаций показана на рисунке 16.10. Используя связь между абсолютной и относительной деформациями можно записать:

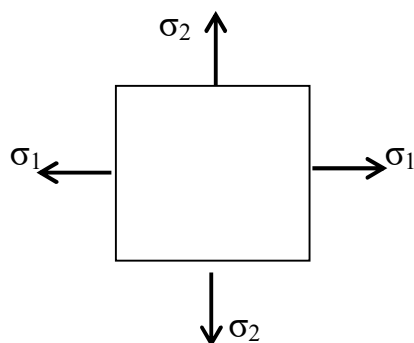
Через ε_{11} и ε_{21} обозначены перемещения по первому (горизонтальному) и второму (вертикальному) направлениям, вызванные первым воздействием.

Как показывают эксперименты

$$\varepsilon_2 = -\mu \varepsilon_1, \quad (16.11)$$

где μ – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Выражения для напряжений были получены ранее: $\sigma_1 = \varepsilon_1 \cdot E$, $\sigma_2 = 0$.



В случае плоского напряженного состояния (рисунок 16.11) при действии только σ_1 получим

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_{21} = -\mu\varepsilon_{11} = -\mu\frac{\sigma_1}{E}.$$

При действии σ_2 будет

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_{12} = -\mu\varepsilon_{22} = -\mu\frac{\sigma_2}{E}.$$

Рисунок 16.11 – Плоское напряженное состояние

Тогда при суммарном воздействии σ_1 и σ_2 получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}, \quad (16.12)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E}.$$

Получили обобщенный закон Гука для плоского напряженного состояния. Зная относительные деформации ε_1 и ε_2 можно определить σ_1 и σ_2 .

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) \quad (16.13)$$

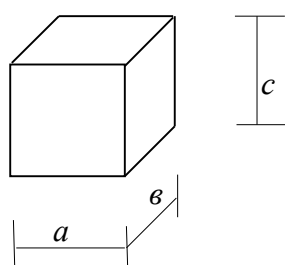
$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1).$$

Для объемного напряженного состояния обобщенный закон Гука имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Деформации ε_1 , ε_2 и ε_3 в направлении главных напряжений называются *главными деформациями*.

Зная ε_1 , ε_2 и ε_3 можно определить изменение объема при деформации.



Первоначальный объем тела (рисунок 16.12)

$$V_0 = a \cdot b \cdot c.$$

После приложения нагрузки объем составит:

$$\begin{aligned} V &= (a + \varepsilon_1 a)(b + \varepsilon_2 b)(c + \varepsilon_3 c) = \\ &= abc + abc \varepsilon_1 + abc \varepsilon_2 + abc \varepsilon_3 + \text{б.м.в.с.п.} = \\ &= V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Рисунок 16.12

Относительная объемная деформация составит

$$\varepsilon_v = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (16.15)$$

Подставляя (15.14) в (15.15) получим:

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (16.16)$$

При трехосном растяжении $\varepsilon_v > 0$, а это возможно, если $1-2\mu$ так же > 0 . То есть коэффициент Пуассона не может быть больше 0,5.

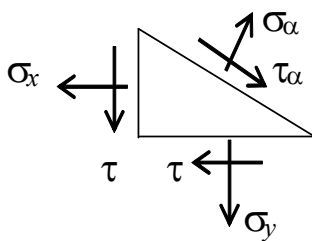
Полученные формулы справедливы и при действии не только главных напряжений, а любых других. Влияние касательных напряжений τ не сказывается, т.к. τ не вызывают линейных деформаций.

17 Сдвиг

На практике стоит необходимость проведения расчетов на прочность по касательным напряжениям независимо от того, по каким площадкам они действуют – по площадкам чистого сдвига (например, при кручении круглого стержня, (рисунок 17.2 (а)), или по любым другим площадкам (рисунок 17.2 б). Такие расчеты называются расчетом на *сдвиг* или *срез*. Для дерева и бетона это расчет на *скалывание*.

17.1 Напряженное состояние при чистом сдвиге

Ранее мы получили выражения для напряжений по наклонной площадке (рисунок 17.1).



$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau \sin 2\alpha.$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cdot \cos 2\alpha$$

При чистом сдвиге (рисунок 17.2 (а))

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \text{ тогда:}$$

$$\sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha.$$

Рисунок 17.1 – Напряжения по наклонной площадке

При $\alpha = 45^\circ$ (рисунок 17.2(б)) $\sigma_\alpha = \sigma_{\max} = \pm \tau$, $\tau_\alpha = 0$, то есть это главные площадки. Главные напряжения при этом принимают вид

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau,$$

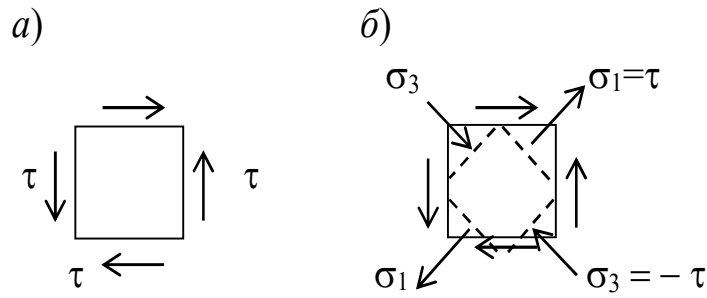


Рисунок 17.2 – Чистый сдвиг

17.2 Деформации при сдвиге

Рассмотрим бесконечно малый элемент объемом $V = dx \times dy \times t$, по граням которого действуют только касательные напряжения (рисунок 17.3). Здесь t – толщина элемента.

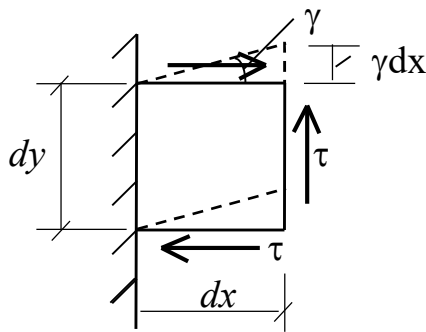


Рисунок 17.3 – Деформации при сдвиге

В результате элемент получает угловую деформацию γ , называемую *сдвигом*. Опыты показывают, что до определенных пределов угловые деформации прямо пропорциональны касательным напряжениям.

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (17.1),$$

где G – модуль упругости второго рода, или модуль сдвига.

Вычислим объемную деформацию элемента.

Согласно выражению (16.16)

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

при $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$, $\varepsilon_v = 0$. Таким образом, при сдвиге малый элемент изменяет только форму, объемная деформация при сдвиге отсутствует.

Рассматривая потенциальную энергию при сдвиге можно получить связь между модулями упругости при растяжении и сдвиге.

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (17.2)$$

Выражение (17.2) показывает однозначную связь между характеристиками материала при условии выполнения закона Гука.

17.3 Определение напряжений и деформаций при кручении вала круглого сечения

Рассмотрим поведение вала круглого сплошного сечения под действием крутящего момента M (рисунок 17.4).

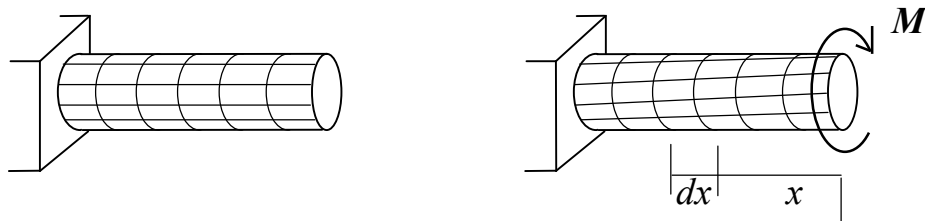


Рисунок 17.4 – Деформация кручение

Если до приложения нагрузки на поверхность вала нанести прямоугольную сетку, то после приложения M :

1) сетка будет состоять из параллелограммов, т. е. имеет место деформация сдвига, а в поперечных сечениях будут возникать касательные напряжения. По закону парности касательных напряжений такие же напряжения τ будут возникать и в продольных сечениях;

2) расстояние между окружностями нанесенной сетки и диаметр вала при деформации не изменятся. По гипотезе плоских сечений можно допустить, что

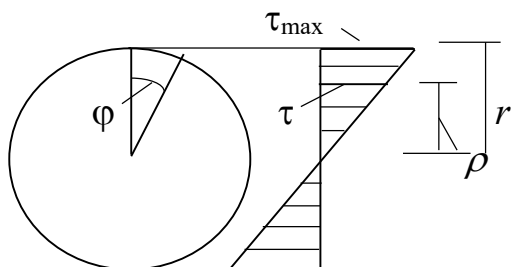


Рисунок 17.5 – Распределение напряжений при кручении

поперечные сечения как жесткое целое будет поворачиваться на некоторый угол. Тогда и радиусы всех поперечных сечений будут поворачиваться, оставаясь прямыми (рисунок 17.5).

Таким образом, в поперечных сечениях будут возникать только касательные напряжения (подтверждено опытами).

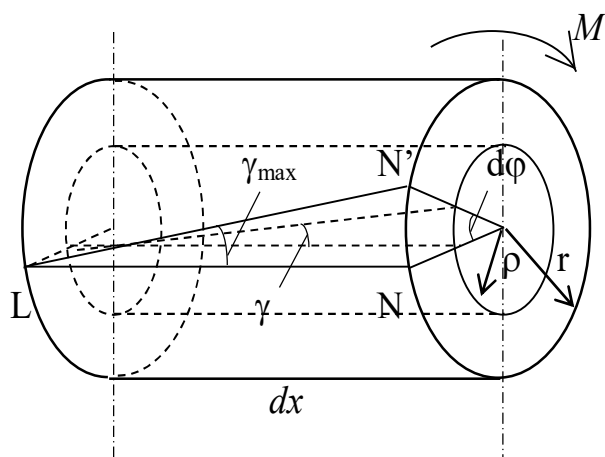


Рисунок 17.6 – Деформации элемента при кручении

Рассмотрим более детально поведение элемента вала длиной dx (рисунок 17.6). Отрезок LN в результате деформации повернется на угол

$$\gamma_{\max} = \frac{NN'}{LN} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx} \quad (a)$$

Если мысленно выделить внутри этого бруса цилиндр радиусом ρ , то его образующая повернется на угол

$$\gamma = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dx}. \quad (6)$$

По закону Гука при сдвиге

$$\tau = \gamma \cdot G = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dx} G \quad (B)$$

то есть напряжения прямо пропорциональны расстоянию от центра тяжести сечения. При $\rho = 0$, $\tau = 0$. Наибольшего значения касательные напряжения $\tau_{\max}$ достигают при $\rho = r$ (рис. 17.5).

С другой стороны

$$M = \int_A \tau \cdot dA \cdot \rho = \frac{d\varphi}{dx} G \int_A \rho^2 dA = \frac{d\varphi}{dx} G I_\rho$$

($\int_A \rho^2 dA = I_\rho$ - полярный момент инерции), откуда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{G I_\rho}. \quad (Г)$$

Подставим (Г) в (B).

$$\tau = \frac{M \cdot \rho}{I_\rho}. \quad (17.3)$$

Выражение (17.3) позволяет определить напряжения в произвольной точке круглого бруса.

Наибольшие напряжения на поверхности бруса (при $\rho = r$) вычисляются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_\rho}, \quad (17.4)$$

где $W_\rho = \frac{J_\rho}{r} = \frac{\pi r^3}{2}$ – полярный момент сопротивления.

Условие прочности при кручении получает вид

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_\rho} \leq [\tau]. \quad (17.5)$$

Из выражения (17,5) можно получить величину необходимого диаметра вала или величину допустимого крутящего момента. Так, учитывая, что

$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0.2d^3$, можем записать диаметр вала из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{0.2[\tau]}} = 1.72 \sqrt[3]{\frac{M}{[\tau]}} \quad (17.6)$$

Допускаемый крутящий момент при известном диаметре вала будет

$$[M] = W_\rho \cdot [\tau] \quad (17.7)$$

Выразим из формулы (Г) малый угол поворота

$$d\varphi = \frac{M}{G I_\rho} dx. \quad (Д)$$

Полный угол закручивания участка вала длиной l получим, проинтегрировав выражение (д)

$$\varphi = \int_0^l \frac{M}{GI_\rho} dx = \frac{M \cdot l}{GI_\rho} \quad (17.8)$$

Угол закручивания, определяемый по формуле (17.8), вычисляется в радианах. Произведение GI_ρ носит название *жесткость* вала при кручении.

При расчетах на жесткость чаще используют понятие относительного угла закручивания θ с размерностью радиан/метр.

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M}{GI_\rho}. \quad (17.9)$$

Условие жесткости имеет вид

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M}{GI_\rho} \leq [\theta], \text{ или в градусах } \theta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M}{GI_\rho} \leq [\theta] \quad (17.10)$$

где $[\theta]$ – допускаемый угол закручивания. Для валов средних размеров рекомендуется $[\theta] = 0,5^\circ$ на 1 метр, или $0,5 \cdot \pi / 180 = 0.0087$ радиан/метр.

Необходимый диаметр из условия (17.10) получим, имея ввиду, что $J_\rho \approx 0.1d^4$,

$$d = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot M}{0.1 \cdot \pi G [\theta]}} \quad (17.11)$$

17.4 Рациональные типы сечений при кручении

Из выражения (17.3) и рисунка (17.5) видно, что материал, расположенный в центральной части сечения, недогружен. В районе центра тяжести напряжения равны нулю.

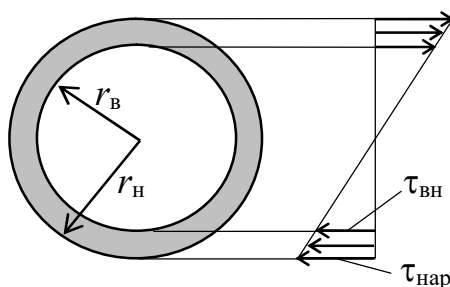


Рисунок 17.7 – Распределение напряжений в трубчатом сечении

Более рациональным будет такое сечение, у которого основная часть площади расположена ближе к периферии. Это кольцевое (трубчатое) сечение, для которого в выражениях для напряжений и деформаций, полученных выше, изменятся только геометрические характеристики. Вид эпюры напряжения для кольца показан на рисунке 17.7.

Полярный момент инерции кольца

$$I_\rho = I_\rho^{\text{нар}} - I_\rho^{\text{вн}} = \frac{\pi r_n^4}{2} - \frac{\pi r_v^4}{2} = \frac{\pi r_n^4}{2} (1 - \alpha^4), \quad (17.12)$$

где $\alpha = \frac{r_b}{r_n}$.

Полярный момент сопротивления кольца

$$W_p = \frac{I_{\rho}^{нар} - I_{\rho}^{вн}}{r_n} = \frac{\pi r_n^4 - \pi r_b^4}{r_n} = \frac{\pi r_n^3}{2} (1 - \alpha^4). \quad (17.13)$$

При решении задач на прочность и жесткость при кручении в качестве исходных данных часто задаются передаваемая мощность N и угловая скорость ω или число оборотов n . В этом случае необходимо использовать следующие зависимости для крутящего момента:

$$M(HM) = \frac{N(Bm)}{\omega(rad/sec)},$$

$$M(HM) = 7162 \frac{N(л.с)}{n(об/мин)},$$

$$M(HM) = 9736 \frac{N(кВт)}{n(об/мин)}.$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad 1 \text{ л.с.} = 0.735 \text{ кВт.}$$

Пример 21. Определить диаметр стального вала, вращающегося с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/сек и передающего мощность $N = 100$ кВт. Допускаемое напряжение $[\tau] = 40$ МПа, допускаемый угол закручивания $[\theta] = 0,5$ град/м, модуль упругости $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Момент, передаваемый валом, определяем как

$$M = \frac{N}{\omega} = \frac{100 \cdot 10^3}{100} = 1000 \text{ Нм.}$$

Крутящий момент во всех сечениях вала будет $M_{кр} = M = 1000 \text{ Нм} = 10^{-3} \text{ МНм}$.

Диаметр вала из условия прочности определяем по формуле 17.6:

$$d = 1/72 \cdot \sqrt[3]{\frac{10^{-3}}{40}} = 1.72 \cdot \sqrt[3]{0.000025} = 0.05 \text{ м} = 50 \text{ мм}$$

По формуле (17.11) определяем диаметр вала из условия жесткости.

$$d = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 10^{-3}}{0.1 \cdot 3.14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0.5}} = 0.052 \text{ м} = 52 \text{ мм.}$$

Принимаем допускаемый диаметр вала – 52 мм.

17.5 Практические расчеты на сдвиг

Ниже рассмотрим основы практических расчетов на сдвиг (срез) заклепочных и сварных соединений. Более подробно эти расчеты рассматриваются в курсах деталей машин и металлических конструкций.

Заклепочное соединение, обеспечивающее соединение двух листов (рисунок 17.8), при воздействии значительных по величине сил P может разрушиться в результате перерезывания заклепок по линии соединения листов.

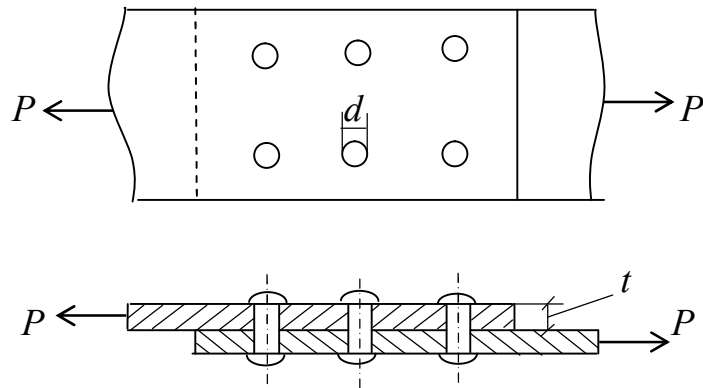
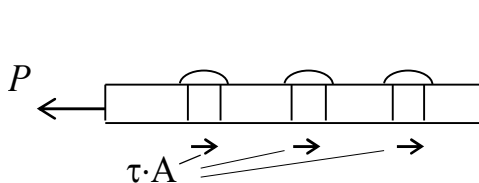


Рисунок 17.8 – Заклепочное соединение



Принято считать, что сила P равномерно распределена между всеми заклепками соединения. Примем, что в зоне разрушения заклепки возникают только касательные напряжения τ , которые к моменту разрыва равномерно распределены по сечению.

Рисунок 17.9 – Срез заклепок

В этом случае можно рассмотреть равновесие одной из пластин в момент разрушения (рисунок 17.9).

$$\sum x = 0, -P + n\tau A = 0.$$

Тогда условие прочности на срез будет иметь вид

$$\tau = \frac{P}{nA} \leq [\tau]_{ср}. \quad (17.14)$$

В выражении (17.14) n – число заклепок (число срезов).

Величина $[\tau]_{ср}$ составляет 0,6 ... 0,8 $[\sigma]_{рас}$.

При двухсрезном (соединение трех листов) или многосрезном заклепочном соединении вместо n необходимо принимать число срезов.

В заклепочном соединении кроме среза заклепка и лист испытывают деформацию *смятия* в результате давления между заклепкой и листом.

Условие прочности на смятие имеет вид

$$\sigma = \frac{P}{n' \cdot A} \leq [\sigma]_{см}, \quad (17.15)$$

где n' – число контактов между заклепкой и листом для одного листа $A = d \cdot t$ – площадь смятия одной заклепки, $[\sigma]_{см} > [\sigma]_{рас}$, для сверленных отверстий $[\sigma]_{см} = 2[\sigma]_{рас}$.

При расчете сварных соединений (рисунок 17.10) условие прочности имеет вид

$$\tau = \frac{P}{A} \leq [\tau]_{\text{свар}}, \quad (17.16)$$

где A – площадь сечения сварного шва.

На практике принимается, что опасное сечение шва совпадает с плоскостью, проходящей через биссектрису m - n прямого угла шва.

Для одного лобового шва площадь опасного сечения равна $b \cdot 0,7k$, для одного флангового шва – $l \cdot 0,7k$, k – катет шва.

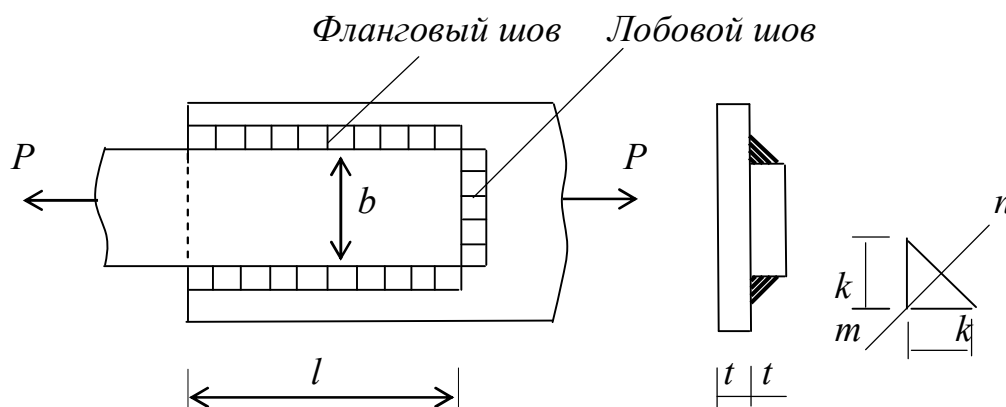
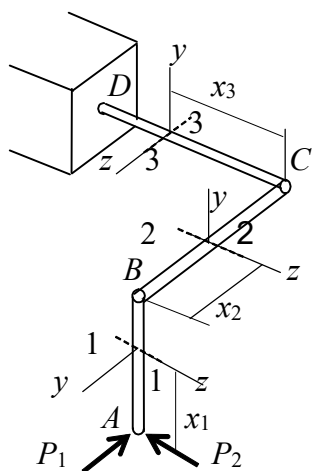


Рисунок 17.10 – Сварные соединения

18 Сложное сопротивление (постановка задачи)

В общем случае элементы конструкций, как правило, испытывают несколько видов простых деформаций одновременно. Такое состояние называется *сложным сопротивлением*. Так, стержень, показанный на рисунке 18.1, испытывает по участкам:



Участок AB . Здесь возникают внутренние усилия в виде изгибающих моментов M_z , M_y и поперечных сил Q_z и Q_y . Имеет место случай *косоугольного изгиба*. При этом

$$M_z = P_1 x_1, \quad M_y = P_2 x_1,$$

$$Q_z = P_2 \text{ и } Q_y = P_1.$$

На участке BC возникают: продольная сила $N = -P_1$; крутящий

Рисунок 18.1 – Общий случай сложного сопротивления

момент $M_{кр} = P_2 l_{AB}$; изгибающие моменты $M_z = P_1 l_{AB}$, $M_y = P_2 x_2$ и поперечная сила $Q_z = P_2$. Здесь имеет место *общий случай сложного сопротивления*.

Участок CD также испытывает сложное сопротивление.

Принято различать следующие виды сложного сопротивления:

Косой изгиб (рисунок 18.2), когда в поперечном сечении одновременно возникают два изгибающих момента M_z и M_y .

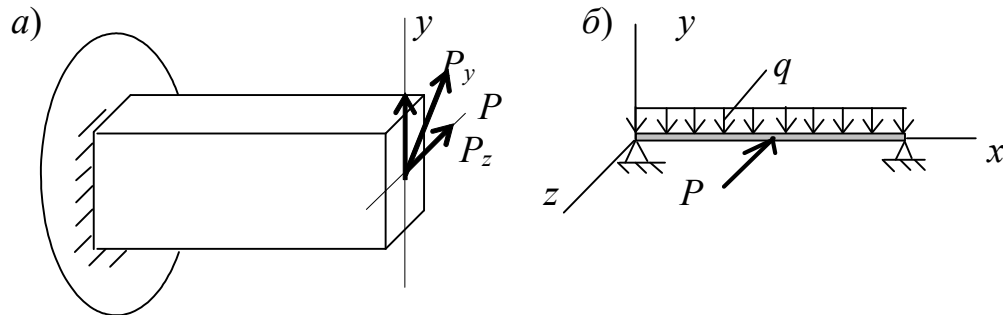


Рисунок 18.2 – Косой изгиб

Изгиб с растяжением (сжатием) (рисунок 18.3).

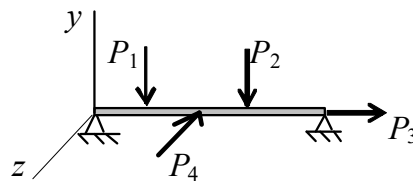
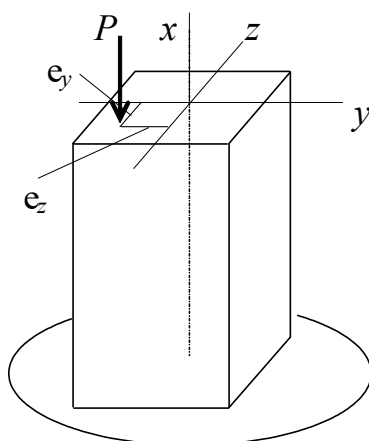


Рисунок 18.3 – Изгиб с растяжением



Частный случай изгиба с растяжением (сжатием) – *внецентренное растяжение (сжатие)* (рисунок 18.4), когда от действия одной силы P , действующей вдоль оси стержня возникают продольная сила и изгибающие моменты:

$$N = -P, \quad M_y = Pz_p, \quad M_z = Py_p,$$

где $y_p = e_z$ и $z_p = e_y$ – эксцентриситеты точки приложения силы P .

Рисунок 18.4 – Внецентренное сжатие

Изгиб с кручением (рисунок 18.5).

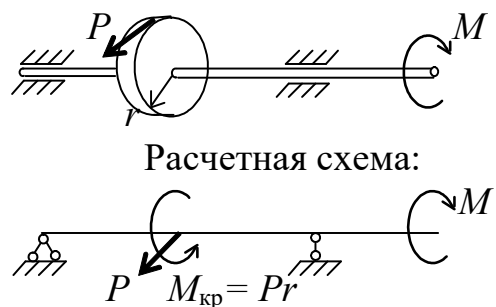


Рисунок 18.5 – Изгиб с кручением

Порядок решения задач на прочность при сложном сопротивлении остается тем же, что и в случае простых деформаций. По эпюрам внутренних усилий определяется опасное (опасные) сечение. В опасном сечении учитываются одновременно влияния изгибающих моментов и продольной силы.

Условие прочности при сложном сопротивлении имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \sigma^N + \sigma^{M_z} + \sigma^{M_y} \leq [\sigma]. \quad (18.1)$$

Особым случаем является изгиб с кручением, поскольку при изгибе возникают нормальные напряжения σ , а $M_{кр}$ вызывается касательными напряжениями τ . В этом случае пользуются одной из *гипотез прочности*, которые позволяют сложное напряженное состояние свести к эквивалентному линейному состоянию (рисунок 18.6) и воспользоваться условием прочности в виде

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma]. \quad (18.2)$$

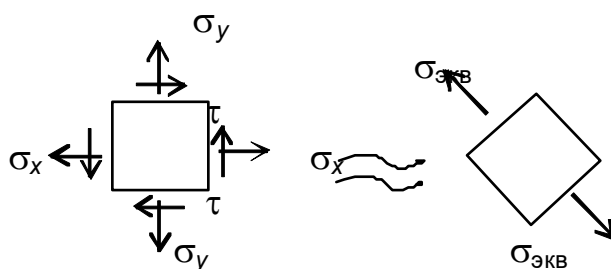


Рисунок 18.6 – Эквивалентные напряжения

Гипотезы прочности. В проектной практике наибольшее применение получили гипотеза наибольших касательных напряжений (3-я гипотеза) и энергетическая гипотеза (4-я гипотеза).

По 3-й гипотезе условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (18.3)$$

и при изгибе с кручением получим

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_u^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (18.4)$$

По 4-й гипотезе

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (18.5)$$

и при изгибе с кручением получим

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_u^2 + 0.75M_{\text{кр}}^2}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (18.6)$$

Гипотеза наибольших касательных напряжений чаще применяется при расчете деталей машин, 4-я при расчете строительных конструкций.

18.1 Косой изгиб

Методику расчета при косом изгибе рассмотрим на примере консольного стержня прямоугольного сечения, нагруженного в двух плоскостях (рис. 18.7)

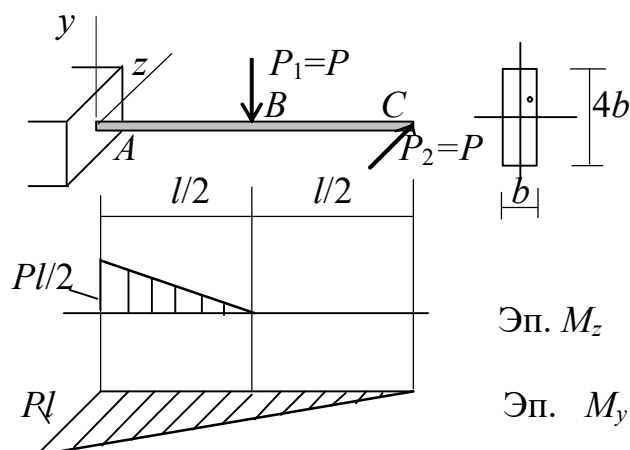


Рисунок 18.7 – Косой изгиб

Порядок решения:

1) строим эпюры моментов от силы P_1 в вертикальной плоскости (эп. M_z) и от силы P_2 в горизонтальной плоскости (эп. M_y). По эпюрам определяем опасное сечение. В нашем примере им будет сечение A .

2) записываем выражение для нормальных напряжений в произвольной точке опасного сечения E

$$\sigma_E = \sigma_E^{M_z} + \sigma_E^{M_y},$$

или

$$\sigma = \frac{M_z y_E}{I_z} + \frac{M_y z_E}{I_y}. \quad (18.7)$$

Выражение (18.7) позволяет вычислить нормальные напряжения в произвольной точке сечения при косом изгибе.

Наибольшие напряжения $\sigma_{\max}$ будут возникать в точках, наиболее удаленных от нулевой линии (рисунок 18.7), т. е. такой линии, на которой $\sigma = 0$. Уравнение нулевой линии в соответствии с выражением (18.7) может быть записано следующим образом

$$\frac{M_z y_0}{I_z} + \frac{M_y z_0}{I_y} = 0,$$

или:

$$y_0 = kz_0, \quad (18.8)$$

где угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$ будет иметь вид

$$k = -\frac{M_y I_z}{I_y M_z}. \quad (18.9)$$

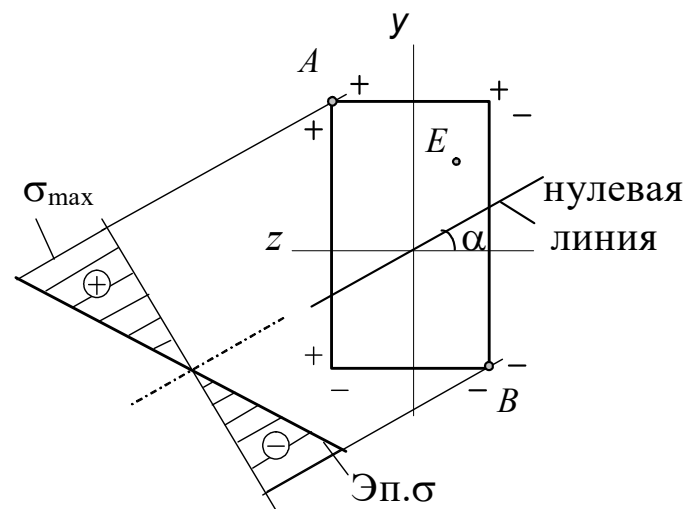


Рисунок 18. 7 – Напряжения при косом изгибе

Уравнение (18.8) выполняется, если в качестве первого квадранта (первой четверти) поперечного сечения служит четверть, в которой напряжения от M_z и M_y положительны. Найдя положение нулевой линии и определив координаты наиболее удаленных от нее точек (A и B на рисунке 18.7), подставим их в уравнение (18.7) для нахождения $\sigma_{\max}$.

Условие прочности при косом изгибе имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (18.10)$$

Подбор сечения можно осуществить, если известно соотношение между моментами сопротивления $k = W_z/W_y$. Подставив в (18.10) $W_z = k \cdot W_y$, можно определить

$$W_y \geq \frac{M_z + kM_y}{k[\sigma]}. \quad (18.11)$$

Для двутавра отношение $k = 6 \dots 14$, для прямоугольника $k = n$, где n – отношение высоты прямоугольника к основанию.

Как было показано выше (рисунок 18.2(а)), косой изгиб будет иметь место и при действии одного силового воздействия, если силовая плоскость, в

которой действует нагрузка не совпадает с плоскостями главных инерций (рисунок 18.8). На примере гибкой линейки, нагруженной как показано на рисунке, можно увидеть, что направление суммарного перемещения сечения не совпадает с силовой плоскостью. Отсюда и название деформации – косой изгиб.

Разложим действующую в силовой плоскости силу P на проекции ее на главные оси $P \cos \alpha$ и $P \sin \alpha$. В произвольном сечении на расстоянии x от торца они будут создавать моменты $M_z = P \cos \alpha \cdot x$ и $M_y = P \sin \alpha \cdot x$.

Напряжения в произвольной точке сечения будут определяться по записанной выше формуле (18.7).

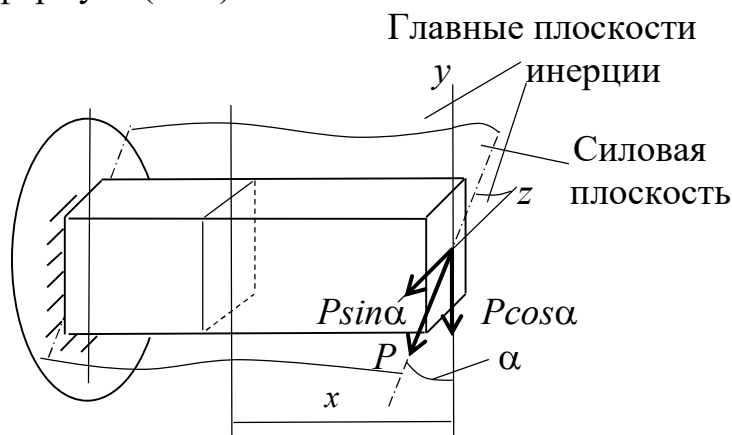


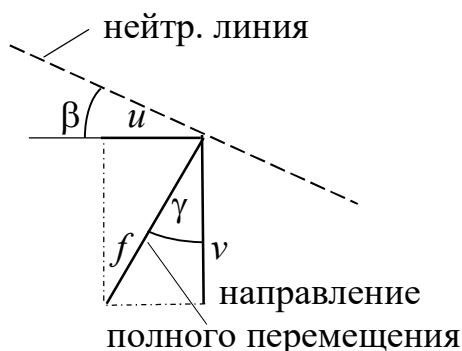
Рисунок 18.8 – Силовая плоскость

Угловой коэффициент, входящий в уравнение нулевой линии, после подстановки в (18.9) значений изгибающих моментов примет вид

$$k = \operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y I_z}{I_y M_z} = -\operatorname{tg} \alpha \frac{I_z}{I_y}.$$

При $I_z = I_y$ $|\alpha| = |\beta|$, то есть нулевая линия будет перпендикулярна силовой плоскости и эффекта косоугольного изгиба не будет.

Определим перемещение торцового сечения как геометрическую сумму вертикального и горизонтального перемещений. Для консольного стержня воспользуемся полученным ранее решением. Вертикальное v и горизонтальное u перемещения будут



$$v = \frac{P \cos \alpha \cdot l^3}{3EI_z}, \quad u = \frac{P \sin \alpha \cdot l^3}{3EI_y}.$$

Полное перемещение составит

$$f = \sqrt{v^2 + u^2}.$$

Направление полного перемещения можно определить как

Рисунок 18.9 – Перемещения при косом изгибе

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{u}{v} = \frac{P \sin \alpha \cdot l^3 \cdot 3EI_z}{3EI_y P \cos \alpha \cdot l^3} = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_z}{I_y} = -\operatorname{tg} \beta.$$

Направление полного перемещения перпендикулярно нейтральной линии (рисунок 18.9).

Пример 22. Деревянная балка изгибается силами $P_1 = 2$ кН и $P_2 = P_3 = 1$ кН (рисунок 18.10). Требуется подобрать прямоугольное сечение балки с отношением сторон $h/b = 2$. Принять $[\sigma] = 10$ МПа

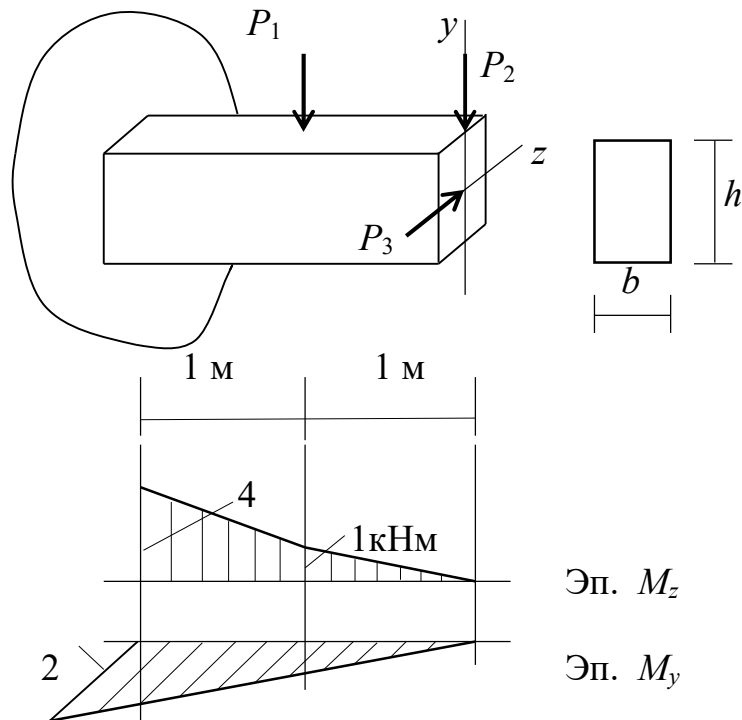


Рисунок 18.10 – Пример 22

Для определения опасного сечения строим эпюры внутренних усилий. Выражение условия прочности будем записывать для опасного сечения, которое находится в заделке. Наибольшие растягивающие напряжения возникают в верхней задней угловой точке, наибольшие сжимающие напряжения в нижней передней точке опорного сечения.

Воспользуемся выражением (18.11) $W_y \geq \frac{M_z + kM_y}{k[\sigma]}$, где $k = \frac{W_z}{W_y}$.

Учитывая, что $W_z = \frac{bh^2}{6}$, а $W_y = \frac{b^2h}{6}$, $k = \frac{bh^2 \cdot 6}{6 \cdot b^2h} = \frac{h}{b} = \frac{2b}{b} = 2$.

Тогда $W_y = \frac{b^2 \cdot 2b}{6} \geq \frac{M_z + kM_y}{k[\sigma]} = \frac{(4 + 2 \cdot 2) \cdot 10^6}{2 \cdot 10} = 4 \cdot 10^5 \text{ мм}^3$.

Отсюда $b \geq \sqrt[3]{12 \cdot 10^5} = 106 \text{ мм}$. Принимаем $b = 11 \text{ см}$, $h = 22 \text{ см}$.

18.2 Изгиб с растяжением (сжатием)

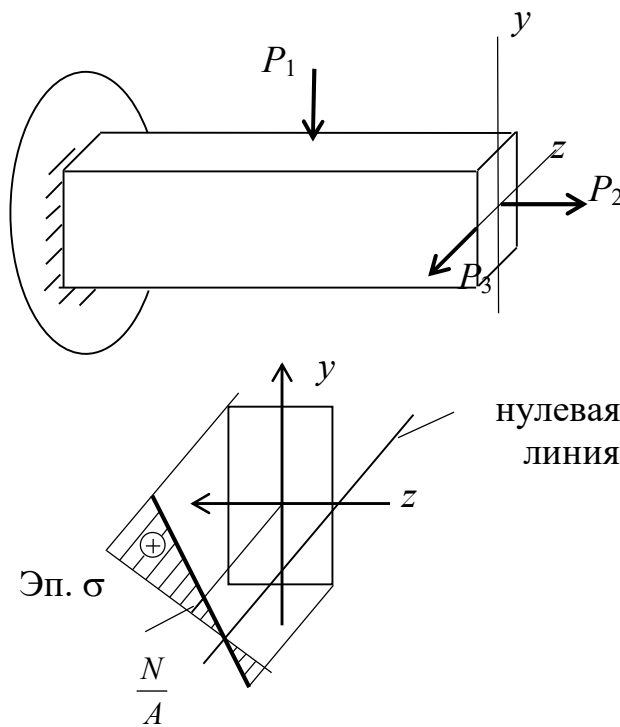


Рисунок 18.11 – Изгиб с растяжением

Изгиб с растяжением (сжатием) (рисунок 18.11) имеет место, когда в поперечном сечении стержня возникают одновременно изгибающие моменты M_z и M_y (или один момент) и продольная сила N . Напряжения в произвольной точке можно определить как:

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{N}{A}. \quad (18.12)$$

Если выражение (18.12) приравнять нулю, то получим уравнение нулевой линии (18.13), не проходящей через начало координат.

$$\sigma = \frac{M_z y_0}{I_z} + \frac{M_y z_0}{I_y} + \frac{N}{A} = 0. \quad (18.13)$$

где y_0 и z_0 – координаты точек, лежащих на нулевой линии.

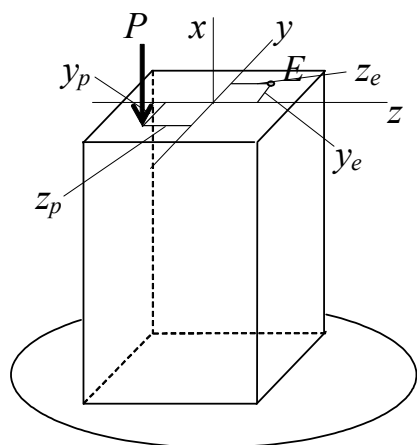
Условие прочности при изгибе с растяжением (сжатием) можно записать как

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (18.14)$$

18.3 Внецентренное сжатие

В этом случае, когда продольная нагрузка приложена не по оси стержня, а с эксцентриситетом по отношению центра тяжести (рисунок 18.12), кроме продольной силы N в поперечном сечении возникает изгибающий момент M .

Рассмотрим порядок определения напряжений при внецентренном сжатии. Как и при косом изгибе, направление поперечных осей в сечении выбираем так, чтобы в первом квадранте напряжения от изгибающих моментов M_z и M_y были положительными.



На рисунке 18.12 через z_p и y_p обозначены координаты точки приложения (эксцентриситет) продольной внешней силы.

В поперечном сечении действуют:

$$N = -P, \quad M_z = Py_p, \quad M_y = Pz_p.$$

Для произвольной точки E можем записать

Рисунок 18.12 – Внецентренное сжатие

$$\begin{aligned} \sigma_E &= \frac{N}{A} + \frac{M_z y_e}{I_z} + \frac{M_y z_e}{I_y} = \\ &= -\frac{P}{A} - \frac{Py_p y_e}{I_z} - \frac{Pz_p z_e}{I_y} = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_p y_e}{i_z^2} + \frac{z_p z_e}{i_y^2} \right). \end{aligned} \quad (18.15)$$

где i_z и i_y – радиусы инерции поперечного сечения, которые определяются по выражениям 18.16:

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A}, \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A}. \quad (18.16)$$

Для нахождения $\sigma_{\max}$ также необходимо знать положение нулевой линии. Ее уравнение получим, приравняв выражение (18.15) нулю. Тогда

$$-\frac{y_p y_0}{i_z^2} - \frac{z_p z_0}{i_y^2} = 1, \quad (18.17)$$

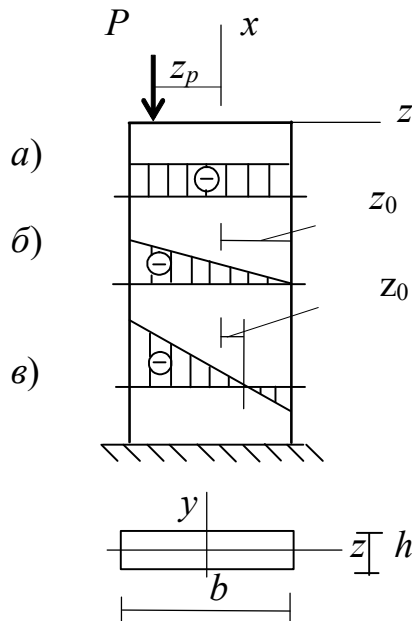
где y_0 и z_0 — координаты точек, лежащих на нулевой линии.

Из (18.17) видно, что положение нулевой линии при внецентренном сжатии зависит только от положения точки приложения силы $P(y_p, z_p)$.

Если $y_p = 0$, т. е. сила приложена на оси z (рисунок 18.8), уравнение

(18.17) примет вид
$$-\frac{z_p z_0}{i_y^2} = 1,$$

тогда:
$$z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p}.$$



Для прямоугольного сечения квадрат радиуса инерции имеет следующее значение

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{b^3 h}{12bh} = \frac{b^2}{12}.$$

1. Пусть сила приложена в центре тяжести, т. е. $z_p = 0$ (центральное сжатие). Тогда $z_0 = \infty$, эпюра $\sigma = \text{const}$ и показана на рисунке 18.13,а.

2. Сила P приложена с эксцентриситетом, равным $z_p = \frac{b}{6}$,

$$z_0 = -\frac{b^2 6}{12b} = -\frac{b}{2}.$$

Напряжения σ еще остаются одного знака (рисунок 18.13,б).

Рисунок 18. 13 – Эпюры напряжений при различных положениях сжимающей силы

В этом случае сила P оказывается приложенной на границе ядра сечения.

3. $z_p = \frac{b}{3}$, $z_0 = -\frac{b^2 3}{12b} = -\frac{b}{4}$. Сила P приложена за пределами ядра сечения, и кроме сжимающих напряжений появляются и растягивающие напряжения (рисунок 18.13,в).

Итак, при изменении z_p (аналогично и y_p), может возникнуть ситуация, когда сжимающая нагрузка будет вызывать растяжение, что для ряда материалов нежелательно. Очевидно, что существует такая область вокруг центра тяжести сечения, прикладывая в которой нагрузку, будем иметь напряжения одного знака. Эта область называется *ядром сечения*. В разобранном выше примере при $z_p = \frac{b}{3}$ сила приложена на границе ядра сечения.

Для построения ядра сечения достаточно «обкатать» сечение нулевой линией. При этом

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0}; z_p = -\frac{i_y^2}{z_0}. \quad (18.18)$$

На рисунке 18.14 показаны формы ядра сечения для различных сечений

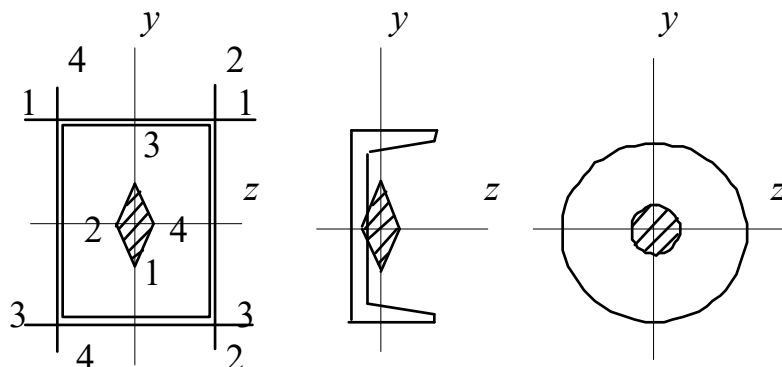


Рисунок 18.14 – Формы ядра сечения

18.4 Изгиб с кручением

При расчете валов, воспринимающих изгибающие и крутящие моменты, стоит вопрос о нахождении опасного сечения и с использованием одной из гипотез прочности провести расчет на прочность: проверить прочность, либо подобрать сечение вала, используя выражения (18.4) или (18.6). Рассмотрим эту задачу на примерах.

Пример 23. Вал передает мощность $N = 9$ кВт при угловой скорости $n = 100$ об·мин⁻¹. Давления зубчатых колес на вал направлены вертикально вниз и равны $P_1 = 1$ кН, $P_2 = 3$ кН (рисунок 18.15 (а)). Определить диаметр вала исходя из IV гипотезы прочности. Принять $[\sigma] = 100$ МПа.

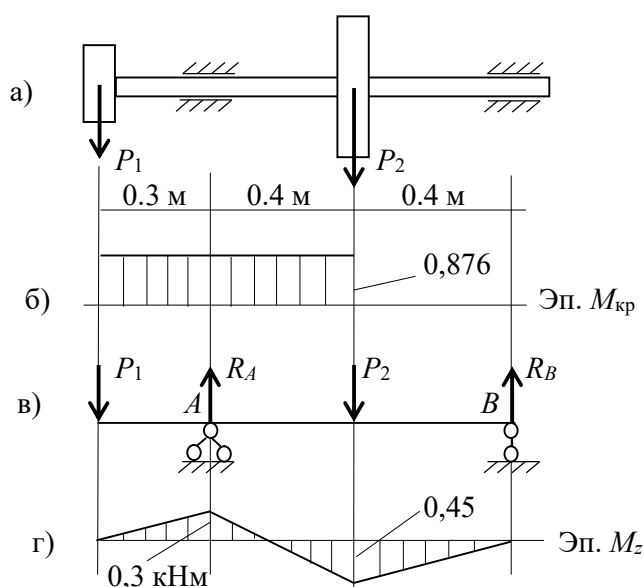


Рисунок 18.15 – Пример 23

Поскольку вал испытывает деформацию изгиб с кручением, необходимо для определения опасного сечения построить эпюру изгибающих моментов M_z и эпюру крутящих моментов $M_{кр.}$. По известной зависимости определяем крутящий момент как:

$$M_{кр} = 9736 \frac{N}{n} = 9736 \frac{9}{100} = 876 \text{ Нм.}$$

Крутящий момент передается от первого зубчатого колеса ко второму. Строим эпюру $M_{кр.}$ (рисунок 18.15 (б)).

Для определения картины изгибающих моментов строим расчетную схему вала (рисунок 18.15 (в)), определяем опорные реакции.

$$\Sigma m_A = 0. \quad P_1 \cdot 0,3 - P_2 \cdot 0,4 + R_B \cdot 0,8 = 0,$$

$$R_B = (-1 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4) / 0,8 = 0,9 / 0,8 = 1,125 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_B = 0. \quad P_1 \cdot 1,1 + P_2 \cdot 0,4 - R_A \cdot 0,8 = 0,$$

$$R_A = (1 \cdot 1,1 + 3 \cdot 0,4) / 0,8 = 2,3 / 0,8 = 2,875 \text{ кН.}$$

Проверка: $\Sigma y = 0$.

Строим эпюру M_z . (рисунок 18.15 (г)). Опасное сечение в районе второго зубчатого колеса - $M_z = 0,45 \text{ кНм}$, $M_{кр} = 0,876 \text{ кНм}$.

Воспользуемся условием прочности (18.6).

$$\sigma_{экв} = \frac{\sqrt{M_z^2 + 0,75 M_{кр}^2}}{W_z} \leq [\sigma].$$

$$\text{Учитывая, что } W_z = \frac{\pi \cdot r^3}{4}$$

$$\text{Можем записать: } r = \sqrt[3]{\frac{4(M_z^2 + 0,75 M_{кр}^2)}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3,874 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 100}} = \sqrt[3]{1,233 \cdot 10^4} = 27,1 \text{ мм}$$

Пример 24. Вал редуктора (рисунок 18,16) выполнен из углеродистой стали. Приводится во вращение шестерней 1 (рисунок 18.17). Требуется подобрать диаметр вала d , используя третью гипотезу прочности, приняв $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

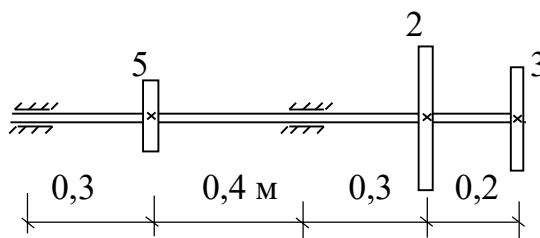


Рисунок 18.16 – Вал редуктора

Исходные данные:

$$\varphi_1 = 45^\circ, \varphi_4 = 0, \varphi_6 = 60^\circ;$$

$$n = 1060 \text{ об} \cdot \text{мин}^{-1};$$

$$N_3 = 45 \text{ кВт}, N_5 = 95 \text{ кВт};$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа};$$

Угол зацепления $\alpha = 20^\circ$.

Вычисляем моменты, снимаемые с 3 и 5 шестерен (рисунок 18.17).

$$M_3 = \frac{N_3 \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 30}{3.14 \cdot 1060} = 406 \text{ Нм},$$

$$M_5 = \frac{N_5 \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{95 \cdot 10^3 \cdot 30}{3.14 \cdot 1060} = 856 \text{ Нм}.$$

Вторая шестерня передает крутящий момент
 $M_2 = M_3 + M_5 = 406 + 856 = 1262 \text{ Нм}.$

Определяем окружные усилия в зацеплениях, задав вращение 1-й шестерни:

$$T_2 = \frac{M_2}{R_2} = \frac{1262}{0.2} = 6310 \text{ Н};$$

$$T_3 = \frac{M_3}{R_3} = \frac{406}{0.18} = 2260 \text{ Н};$$

$$T_5 = \frac{M_5}{R_5} = \frac{856}{0.15} = 5707 \text{ Н}.$$

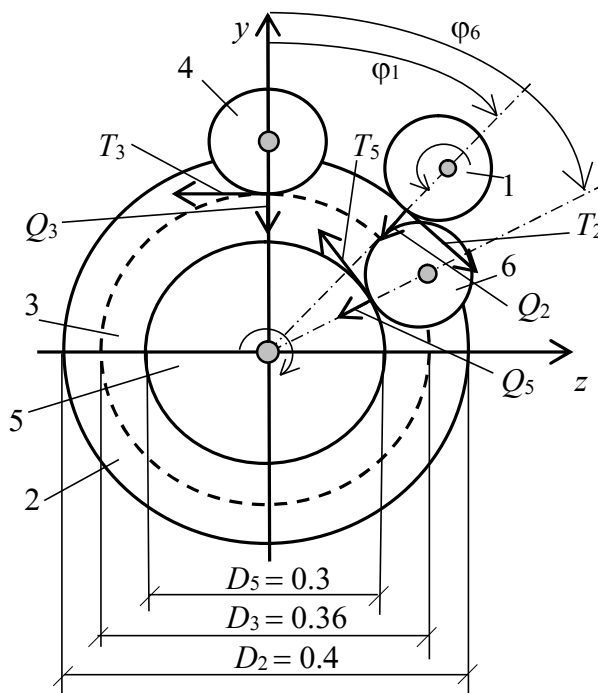


Рисунок 18.17 – Пример 14,
расположение шестерен

Радиальные усилия в зацеплениях можно определить как:

$$Q_2 = T_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 6310 \cdot 0,364 = 2300 \text{ Н};$$

$$Q_3 = T_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2260 \cdot 0,364 = 820 \text{ Н};$$

$$Q_5 = T_5 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 5707 \cdot 0,364 = 2080 \text{ Н}.$$

Проектируем усилия, действующие в зацеплении на горизонтальную и вертикальную оси.

$$Z_2 = - Q_2 \cos 45^\circ + T_2 \sin 45^\circ = - 2300 \cdot 0.707 + 6310 \cdot 0.707 = - 1620 + 4460 = 2840 \text{ Н}.$$

$$Y_2 = - Q_2 \sin 45^\circ - T_2 \cos 45^\circ = - 2300 \cdot 0.707 - 6305 \cdot 0.707 = - 1620 - 4460 = - 6080 \text{ Н}.$$

$$Z_3 = - T_3 = - 2260 \text{ Н}, \quad Y_3 = - Q_3 = - 820 \text{ Н}.$$

$$Z_5 = - Q_5 \cos 30^\circ - T_5 \sin 30^\circ = - 2080 \cdot 0.865 - 5707 \cdot 0.5 = - 1800 - 2850 = - 4650 \text{ Н}.$$

$$Y_5 = - Q_5 \sin 30^\circ + T_5 \cos 30^\circ = - 2080 \cdot 0.5 + 5707 \cdot 0.865 = - 1040 + 4930 = 3900 \text{ Н}.$$

Создаем расчетную схему вала. Определяем опорные реакции в вертикальной и горизонтальной плоскостях с последующим построением эпюр внутренних усилий (рисунок 18.18).

Вертикальная плоскость.

$$\Sigma m_A = 0. \quad Y_5 \cdot 0,3 + R_B \cdot 0,7 - Y_2 \cdot 1,0 - Y_3 \cdot 1,2 = 0; \quad R_B = 8,42 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\Sigma m_B = 0. \quad - Y_5 \cdot 0,4 + R_A \cdot 0,7 - Y_2 \cdot 0,3 - Y_3 \cdot 0,5 = 0; \quad R_A = 5,42 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

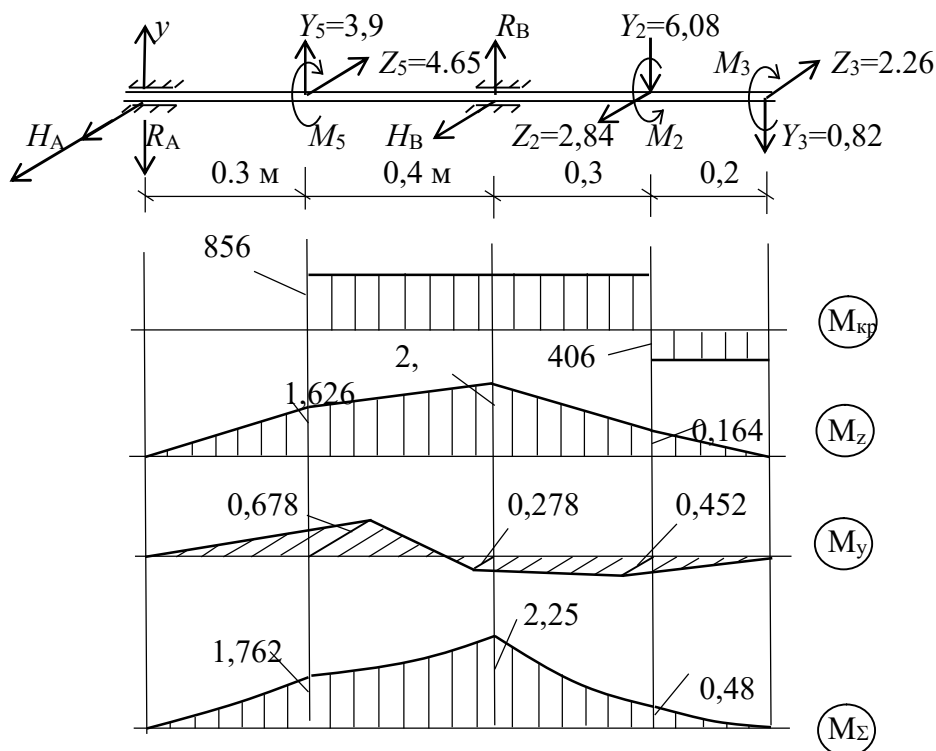


Рисунок 18.18 – Пример 24, эпюры внутренних усилий

Горизонтальная плоскость.

$$\Sigma m_A = 0. \quad Z_5 \cdot 0.3 - H_B \cdot 0.7 - Z_2 \cdot 1.0 + Z_3 \cdot 1.2 = 0; \quad H_B = 1.81 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\Sigma m_B = 0. \quad Z_5 \cdot 0.4 - H_A \cdot 0.7 + Z_2 \cdot 0.3 - Z_3 \cdot 0.5 = 0; \quad H_A = 2.26 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюры крутящих моментов $M_{кр}$.

Строим эпюры изгибающих моментов M_z и M_y .

Строим эпюру суммарных моментов M_Σ . $M_\Sigma = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$.

Опасное сечение находится в районе средней опоры «В». Эквивалентный момент по III гипотезе прочности для этого сечения:

$$M_{экв}^{III} = \sqrt{M_\Sigma^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{2.25^2 + 0.856^2} = 2.41 \text{ кНм}.$$

Записываем условие прочности:

$$\sigma = \frac{M_{экв}}{W_z} = \frac{2.41 \cdot 10^6 \cdot 4}{\pi r^3} \leq [\sigma],$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2.41 \cdot 10^6 \cdot 4}{3.14 \cdot 160}} = 27 \text{ мм}.$$

Принимаем диаметр вала $d = 2r = 60 \text{ мм}$.

19 Продольный изгиб

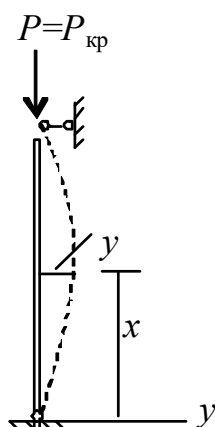


Рисунок 19.1 –
Продольный изгиб

Длинные стержни малой изгибной жесткости (гибкие стержни) при действии продольной центрально приложенной сжимающей нагрузки могут потерять первоначальную форму равновесия. Это явление принято называть *потерей устойчивости*. Происходит переход стержня в новое криволинейное состояние равновесия. Явление потери устойчивости очень нежелательно, поскольку происходит за короткий промежуток времени и сопровождается ростом напряжений.

До потери устойчивости $\sigma = -\frac{N}{A}$,

после потери устойчивости $\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M}{W}$,

где $N = P$, $M = Py$ (рисунок 19.1).

Потеря устойчивости происходит при критической нагрузке $P = P_{кр}$. В зависимости от величины сжимающей нагрузки различают три состояния равновесия – устойчивое, безразличное и неустойчивое (рисунок 19.2).

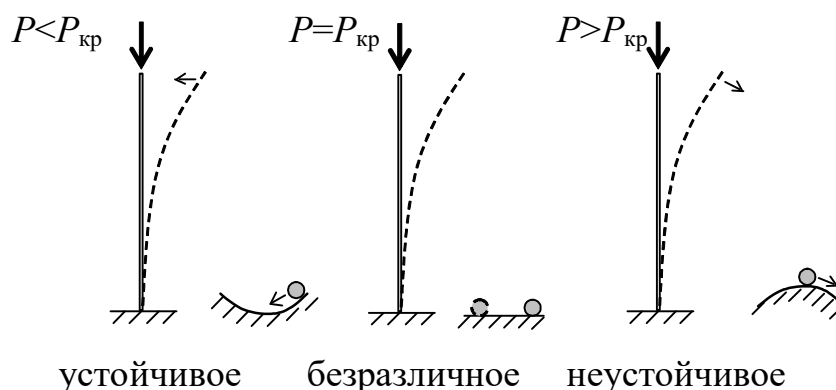


Рисунок 19.2 – Состояния равновесия

Одной из основных задач при расчетах на устойчивость является задача нахождения критической силы $P_{кр}$. Первым аналитическое решение для $P_{кр}$ получил Эйлер (1769 г.). Используем дифференциальное уравнение упругой линии (рисунок 19.1)

$$y'' = -\frac{M}{EI}, \quad M = Py,$$

$$y'' + \frac{P}{EI}y = 0. \quad (a)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = A \sin kx + B \cos kx, \quad (б)$$

где
$$k = \frac{P}{EI}. \quad (\text{в})$$

Для нахождения констант A и B используем граничные условия.

1) $x = 0, \quad y = 0, \quad 0 = A + B$; $B = 0$.
 2) $x = l, \quad y = 0, \quad 0 = A \sin kl; \quad \sin kl = 0,$
 $kl = n\pi \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$ (г)

Подставим (г) в (в), в результате получим известную формулу Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{(n\pi)^2 EI_{\min}}{l^2}, \quad (19.1)$$

где n — число полуволен синусоиды, описывающей деформации стержня. При $n = 1$ $P_{\text{кр}}$ имеет наименьшее значение.

19.1 Влияние условий опирания стержня на величину критической силы

Сжатый стержень может иметь различные условия опирания. Величина критической силы при этом будет разной. Тем не менее, все возможные случаи закрепления сжатого стержня можно свести к одной формуле (19.2), если ввести понятие *приведенной длины* стержня $l_{\text{пр}} = \mu l$, равной длине одной полуволны в деформированном состоянии

$$P_{\text{кр}} = \frac{(n\pi)^2 EI_{\min}}{l_{\text{пр}}^2}, \quad (19.2)$$

Так, в случае консольного стержня (рисунок 19.3 а)) длина полуволны равна двум длинам стержня и $\mu=2$. для шарнирно опертого (рисунок 19.3 б)) и стержня с плавающей жесткой опорой (рисунок 19.3 в)) $\mu=1$ и т. д., μ — коэффициент приведения длины.

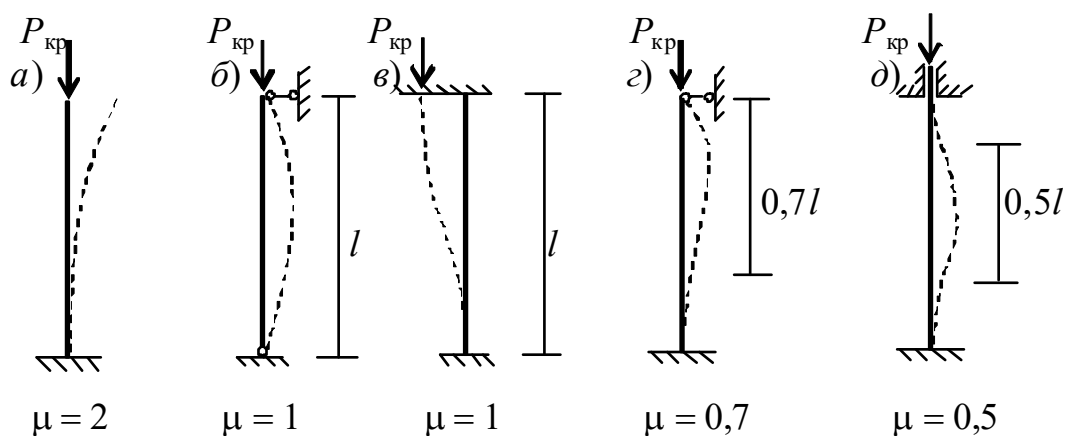


Рисунок 19.3 – Формы потери устойчивости

19.2 Полный график критических напряжений

Формула Эйлера (19.1), (19.2) справедлива при работе материала стержня в упругой стадии, т. е. когда

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} < \sigma_{пр},$$

или

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (19.3)$$

Выражение (19.3) называется *формулой Эйлера для критических напряжений*. Здесь λ – *гибкость стержня*

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}. \quad (19.4)$$

$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}$ – радиус инерции сечения.

Если принять в качестве материала стержня сталь Ст.3, для которой предел пропорциональности $\sigma_{пр} = 210$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, то, подставив эти значения в (19.3), получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{\lambda_{пр}^2} \leq \sigma_{пр} = 210, \text{ откуда } \lambda_{пр} \geq 100.$$

Таким образом, для сжатых стержней, выполненных из стали Ст.3, формулы Эйлера для критической силы (19.2) и критических напряжений (19.3) применимы при гибкостях больших 100.

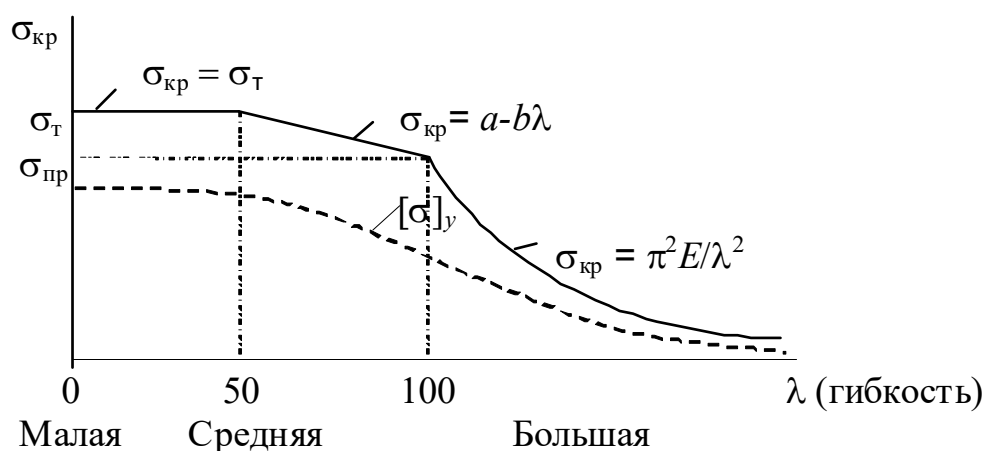


Рисунок 19.4 – Полный график критических напряжений

Рассмотрим полный график критических напряжений (рисунок 19.4) для этого же материала, который учитывает различные случаи нагружения стержня, в том числе и такие, при которых напряжения достигают предела текучести $\sigma_T=240$ МПа. Из графика видно, что в диапазоне между $\sigma_{пр}$ и σ_T критические напряжения меняются по линейному закону, описываемому экспериментально полученной формулой Ясинского (19.5)

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (19.5)$$

Для чугуна формула Ясинского имеет вид

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2. \quad (19.6)$$

где: a , b и c – коэффициенты с размерностью МПа и зависящие от вида материала (таблица 1).

Пунктиром на рисунке 19.4 показан график допускаемых напряжений $[\sigma]_y$, вычисляемых как:

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}, \quad (19.7)$$

где n_y – коэффициент запаса при расчетах на устойчивость, который превышает коэффициент запаса n , используемый при расчетах на прочность.

Таблица 1 - Коэффициенты

Материал	a МПа	b МПа	c МПа
Сталь Ст.3	310	1,14	-
Сталь Ст.5	464	3,62	-
Чугун	776	72	0,053
Дерево	29,3	0,194	-

19.3 Подбор сечения сжатого стержня с учетом продольного изгиба

Определение безопасной нагрузки для сжатого стержня представляет собой простую задачу, если известна площадь и форма сечения. В этом случае расчет начинается с определения гибкости по формуле (19.4). В зависимости от полученной гибкости (малой, средней или большой) вычисляются критические напряжения, которые будут либо равны пределу текучести, либо их находят по формулам Ясинского или Эйлера. Критическая сила равна произведению критических напряжений на площадь поперечного сечения стержня. Далее определяется допускаемая нагрузка по выражению (19.8).

$$[P] = \frac{P_{кр}}{n_y}. \quad (19.8)$$

При подборе площади сечения сжатого стержня используют следующее условие прочности (19.9)

$$\sigma = \frac{P}{A \cdot \varphi} \leq [\sigma], \quad (19.9)$$

где φ коэффициент продольного изгиба (коэффициент понижения основных допускаемых напряжений). Он является функцией гибкости λ и принимает значения от 0 до 1 и задается таблицами.

Подбор сечения по условию (19.9) осуществляется методом попыток, поскольку изначально в этом выражении неизвестными являются два параметра: площадь A и коэффициент φ . Задаются одним из них. Удобнее вначале принять $\varphi_1 = 0,5$. Далее вычисляют площадь A_1 , затем гибкость λ_1 и по λ_1 уточненное значение коэффициента продольного изгиба φ_1^1 . Если оно не совпадает с исходным $\varphi_1 = 0,5$, то следующая попытка начинается с $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^1}{2}$. Расчет повторяется до тех пор, пока разница φ_i и φ_i^1 или между σ_i и $[\sigma]$ не составит менее 5 процентов.

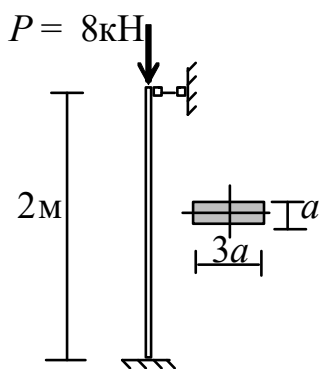


Рисунок 19.6 –
Пример 25

Пример 25. Подобрать сечение деревянной стойки прямоугольного сечения (рисунок 19.6). Принять $[\sigma] = 8$ МПа.

1-я попытка, $\varphi_1 = 0,5$,

$$A_1 = \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{8 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 8} = 2 \cdot 10^3 \text{ мм}^2 = 20 \text{ см}^2 = 3a_1^2.$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{A}{3}} = \sqrt{\frac{20}{3}} = 2,582 = 2,6 \text{ см}.$$

$$I_{\min} = \frac{3a \cdot a^3}{12}; i_{\min} = \sqrt{\frac{3a^4}{12 \cdot 3a^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{12}} = \frac{a}{3,46},$$

$$i_{\min} = \frac{2,6}{3,46} = 0,75 \text{ см}; \lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 200}{0,75} = 187; \varphi_1^1 = 0,095.$$

2-я попытка:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^1}{2} = \frac{0,5 + 0,095}{2} = 0,3, \quad A_2 = \frac{8 \cdot 10^3}{0,3 \cdot 8} = 3333 \text{ мм} = 33,33 \text{ см},$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{33,33}{3}} = 3,33 \text{ см}, i_{\min} = \frac{3,33}{3,46} = 0,96, \lambda_2 = \frac{0,7 \cdot 200}{0,96} = 145,8, \varphi_2^1 = 0,15.$$

3-я попытка:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^1}{2} = \frac{0,3 + 0,15}{2} = 0,225, A_3 = \frac{8 \cdot 10^3}{0,225 \cdot 8} = 4444 \text{ мм} = 44,44 \text{ см},$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{44,44}{3}} = 3,85 \text{ см}, i_{\min} = \frac{3,85}{3,46} = 1,11, \lambda_3 = \frac{0,7 \cdot 200}{1,11} = 126, \varphi_3^1 = 0,2.$$

Вычислим напряжения, соответствующие этому значению коэффициента

φ

$$\sigma_3 = \frac{8 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 4444} = 9 \text{ МПа},$$

что больше допускаемых напряжений $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$ на 12.5%.

4-я попытка:

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_3^1}{2} = \frac{0,225 + 0,2}{2} = 0,21, A_4 = \frac{8 \cdot 10^3}{0,21 \cdot 8} = 4762 \text{ мм} = 47,62 \text{ см},$$

$$a_4 = \sqrt{\frac{47,62}{3}} = 3,98 \text{ см}, i_{\min} = \frac{3,98}{3,46} = 1,15, \lambda_4 = \frac{0,7 \cdot 200}{1,15} = 122, \varphi_4^1 = 0,21.$$

$$\sigma_4 = \frac{8 \cdot 10^3}{0,21 \cdot 4762} = 8 \text{ МПа}.$$

Таким образом, размер поперечного сечения принимаем $a = 4 \text{ см}$, площадь сечения $A = 3a^2 = 48 \text{ см}^2$. Напряжения с учетом продольного изгиба будут:

$$\sigma_4 = \frac{8 \cdot 10^3}{0,21 \cdot 4800} = 7,93 \text{ МПа} < [\sigma].$$

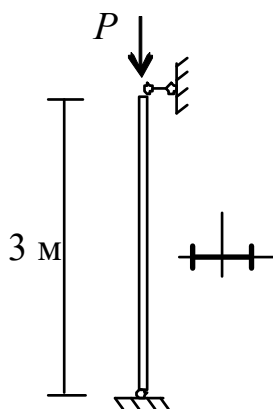


Рисунок 19.5 –
Пример 26

Пример 26. Подобрать двутавровое сечение сжатой стойки (рисунок 19.5), если $P = 400 \text{ кН}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

1-я попытка, $\varphi_1 = 0,5$, по условию (19.9) подсчитаем площадь:

$$A_1 = \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 5 \cdot 10^3 \text{ мм}^2 = 50 \text{ см}^2.$$

По сортаменту принимаем двутавр № 30а, у которого $A_1 = 49,5 \text{ см}^2$, $i_{\min} = 2,95 \text{ см}$; тогда

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 300}{2,95} = 101,7.$$

По таблице 1 для φ с учетом линейной интерполяции принимаем $\varphi_1^1 = 0,584$.

Вычисляем напряжения для выбранного сечения

$$\sigma_1 = \frac{400 \cdot 10^3}{0,584 \cdot 49,5} = 137,3 \text{ МПа.}$$

Недогрузка сечения составляет:

$$(160 - 137,3)100/160 = 14,2\%.$$

2-я попытка. Примем из-за незначительной недогрузки меньший номер двутавра 30-й, для которого $A_2 = 46,5 \text{ см}^2$, $i_{\min} = 2,69 \text{ см}$; тогда

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 300}{2,69} = 111,5, \quad \varphi_2^1 = 0,509, \quad \sigma_2 = \frac{400 \cdot 10^3}{0,509 \cdot 46,5} = 169 \text{ МПа.}$$

Перегрузка составляет 5,6 процентов, что недопустимо, поскольку она более допустимых 5 процентов.

Остается первый вариант – двутавр № 30а.

20 Динамическое воздействие нагрузок

Рассмотренные выше разделы курса относятся к случаю статического приложения нагрузки, когда усилия прикладываются в течение длительного времени (без заметного ускорения). В реальной жизни детали автомобилей, технологического оборудования и станков, элементы зданий и сооружений в процессе эксплуатации испытывают действие динамических нагрузок, когда приходится считаться с появлением значительных ускорений и соответствующих им дополнительных инерционных усилий.

$$F = -ma, \quad (20.1)$$

где $m = P/g$ – масса тела; a – ускорение, с которым движется тело; P – вес тела, g – ускорение свободного падения.

Общий метод расчета при динамическом нагружении сводится к отысканию *динамического коэффициента* k_d . Тогда расчет на прочность и жесткость в случае динамического воздействия сводится к обычному статическому расчету, результат которого умножается на k_d . То есть результат может быть определен как:

$$N_d = N_{\text{ст}} \cdot k_d, \quad \sigma_d = \sigma_{\text{ст}} \cdot k_d, \quad y_d = y_{\text{ст}} \cdot k_d, \quad (20.2)$$

где N_d , σ_d , $y_d = y_{ст}$ – усилия, напряжения, перемещения при статическом приложении нагрузки.

Характер динамических нагрузок и выбираемый метод расчета зависит от характера ускорения. Различают следующие виды динамического воздействия:

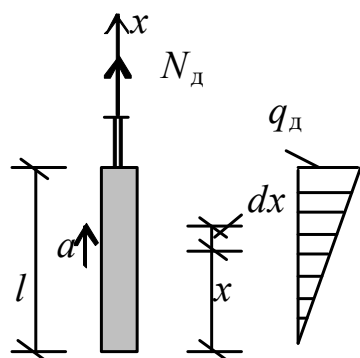
– *инерционные нагрузки*, когда ускорение не зависит от деформаций рассматриваемых элементов конструкции. В этом случае ускорение определяется методами кинематики твердого тела с последующим вычислением сил инерции. Метод расчета основан на принципе Даламбера;

– *ударное нагружение*, когда время нагружения $t_{удар} = 0,01 \div 0,001$ сек. При этом ускорение практически мгновенно достигает больших величин и зависит от деформаций рассматриваемых элементов конструкции. Расчеты при ударе как правило проводятся по приближенному методу на основе закона сохранения энергии;

– *вибрационные нагрузки*, которые вызываются повторно-переменным ускорением. При действии таких нагрузок при совпадении частоты собственных и вынужденных колебаний возможен эффект резонанса, сопровождаемый резким увеличением деформаций и напряжений.

20.1 Расчет неравномерно движущихся деталей

Рассмотрим учет инерционных нагрузок на ряде примеров.



Эп. N

Рисунок 20.1 – Стержень движется равноускоренно

1 Стержень движется равноускоренно, прямолинейно, параллельно своей оси (рисунок 20.1). В состоянии покоя или при движении с постоянной скоростью усилие в тросе будет равно весу стержня

$$N_{ст} = G_{ст}.$$

$G_{ст} = \gamma \cdot A \cdot l$ – вес всего стержня.

Усилие в тросе N_d при ускоренном движении можно определить, спроектировав все усилия, действующие на стержень, на ось x

$$\sum x = 0. \quad N_d - G_{ст} - F = 0.$$

F – сила инерции, действующая на стержень.

Для определения силы инерции найдем инерционную составляющую, приходящуюся на элемент стержня длиной dx .

$$dF = dm \cdot a = \frac{\gamma dV}{g} a = \frac{\gamma dx A}{g} a.$$

Вся сила инерции составит

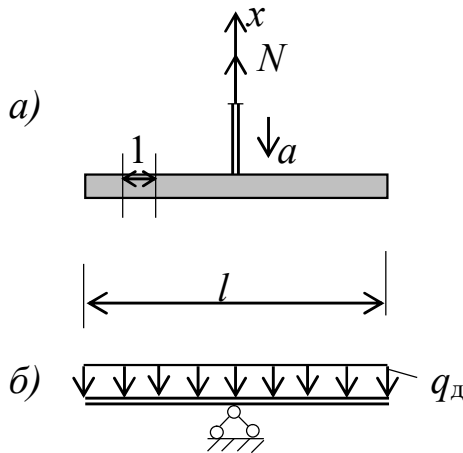
$$F = \int dF = \frac{\gamma A a}{g} \int_0^l dx = \gamma A l \frac{a}{g} = G_{ст} \frac{a}{g}.$$

$$N_d = G_{ст} + F = G_{ст} + G_{ст} \frac{a}{g} = G_{ст} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = G_{ст} k_d.$$

Таким образом, ускоренное движение увеличивает нагрузку на трос на величину динамического коэффициента k_d

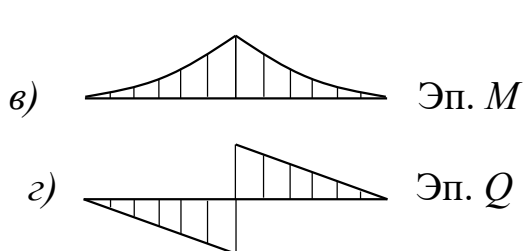
$$k_d = 1 + \frac{a}{g}. \quad (20.3)$$

2. Стержень движется прямолинейно, равноускоренно вверх, перпендикулярно своей оси (рисунок 20.2 а)). Расчетная схема стержня представлена на рисунке 20.2 б).



Определим равномерно распределенную инерционную нагрузку q_d , действующую на единицу длины стержня.

$$q_d = q_{с.в.} + q_{ин} = \gamma A + \frac{\gamma A}{g} a = \gamma A \cdot k_d$$



Эпюры внутренних усилий показаны на рисунке 20.2(в) и (г). Наибольший момент возникает в месте крепления стержня и составляет

$$M_{\max} = \frac{q_d l^2}{8} = \frac{\gamma A l^2}{8} k_d = M_{ст} k_d.$$

Рисунок 20.2 – Стержень движется равноускоренно перпендикулярно оси

(k_d из 20.3).

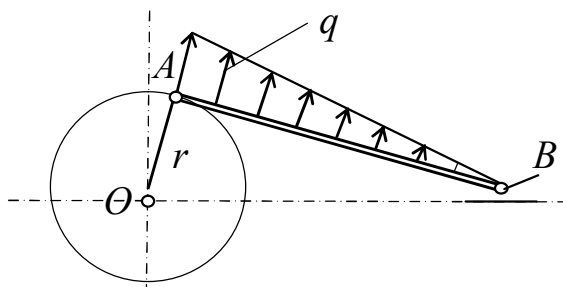


Рисунок 20.3 – Схема усилий в шатуне

в, точке A , а в точке B оно равно нулю. Инерционные нагрузки q , действующие на шатун, показаны на рисунке 20.3. Наибольшими они будут тогда, когда угол OAB равен 90° . В точке A интенсивность инерционной нагрузки составит

$$q = m \cdot a = m \omega^2 r = \frac{\gamma A}{g} \cdot \frac{\pi^2 n^2}{30^2} r.$$

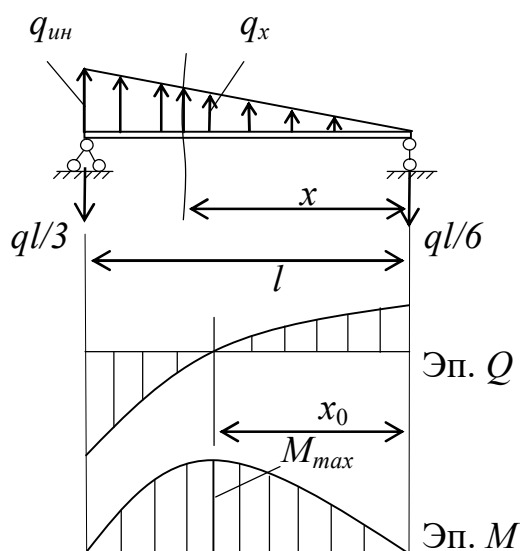


Рисунок 20.4 – Внутренние усилия в шатуне

3. Напряжения в шатуне при равномерном вращении вала (рисунок 20.3).

Определить наибольшие напряжения в шатуне при вращении вала с угловой скоростью ω . Точка A совершает вращательное движение, точка B – поступательное движение. При этом в шатуне наибольшее нормальное ускорение возникает

Для определения внутренних усилий в шатуне составим его расчетную схему (рисунок 20.4), определим опорные реакции и запишем выражения для Q и M .

$$Q = \frac{ql}{6} - \frac{gx^2}{2l}, \quad (a)$$

$$Q_{x=0} = \frac{ql}{6}, Q_{x=l} = -\frac{ql}{3}.$$

Q меняет знак, следовательно момент M будет иметь экстремум. Приравняем (a) нулю.

$$Q_0 = \frac{ql}{6} - \frac{qx_0^2}{2l} = 0, \quad x_0 = \sqrt{\frac{l^2}{3}} = \frac{l}{1.73}.$$

$$M = -\frac{ql}{6}x + \frac{qx^2}{2l} \cdot \frac{x}{3}.$$

$$M_{\max} = M_{x=x_0} = -\frac{ql^2}{9\sqrt{3}} = -0.0642ql^2.$$

20.2 Ударные нагрузки

Как указывалось выше, теория ударного нагружения довольно сложна. На практике, как правило, используют приближенную теорию определения динамических нагрузок и напряжений, основанную на использовании уравнения баланса энергии.

В этой теории считается, что:

1. удар неупругий – груз после удара остается на конструкции;

2. кинетическая энергия груза полностью переходит в потенциальную энергию ударяемой системы, т.е. нет рассеивания (диссипации) энергии;
 3. вес груза намного больше веса ударяемого тела.
- Эти предположения идут в запас расчета.

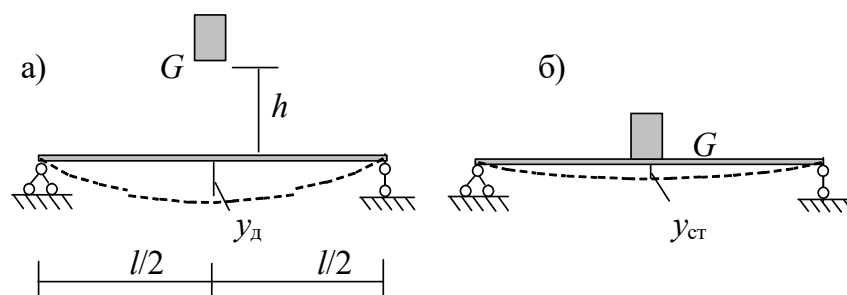


Рисунок 20.5 – Поперечный удар

Уравнение баланса энергий предполагает, что полная энергия, подведенная к балке (рисунок 20.5) равна сумме кинетической энергии падающего груза плюс потенциальная энергия упругой ударяемой системы на перемещении y_d

$$\Pi = K + \Pi_{\text{груза}}. \quad (\text{а})$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{Qv^2}{2g}, \quad \Pi_{\text{гр}} = Q \cdot y_d. \quad (\text{б})$$

Полную подведенную энергию можно представить как:

$$\Pi = \frac{1}{2} P_d y_d,$$

где P_d и y_d – обобщенные динамическая сила и перемещение.

С другой стороны:

$$y_d = P_d \delta_{11},$$

где δ_{11} - деформация от единичной силы или *податливость* упругой системы.

Тогда полную энергию можно представить как:

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{y_d^2}{\delta_{11}}. \quad (\text{в})$$

Подставим (б) и (в) в (а):

$$\frac{y_d^2}{2\delta_{11}} - Q y_d - K = 0. \quad (\text{д})$$

Поскольку $Q \cdot \delta_{11} = y_{\text{ст}}$, выражение (д) представляет собой квадратное уравнение относительно y_d . Решая это уравнение, получим:

$$y_{\partial} = y_{cm} + \sqrt{y_{cm}^2 + 2K\delta_{11}} = y_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\delta_{11}K}{y_{cm}}} \right) = y_{cm} k_{\partial}.$$

Если известна скорость в момент соударения груза с упругой системой v_0 , $K = \frac{Qv_0^2}{2g}$, $y_{ст} = Q \cdot \delta_{11}$, $v_0 = \sqrt{2gh}$, тогда

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g \cdot y_{cm}}} \quad (20.4)$$

При известной высоте падения груза h выражение для динамического коэффициента при ударе примет вид:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{cm}}} \quad (20.5)$$

$y_{ст}$ – прогиб в точке соударения при статическом приложении нагрузки (рисунок 20.5,б).

При внезапном приложении нагрузки ($h = 0$) из выражения (20.5) видно, что $k_{д} = 2$.

Учет массы ударяемого тела

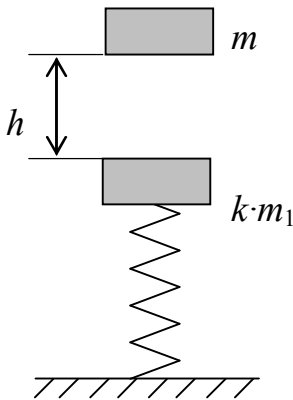


Рисунок 20.6 – Учет массы

Рассмотрим на примере упругой системы в виде пружины, масса которой m_1 (рисунок 12.6). Приведем эту массу к точке удара, тогда ударяемая масса ($k \cdot m_1$). k – коэффициент приведения массы ударяемой системы к точке удара.

Обе массы после удара движутся с одинаковой скоростью v_1 .

Из условия сохранения количества движения имеем

$$m \cdot v_0 = (m + k \cdot m_1) v_1.$$

$$v_1 = v_0 \frac{m}{m + km_1},$$

Кинетическая энергия, приложенная к пружине, составит

$$K_y = \frac{1}{2} (m + km_1) v_1^2 = \frac{mv_0^2}{1 + k \frac{m_1}{m}} = \frac{K}{1 + k \frac{m_1}{m}}.$$

Динамический коэффициент при учете ударяемой массы будет

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{cn} \left(1 + k \frac{m}{m} \right)}}. \quad (20.6)$$

20.3 Вибрационные нагрузки

В случае вибрационных нагрузок, возникающих при вращении неуравновешенных сил с определенной частотой (частотой вынужденных колебаний), для системы с одной степенью свободы значение динамического коэффициента определяется по формуле

$$k_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}, \quad (20.7)$$

где θ – частота вынужденных колебаний; $\omega = 1/\sqrt{y_{\text{ст}}/g}$ – частота собственных колебаний балки как системы с одной степенью свободы; $y_{\text{ст}}$ – статический прогиб при выключенном моторе (рисунок 20.7).

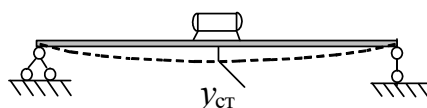


Рисунок 20.7 – Двигатель на стержне

График $k_d \left(\frac{\theta}{\omega}\right)$ показан на рисунке 20.8. При $\theta = \omega$ $k_d = \infty$ – имеем явление резонанса. При $\theta > \omega$ $k_d < 0$. Это объясняется тем, что имеет место сдвиг фаз, т. е. закон изменений внешней силы не совпадает с законом движений неуравновешенной массы « m ».

При очень больших отношениях θ/ω вынужденные колебания будут настолько малы, что практически масса « m » перестанет колебаться.

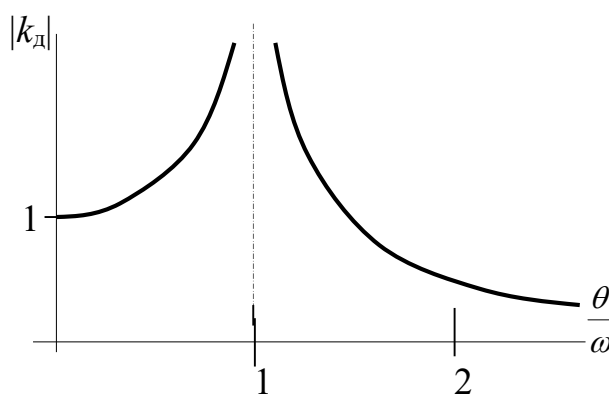


Рисунок 20.8 - График $k_d \left(\frac{\theta}{\omega}\right)$

Библиографический список

1. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник для вузов / Г.С. Варданян [и др.]; – М.: АСВ, 1995. – 224 с.
2. Дарков, А.В., Сопротивление материалов.: учебник для вузов / А.В. Дарков, Г. С. Шапиро М. - Высш. шк., 1989. – 156 с.
3. Нечипорук, Г.С. Статика сооружений: учебное пособие по курсу «Основы проектирования и конструирования» /. Г.С. Нечипорук. - Магадан, СМУ, 2000. – 190 с.
4. Скиртладзе Г.А.и др. Сопротивление материалов: учебник для вузов / Скиртладзе Г.А. [и др.]; - М.: АСВ, 2012. – 190 с.
5. Степин, П.А., Сопротивление материалов: учебник для вузов / П.А. Степин. – М.: Высш. шк., 1988. – 220 с.

Вопросы для самоподготовки

1. Задачи курса сопротивление материалов. Объекты исследования. Гипотезы, применяемые в курсе. Понятие о расчетной схеме сооружения. Виды опорных устройств. Реакции связей.
2. Понятие о напряжениях, перемещениях, деформациях. Метод сечений. Виды внутренних усилий.
3. Центральное растяжение – сжатие. Определение внутренних усилий, напряжений. Привести пример.
4. Центральное растяжение – сжатие. Закон Гука. Определение перемещений. Привести пример.
5. Определение внутренних усилий при поперечном изгибе. Порядок построения эпюр M и Q и их проверка. Привести пример.
6. Порядок построения эпюр внутренних усилий в ломаных стержнях (рамах). Привести пример.
7. Механические характеристики материалов. Диаграмма растяжения – сжатия пластичных материалов.
8. Механические характеристики материалов. Диаграммы растяжения – сжатия хрупких материалов. Особенности механических характеристик пластмасс.
9. Геометрические характеристики плоских сечений. Порядок определения центра тяжести сечения. Привести пример.
10. Определение моментов инерции (осевого, полярного, центробежного). Моменты инерции простых фигур.
11. Свойства главных центральных моментов инерции. Определение положения главных центральных осей и главных центральных моментов инерции.
12. Условие прочности. Типы задач на прочность (показать на примере центрального растяжения – сжатия).
13. Определение нормальных напряжений при поперечном изгибе. Нулевая линия. Момент сопротивления.
14. Условие прочности при изгибе. Рациональные типы сечений при изгибе.
15. Порядок подбора сечения и безопасной нагрузки при поперечном изгибе. Показать на примере.
16. Определение перемещений при изгибе прямого бруса. Метод непосредственного интегрирования. Привести пример.
17. Определение перемещений при изгибе прямого бруса. Метод Мора. Привести пример.
18. Правило Верещагина для вычисления интеграла Мора. Формула Симпсона. Привести пример определения перемещений стержня.
19. Определение напряжений при кручении круглых валов.
20. Рациональные типы сечений при кручении. Определение деформаций при кручении. Практические расчеты при кручении.
21. Сложное сопротивление. Расчеты на прочность при косом изгибе.
22. Сложное сопротивление. Расчеты на прочность при изгибе с растяжением (сжатием).
23. Внецентренное растяжение (сжатие). Расчет на прочность. Ядро сечения.

24.Сложное сопротивление. Расчеты на прочность при изгибе с кручением.

Гипотезы прочности.

25.Продольный изгиб. Определение $P_{кр}$ и $\lambda_{кр}$. Влияние условий закрепления на величину критической силы.

26.Гибкость стержня. Полный график критических напряжений. Условие устойчивости с использованием коэффициента запаса на устойчивость.

27.Практические расчеты на устойчивость с использованием коэффициента λ .

28.Общий порядок расчета стержневых систем при динамическом воздействии нагрузок.

Учебное издание

Нечипорук Геннадий Савельевич

ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать _____ 2023. Тираж _____ экз.
Рязанский институт (филиал) «Московский политехнический университет»
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53