

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емец Валерий Сергеевич  
Должность: Директор  
Дата подписания: 28.06.2023 14:38:31  
Уникальный программный ключ:  
f2b8a1573c931f1098cfe699d1debd94fcff35d7

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Рязанский институт (филиал)  
федерального государственного автономного образовательного учреждения  
высшего образования  
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

Ю.И. Арабчикова, Т.А. Асаева

## **ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ**

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Рязань  
2023

**УДК 51-7**  
**ББК 22.3**  
**А-79**

**Арабчикова, Ю.И.**

**А-79** Предел и непрерывность функции. Часть 1 / Ю.И. Арабчикова, Т.А. Асаева. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2023. – 28 с.

Данное пособие предназначено студентам младших курсов технических специальностей. В нем детально изложены различные приемы вычисления пределов, подробно разобраны многочисленные примеры, даны задачи для самостоятельного решения.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

**УДК 51-7**  
**ББК 22.3**

© Арабчикова Ю.И., Асаева Т.А., 2023  
© Рязанский институт (филиал)  
Московского политехнического  
университета, 2023

## Содержание

Введение.....	4
1 Понятие функции.....	5
2 Предел функции.....	8
3 Теоремы о пределах функции.....	12
4 Вычисление пределов.....	17
4.1 Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .....	17
4.2 Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ .....	19
4.3 Неопределенность вида $(\infty - \infty)$ .....	21
5 Замечательные пределы.....	24
Библиографический список.....	27

## **Введение**

Изучение математики совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует её, приучает человека логически рассуждать, воспитывает у него точность и обстоятельность аргументации. Основной теорией математики является теория пределов.

Операция предельного перехода является одной из основных операций математического анализа и используется как инструмент для исследования переменной величины. Более того, все основные операции математического анализа – непрерывность, дифференцирование, интегрирование, нахождение суммы ряда и др. основаны на понятии предела переменной величины.

Математический анализ в настоящее время является незаменимым инструментом исследования в самых различных областях науки и техники. Знание дифференциального и интегрального исчисления сейчас необходимы каждому инженеру и научному работнику. Но для того, чтобы изучить математический анализ и научиться правильно его применять, необходимо изучить теорию пределов.

# 1 Понятие функции

При изучении и исследовании разнообразных явлений природы, решении технических задач приходится рассматривать не столько переменные величины, взятые отдельно, сколько связь между ними, зависимость одной величины от другой. В природе не существует переменных величин, которые изменялись бы изолированно, без связи с другими физическими величинами. Например, пройденный путь можно рассматривать как величину, которая изменяется в зависимости от изменения времени, т.е. пройденный путь является функцией времени. Расстояние, на которое летит пушечный снаряд, и точность попадания зависят от массы снаряда, угла возвышения дула пушки, начальной скорости снаряда, направления и силы ветра и многих других факторов. Абстрагируясь от этих конкретных примеров зависимостей между конкретными величинами, в математике ввели понятие функциональной зависимости или функции.

**Определение.** Пусть даны два непустых множества  $X$  и  $Y$ , элементами которых могут быть любые объекты. Если каждому элементу  $x$  множества  $X$  по некоторому закону поставлен в соответствие один и только один элемент множества  $Y$ , то говорят, что на множестве  $X$  задана функция (или отображение) со множеством значений  $Y$ . Обозначения функции:  $y = f(x)$ ,  $X \xrightarrow{f} Y$ .

**Определение.** Множество  $X$  называют областью определения функции, а множество  $Y$  - множеством значений функции.

Переменную величину  $x$  называют независимой переменной или аргументом.

Равенство  $y = f(x)$  означает, что, применив к значению аргумента  $x$  закон  $f$ , найдем соответствующее этому значению  $x$  значение функции  $y$ .

Для обозначения функций используют так же другие буквы латинского и греческого алфавитов, например,  $y = y(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $y = \phi(x)$ . Значение функции  $y = f(x)$  при  $x = a$  называют частным значением функции и обозначают  $f(a)$ .

Графиком функции  $y = f(x)$  называется множество точек плоскости  $XOY$  с координатами  $(x, f(x))$ , где  $x \in X$ , или  $(x, y)$ .

График функции может представлять собой некоторую «сплошную» линию (прямую или кривую) и может состоять из отдельных точек (рисунок 1).

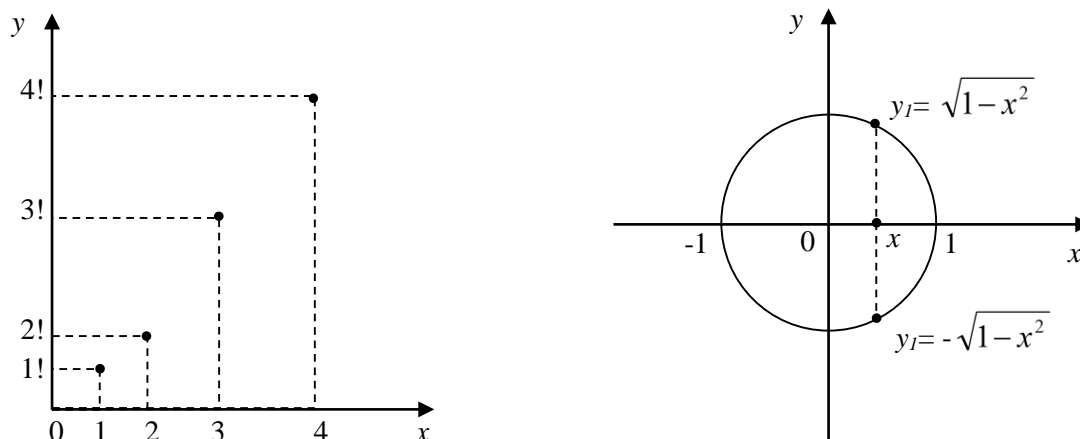


Рисунок 1 – Графики функций

Функция, все значения которой равны между собой, называется постоянной и обозначается буквой  $C$  ( $f(x) = C$ ).

**Определение.** Функция  $f$ , определенная на множестве  $X$ , называется ограниченной сверху (снизу) на этом множестве, если существует число  $M$  ( $m$ ) такое, что для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $f(x) \leq M$  ( $f(x) \geq m$ ).

**Определение.** Функция, ограниченная сверху и снизу на множестве  $X$ , называется ограниченной на этом множестве. Условие ограниченности функции  $f(x)$  можно записать в следующем виде: существует число  $M > 0$  такое, что для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $|f(x)| \leq M$ . В противном случае функция называется неограниченной.

**Пример.** Функция  $f(x) = \sin x$  ограничена на всей числовой оси, так как для произвольного  $x$  выполняется условие  $|\sin x| \leq 1$  при любом  $x$ .

**Пример.** Функция  $f(x) = a^x$  ограничена снизу, так как для любого  $x$  выполняется неравенство  $0 < a^x$ .

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на некотором множестве  $X$ , а  $Y$ -множество её значений и пусть она ограничена сверху либо снизу на множестве  $X$ . Тогда число  $M(m)$  и всякое большее (меньшее), число называется верхней (нижней) гранью множества значений функции  $Y$ , а наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих множество  $Y$ , сверху (снизу), - точной верхней (нижней) гранью функции на множестве  $X$ , которая обозначается  $\sup_x f(x)$  ( $\inf_x f(x)$ ).

Если множество  $Y$  не ограничено сверху (снизу), то пишут  $\sup_x f(x) = +\infty$  ( $\inf_x f(x) = -\infty$ ).

**Пример.** Функция  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  в промежутке  $X = [0; +\infty)$  имеет точную нижнюю грань  $m = 0$  и точную верхнюю грань  $M = 1$ . Действительно, функция ограничена на данном промежутке, так как для любого  $x \in [0; +\infty)$  выполняются неравенства  $0 \leq \frac{x}{1+x} < 1$  ( $m = 0, M = 1$ ). Значит,  $m$  и  $M$  являются соответственно нижней и верхней гранями множества значений функции  $Y = [0; 1)$ .

### Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область определения функций:

а)  $y = \sqrt{2 - \log_2(x-2)^2}$ ; б)  $y = \sqrt{\sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{x}}$ ; в)  $y = \sqrt{8 - (0,5)^x}$ .

2. Найти наибольшее целое значение  $x$  из области определения функции

$$y = \sqrt{(x^2 - 5x + 6)^2} + \sqrt[4]{1-x}.$$

3. Найти область значений функций:

а)  $y = (0,2)^{-x^2+4x-6}$ ; б)  $y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$ ; в)  $y = \log_2(|x|+4) + 1$ .

4. Доказать, что функция  $y = \frac{x^2}{1+x^4}$  ограничена на всей числовой оси.

5. Является ли функция  $y = \lg \sin x$  ограниченной на области определения?

## 2 Предел функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x = x_0$ , за исключением быть может самой точки  $x_0$ .

**Определение 5.** Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$  (при  $x \rightarrow x_0$ ), если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in X$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Это записывают так:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

Определение предела можно записать кратко, используя кванторы  $\forall$  (любой, произвольный) и  $\exists$  (найдется):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \left( \forall x \in \overset{\circ}{O}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right),$$

где  $\overset{\circ}{O}(a, \delta)$  - проколота окрестность точки  $a$ , т.е.  $x \neq a$ .

Геометрически: поскольку из  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ , то это означает, что для всех точек  $x$ , удаленных от точки  $x_0$  не далее чем на  $\delta$ , точки графика  $y = f(x)$  лежат внутри полосы шириной  $2\varepsilon$ , ограниченной прямыми  $y = A - \varepsilon$  и  $y = A + \varepsilon$  (рисунок 2).

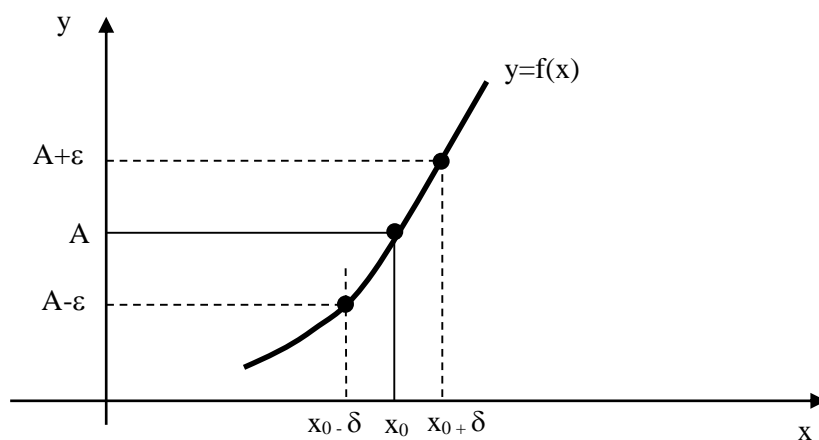


Рисунок 2 – Геометрическое определение предела

**Пример.** Используя определение предела, доказать, что функция  $f(x) = 3x - 2$  в точке  $x = 1$  имеет предел, равный 1, т.е.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$ .

*Решение.* Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Задача состоит в том, чтобы по этому  $\varepsilon$  найти такое  $\delta > 0$ , при котором из неравенства  $|x - 1| < \delta$  следовало бы неравенство  $|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| < \varepsilon$ . Преобразуя последнее неравенство, получаем  $|3(x - 1)| < \varepsilon$ , или  $|x - 1| < \varepsilon/3$ .

Отсюда видно, что если взять  $\delta \leq 1/3$ , то для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - 1| < \delta$ , выполняется требуемое неравенство  $|f(x) - 1| < \varepsilon$ . Это и означает, что  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$ . В частности, если  $\varepsilon = 1$ , то  $\delta \leq 1/3$ , если  $\varepsilon = 1/2$ , то  $\delta \leq 1/6$  и т.д.; т.е. в общем случае,  $\delta$  зависит от  $\varepsilon$ . Поэтому в определении предела иногда пишут  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

**Пример.** Пользуясь определением предела функции, показать, что  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x + 4} = 3$ .

*Решение.* Надо доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что из  $|x - 5| < \delta$  следует  $|f(x) - 3| < \varepsilon$ .

Рассмотрим выражение  $|\sqrt{x + 4} - 3| = \frac{|x - 5|}{|\sqrt{x + 4} + 3|}$ . Так как  $|\sqrt{x + 4} + 3| \geq 3$

при всех  $x$  из области определения функции  $[-4; +\infty)$ , то  $|\sqrt{x + 4} - 3| \leq \frac{|x - 5|}{3}$ .

Поэтому для всех  $x$ , для которых  $|x - 5| < 3\varepsilon$ , справедливо неравенство  $|\sqrt{x + 4} - 3| < \varepsilon$ . Положим  $\delta = 3\varepsilon$ . Тогда будем иметь  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x + 4} = 3$ .

Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$ , если для любой последовательности значений  $x$  ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ ), принадлежащей области определения функции и имеющей пределом число  $x_0$ , последовательность соответствующих значений функции  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ , имеет предел  $A$ .

**Критерий Коши.** Для того чтобы функция  $f(x)$  имела конечный предел при  $x=a$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовало такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что для любых  $x_1$  и  $x_2$  из области определения функции и при  $|x_1 - x_0| < \delta, |x_2 - x_0| < \delta$  выполнялось условие  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .

**Определение.** Число  $b_1$  называется правым (правосторонним) пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x$ , для которых выполняется неравенство  $x_0 < x \leq x_0 + \delta$ , имеет место неравенство  $|f(x) - b_1| < \varepsilon$ .

Правый предел функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  обозначают  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$  или  $f(x_0+0)$ .

**Определение.** Число  $b_2$  называется левым пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x$ , для которых выполняется неравенство  $x_0 - \delta \leq x < x_0$ , выполняется  $|f(x) - b_2| < \varepsilon$ .

Левый предел функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  обозначают  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$  или  $f(x_0-0)$ .

Для того чтобы число  $A$  было пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , необходимо и достаточно, чтобы левый и правый пределы  $f(a+0)$  и  $f(a-0)$  существовали и равнялись  $A$ .

**Пример.** Доказать, что функция  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \leq 0, \\ x+1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$  в точке  $x=0$  не имеет предела (рисунок 3).

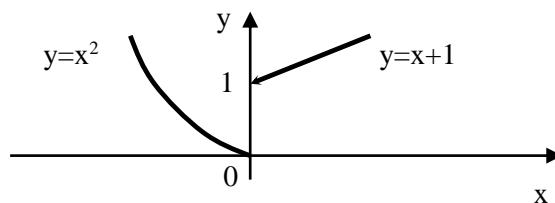


Рисунок 3 – График функции

*Решение.* Функция  $f(x)$  определена на всей числовой прямой. При  $x \leq 0$  функция задается формулой  $f(x) = x^2$ . Тогда левый предел данной функции в точке  $x = 0$  равен нулю, т.е.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$ .

Аналогично доказывается, что правый предел данной функции в точке  $x = 0$  равен 1, т.е.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$ . Следовательно, в точке  $x = 0$  данная функция имеет правый и левый пределы, но они не равны. Это и означает, что функция  $f(x)$  в этой точке не имеет предела, т.е.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  не существует.

**Определение.** Функция  $f(x)$  имеет бесконечный предел при  $x \rightarrow a$ , если, какое бы большое ни было положительное число  $M$ , существует такое число  $\delta > 0$ , что для всех значений  $x$ , для которых выполняется неравенство  $0 < |x - a| < \delta$ , будет выполняться неравенство  $|f(x)| > M$ .

*Обозначение:*  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (или  $-\infty$ , или  $\infty$ ).

**Определение.** Функция  $f(x)$  имеет пределом число  $b$  при  $x \rightarrow \infty$ , если существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для всех  $|x| > N$ , где  $N$  - сколь угодно большое положительное число, имеет место неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

**Пример.** Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ .

*Решение.* Равенство  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$  означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N > 0$  такое, что из неравенства  $|x| > N$  следует неравенство  $\left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{|2x+1|} < \varepsilon$  или  $|2x+1| > \frac{1}{\varepsilon}$ . Найдем значения  $x$ , для которых выполняется последнее неравенство. Так как  $|2x+1| > |2x| - 1$ , то достаточно решить неравенство  $|2x| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ , откуда получаем  $|x| > \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)$ . Если взять

$N = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)$ , то для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x| > N$ , будет

выполняться неравенство  $\left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ . А это и означает, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь определением предела функции в точке, показать, что:

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 5) = 3$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{2}{7}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x+4} = \frac{2}{3}$ .

2. Используя определение предела, доказать, что функция  $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$  в

точке  $x=0$  имеет предел равный 0.

3. Найти в указанных точках односторонние пределы следующих функций:

а)  $f(x) = \frac{1-x^2}{|x-1|}$  при  $x \rightarrow 1$ ; б)  $f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$  при  $x \rightarrow 0$ ;

в)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  при  $x \rightarrow 0$ ; г)  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1-x^2, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$  при  $x \rightarrow 0, x \rightarrow 1, x \rightarrow 2$ .

## 3 Теоремы о пределах

1. Предел постоянной величины  $C$  при  $x \rightarrow a$  равен этой величине:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c.$$

2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций, имеющих конечные пределы, равен алгебраической сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \pm \dots \pm \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, если существуют конечные пределы сомножителей:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел делителя отличен от нуля и пределы делимого и делителя существуют:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \phi(x)} \left( \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) \neq 0, \phi(x) \neq 0 \right).$$

5. Если функция  $f(x)$  удовлетворяет неравенству  $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$  и если  $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = b$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

6. Монотонная функция непрерывного аргумента имеет предел (конечный или бесконечный) при любом значении аргумента  $x$ ; монотонная ограниченная функция имеет конечный предел при любом значении аргумента  $x$ .

7. Постоянный множитель можно вынести за знак предела, т.е.  $\lim_{x \rightarrow a} [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , где  $C$  - постоянный множитель.

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 1)$ .

*Решение.* На основании свойств 1,2,7 имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 3 \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 + 1 = 5,$$

т.к.  $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ .

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 1}$ .

*Решение.* Предел числителя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 1 \cdot 1 + 1 + 2 = 4,$$

а предел знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 \cdot 1 - 1 + 1 = 1.$$

Так как предел знаменателя не равен нулю, то

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 1)} = \frac{4}{1} = 4.$$

**Пример.** Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$ .

*Решение.* Для любого  $x \neq 0$  выполняются неравенства  $1 < \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} < 1 + \frac{1}{x^2}$ .

Имеем  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ , т.к.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ . Тогда получим, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется бесконечно малой функцией (или просто бесконечно малой) в точке  $x = x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

Бесконечно малые функции играют существенную роль: общее понятие предела может быть сведено к понятию бесконечно малой.

**Теорема.** Для выполнения равенства  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  необходимо и достаточно, чтобы функция  $\alpha(x) = f(x) - A$  была бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ .

Из этой теоремы получаем специальное представление для функции, имеющей в точке  $x \rightarrow x_0$  предел, равный  $A$ :

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

При этом говорят, что функция  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  отличается от  $A$  на бесконечно малую функцию при  $x \rightarrow x_0$ .

### Свойства бесконечно малых функций

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией при  $x \rightarrow x_0$ .

2. Произведение любого числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией при  $x \rightarrow x_0$ .

3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную является бесконечно малой функцией при  $x \rightarrow x_0$ .

Все сказанное о бесконечно малых функциях при  $x \rightarrow x_0$  справедливо и для бесконечно малых функций при  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow x_0 + 0$ ,  $x \rightarrow x_0 - 0$ .

**Пример.** Доказать, что функция  $f(x) = (x-1) \cdot \sin \frac{1}{x-1}$  является

бесконечно малой при  $x \rightarrow 1$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \sin \frac{1}{x-1} = 0$ .

*Решение.* Так как  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ , то, функция  $y = (x-1)$  является

бесконечно малой при  $x \rightarrow 1$ , а так как функция  $\sin \frac{1}{x-1} (x \neq 1)$  ограничена

$\left( \left| \sin \frac{1}{x-1} \right| \leq 1 \right)$ , то данная функция  $f(x)$  представляет собой произведение

бесконечно малой функции на ограниченную. Тогда функция  $f(x)$  является

бесконечно малой при  $x \rightarrow 1$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \sin \frac{1}{x-1} = 0$ .

Две бесконечно малые функции сравнивают друг с другом при помощи исследования их отношения.

Рассмотрим две бесконечно малые функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

1. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , то говорят, что  $\beta$  быстрее стремится к нулю, чем  $\alpha$ , или

что  $\beta$  имеет высший (более высокий) порядок малости, чем  $\alpha$ , а  $\alpha$  имеет низший (более низкий) порядок малости, чем  $\beta$ .

2. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$  ( $A$  - число), то говорят, что  $\beta$  и  $\alpha$  имеют

одинаковый порядок малости (или бесконечно малые одного порядка малости).

3. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , то говорят, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются эквивалентными

бесконечно малыми функциями. Эквивалентность обозначается так:  $\alpha \sim \beta$  при  $x \rightarrow a$ .

### Свойства эквивалентных функций

1. Если  $\alpha \sim \beta$ , то  $\beta \sim \alpha$ .

2. Если  $\alpha \sim \beta$  и  $\beta \sim \gamma$ , то  $\alpha \sim \gamma$ .

3. Если  $\alpha \sim \beta$ , то  $\alpha = \beta + \gamma$ , где  $\gamma$  - бесконечно малая функция, т.е. эквивалентные бесконечно малые различаются на бесконечно малую высшего порядка малости.

4. Если  $\alpha = \beta + \gamma$ , то  $\alpha \sim \beta$ , т.е., прибавляя к бесконечно малой величине величину высшего порядка, получаем величину, эквивалентную первой.

5. Если  $\alpha \sim \alpha_1$  и  $\beta \sim \beta_1$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a \cdot \alpha}{b \cdot \beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a \cdot \alpha_1}{b \cdot \beta_1}$ , где  $a$  и  $b$  - любые величины; другими словами, при нахождении предела можно бесконечно малые множители, стоящие в числителе и знаменателе, заменять эквивалентными величинами.

В процессе вычислений приходится часто пользоваться следующими эквивалентными функциями при  $x \rightarrow 0$ :

$$\sin x \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1 \pm x) \sim \pm x, \quad (1 \pm x)^m \sim 1 \pm mx,$$

$$\frac{1}{1 \pm x} \sim 1 \mp x, \quad \sqrt{1 \pm x} \sim 1 \pm \frac{1}{2}x, \quad \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \sim 1 \mp \frac{1}{2}x, \quad \sqrt[3]{1 \pm x} \sim 1 \pm \frac{1}{3}x, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1 \pm x}} \sim 1 \mp \frac{1}{3}x,$$

$$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a, \quad \sin kx \sim kx.$$

**Пример.** Функции  $\sin 3x$  и  $\sin x$  являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow 0$ , поэтому их можно заменить на эквивалентные:  $\sin 3x \sim 3x$ ,  $\sin x \sim x$ .

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3.$$

Так как предел отношения бесконечно малых функций равен 3, то функции являются бесконечно малыми одного порядка малости.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x - 5)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} ((7x + 2)(4x - 3)(5x + 1))$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3 \cos x}{x + 1}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 2}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x - 6}$ ; е)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 + \sqrt{x - 3}}{x^2 - 40}$ ; ж)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ .

2. Показать, что функции

$$\text{а) } f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2 + 1}; \begin{cases} 1) x \rightarrow 0, \\ 2) x \rightarrow 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = (x-1)^2 \cos^{99} \frac{1}{x-1}; \begin{cases} 1) x \rightarrow 1, \\ 2) x \rightarrow 0; \end{cases}$$

являются бесконечно малыми при условии 1) и не являются таковыми при условии 2).

3. Сравнить между собой бесконечно малые при  $x \rightarrow 0$  функции:  $x^3, x^2, x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$  ( $x \geq 0$ ).

4. Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых функций, вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\arcsin 3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{5x}{3}} - 1}{\ln(1+7x)}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt[3]{1-x^4} - 1}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{3-x} - 1}{\operatorname{arctg}^3(6-2x)}.$$

## 4 Вычисление пределов

При вычислении пределов функций часто встречаются случаи, когда применить непосредственно свойства пределов нельзя. Эти случаи называют неопределенностями.

Они бывают нескольких видов:  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0 \cdot \infty$  и

т.д. В этих случаях ничего конкретного о пределе сказать нельзя. Раскрыть эти неопределенности – значит, вычислить предел, если он существует, или установить, что он не существует. Рассмотрим, как это делается в некоторых случаях.

### 4.1 Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Если при вычислении предела функции в точке  $x_0$  (или при  $x \rightarrow \infty$ ) получается отношение двух бесконечно больших функций, то говорят, что имеет

место неопределенность вида  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + 5}{5x^3 + x - 8}$ .

*Решение.* В данном случае свойство предела частного непосредственно применить нельзя, так как ни делимое, ни делитель не имеют конечного предела при  $x \rightarrow \infty$ . Преобразуем дробь, разделив её числитель и знаменатель на  $x$  в старшей степени, т.е. на  $x^3$ . Величина дроби при этом не изменится.

Получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + 5}{5x^3 + x - 8} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}}{5 + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (5 + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3})} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 4 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x^3}} = \\ &= \frac{4 + 0 + 0}{5 + 0 - 0} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt[3]{8x^3 + 1}}{\sqrt[5]{x^5 + 3}}$ .

*Решение.* Как и в предыдущем примере, имеется отношение двух бесконечно больших функций, т.е. неопределенность вида  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ . Разделим числитель и знаменатель на старшую степень  $x$ , при делении корней  $x$  подводим под знак корня. Получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt[3]{8x^3 + 1}}{\sqrt[5]{x^5 + 3}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2 + 5}{x^2}} + \sqrt[3]{\frac{8x^3 + 1}{x^3}}}{\sqrt[5]{\frac{x^5 + 3}{x^5}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + \sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^3}}}{\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x^5}}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^3}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x^5}}} = \frac{1 + 2}{1} = 3 \end{aligned}$$

Таким образом, для отыскания предела отношения двух многочленов при  $x \rightarrow \infty$  оба члена отношения целесообразно разделить на  $x^\alpha$ , где  $\alpha$  - наивысший

показатель степени этих многочленов. Аналогичный прием можно применить и для дробей, содержащих иррациональность (неопределенность вида  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ).

## 4.2 Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Если при вычислении предела функции в точке  $x_0$  получилось отношение двух бесконечно малых функций, то говорят, что имеет место неопределенность вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$ .

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ .

*Решение.* Т.к.  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 6) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0$ , то

имеем неопределенность вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь на общий множитель  $(x - 3)$ . Сокращение можно производить, т.к. в определении предела имеет место неравенство  $0 < |x - x_0| < \delta$ , т.е.  $x \neq x_0$ . В нашем случае  $(x - 3) \neq 0$ . Получим

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 3 - 2 = 1.$$

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{3x^2 - x - 2}$ .

*Решение.* Пусть  $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = P(x)$ , а  $3x^2 - x - 2 = Q(x)$ . Тогда  $P(1) = 0$ ,

$Q(1) = 0$ , т.е. имеет место неопределенность вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . По теореме Безу оба этих многочлена можно без остатка разделить на  $(x - 1)$ .

Разделим  $P(x)$  на  $(x - 1)$ :

$$\begin{array}{r}
x^3 - 4x^2 + 4x - 1 \\
- \quad x^3 - x^2 \\
\hline
-3x^2 + 4x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x-1 \\ \hline x^2 - 3x + 1 \end{array} \right. \\
- \quad -3x^2 + 3x \\
\hline
x - 1 \\
- \quad x - 1 \\
\hline
0
\end{array}$$

Разделив  $Q(x)$  на  $(x-1)$ , получим  $(3x+2)$ . Тогда дробь преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{3x^2 - x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x^2 - 3x + 1)}{(x-1) \cdot (3x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 1}{3x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x+2)} = \\
&= \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 1 + 2} = -\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения предела вида  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$

- многочлены, причем  $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ , нужно разложить многочлены на множители и сократить дробь на  $(x-x_0)$  один или несколько раз. При разложении многочлена на множители можно воспользоваться теоремой Безу, которая говорит о том, если многочлен обращается в нуль при  $x = x_0$ , то он делится на  $(x-x_0)$  без остатка. Поэтому можно сократить дробь делением числителя и знаменателя на  $(x-x_0)$  необходимое число раз.

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ .

*Решение.* Т.к.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , то имеется

неопределенность вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . Для вычисления этого предела освободимся от

иррациональности в числителе, для чего умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, т.е. на  $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$ . В результате чего получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения предела от выражения, содержащего иррациональность (в случае неопределенности  $\left(\frac{0}{0}\right)$ ), необходимо перевести иррациональность из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель.

### 4.3 Неопределенность вида $(\infty - \infty)$

Эта неопределенность раскрывается путем сведения различными преобразованиями к неопределенностям вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$  или  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \cdot x$ .

*Решение.*

а) Пусть  $x \rightarrow +\infty$ . Свойство о пределе суммы непосредственно применить нельзя, так как выражение в скобках есть разность двух бесконечно больших функций, о которой без специального исследования ничего конкретного сказать нельзя. Умножим и разделим функцию на выражение, сопряженное с  $(\sqrt{x^2+1} - x)$ , т.е. на  $(\sqrt{x^2+1} + x)$ .

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\sqrt{x^2+1} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (\sqrt{x^2+1} - x) \cdot (\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2} + \frac{x}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad \text{ò.ê. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0. \end{aligned}$$

б) Пусть  $x \rightarrow -\infty$ . В этом случае выражение, стоящее в скобках, имеет положительное значение и неограниченно возрастает по абсолютной величине.

Множитель  $x$ , стоящий перед скобкой, также неограниченно возрастает по абсолютной величине, но сохраняет отрицательное значение. А поэтому все выражение  $x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)$  при  $x \rightarrow -\infty$  неограниченно возрастает по абсолютной величине, сохраняя отрицательное значение, и  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x) = -\infty$ .

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$ .

*Решение.* Под знаком предела имеется разность двух бесконечно больших функций, т.е. неопределенность вида  $(\infty - \infty)$ . Для вычисления неопределенности приведем дроби к общему знаменателю, разложим числитель на множители и, сократив дробь, вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x + 4) - 12}{(x^3 - 8)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x^2 + 2x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x+4)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)} = \frac{2+4}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### Задачи для самостоятельного решения

#### 1. Вычислить пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)(x - 3)^2}{(3x^3 + 1)(2x + 1)}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}$ ; е)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - x - 20}{3x^4 - 9x^3 - 12x^2 - 9x + 5}$ ; ж)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right)$ ;

з)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{2 - \sqrt{x-4}}{x^2 - 16x - 16}$ ; и)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$ ; к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$ ; л)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

#### 2. Вычислить пределы:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n^2 - 1}}{7n + \sqrt[4]{16n^4 + 1}}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 5n^3 + 9}{6n^5 + 6n^2 + 1}$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3) \cdot n!}{(n+1)!}$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!}$ ;

д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)(4n+5)(7n-4)^2}{(3n-1)(2n^2-3)(1-5n)}$ ; е)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+2}{\sqrt{3n+6}} - \sqrt{3n} \right)$ ; ж)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (7n - \sqrt{49n^2 - 2})$ ;

з)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \sqrt{n^2 + 1} \right)$ ; и)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 1} - n}{\sqrt{n^2 + 2} - n}$ ; к)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n-1}}{3 \cdot 5^{n-2} + 3^{n+4}}$ .

## 5 Замечательные пределы

При вычислении пределов трансцендентных функций часто используются некоторые важные пределы, называемые замечательными.

**Первый замечательный предел:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

где  $x$  - угол в радианах.

**Второй замечательный предел:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e,$$

где  $e \approx 2,71828\dots$

С помощью первого замечательного предела и сравнения бесконечно малых функций рассмотрим раскрытие неопределенностей вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$  и  $(0 \cdot \infty)$ .

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ .

**Решение.** При раскрытии неопределенности следует использовать первый замечательный предел и формулу тригонометрии:  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x^3 \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cdot \cos x} = \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 4} = \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$ .

**Решение.** Используем при решении первый замечательный предел и замену эквивалентных функций.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)}{\sin \pi x} = \left. \begin{array}{l} 1-x=y, \\ x=1-y, \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right| = 2 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin \pi \cdot (1-y)} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin(\pi - \pi y)} = 2 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin \pi y} = 2 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\pi y} = \frac{2}{\pi}, \text{ т.к. } \sin \pi y \sim \pi y \text{ при } y \rightarrow 0.$$

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ .

*Решение.* Подставив вместо  $x$  под знак предела 1, получаем неопределенность вида  $(0 \cdot \infty)$ . Для её раскрытия нужно свести неопределенность к виду  $\left( \frac{0}{0} \right)$ , заменив  $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$  на  $\frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}$ . Тогда получим:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \left( \frac{0}{0} \right) = \left. \begin{array}{l} 1-x=y, \\ x=1-y, \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} (1-y)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi}, \text{ т.к. } \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} \sim \frac{\pi y}{2} \text{ при } y \rightarrow 0.$$

С помощью второго замечательного предела раскрывается неопределенность вида  $(1^\infty)$ . Рассмотрим это на примерах.

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+1}$ .

*Решение.* Найдем пределы основания степени и показателя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{2-0} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) = \infty.$$

В данном случае имеем неопределенность вида  $(1^\infty)$ , для раскрытия которой используем второй замечательный предел. Для этого основание

представим в виде  $1 + \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  - бесконечно малая функция, а в показателе степени выделим множитель  $\frac{1}{\varphi(x)}$  и построим функцию  $(1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}$ .

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+1} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \left( \frac{2x+1}{2x-1} - 1 \right) \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{2} \cdot \frac{2(x+1)}{2x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{2}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{2}} \right]^{\frac{2(x+1)}{2x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2}{2x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}}} = e^1 = e. \end{aligned}$$

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

*Решение.* Т.к.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , а  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ , то получаем неопределенность вида  $(1^\infty)$ . При раскрытии этого вида неопределенности используем второй замечательный предел.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2}{4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \text{ т.к. } 1 - \cos x \sim 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \text{ при } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+x) - \ln 2}{x}$ .

*Решение.* При подстановке  $x=0$  под знак предела получим неопределенность вида  $\left( \frac{0}{0} \right)$ , которую можно раскрыть с помощью второго замечательного предела.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+x) - \ln 2}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln \left( \frac{2+x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( \frac{2+x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x}{2} \right)^{\frac{2}{x}} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln e = \frac{1}{2}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

#### 1. Вычислить пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^3}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x}}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$ ; ж)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\sin 2x}$ ; з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$ ; и)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ ;

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x \sin x - 2 \sin^2 x}{7x^2 - 4x \sin x + \sin^2 x}$ ; л)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 4x}$ ; м)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \left( \cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \right)}$ .

#### 2. Вычислить пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \sqrt{1+x})^{\frac{2}{x}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 4} (9-2x)^{\frac{1}{4-x}}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x^2}}$ ; ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 4x + 9}{x^2 + 3x + 5} \right)^{6x}$ ; з)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$ ; и)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left( \frac{2 \sin x}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{\sin 3x}}$ ;

к)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ ; л)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ ; м)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$ ; н)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$ .

## Библиографический список

1. Садовничая, И.В. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной: учебное пособие для среднего профессионального образования / И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко. – М.: Издательство Юрайт, 2023. – 115 с.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 2002. – 443 с.
3. Демидович, Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Астрель, 2003. – 495 с.
4. Ильин, В.А. Математический анализ. В 2 ч. Часть 1.: учебник для академического бакалавриата / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 324 с.

Учебное издание

**Арабчикова** Юлия Ивановна

**Асаева** Татьяна Александровна

**ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ**

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать \_\_\_\_\_. Тираж 5 экз.

Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета  
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53