

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емец Валерий Сергеевич
Должность: Директор филиала
Дата подписания: 30.06.2026 09:52:45
Уникальный программный ключ:
f2b8a1573c931f1098cfe699d1debd94fcff35d7

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

Н.М. Турусикова

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Рязань
2025

УДК 51-7:33
ББК 22.143:65.05
Т 88

Турусикова, Н.М.

Т88 Применение линейной алгебры в экономике: учебное пособие / Н.М. Турусикова. – Рязань : Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2025. – 24 с.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения направления подготовки 38.03.01 «Экономика», изучающих дисциплину «Линейная алгебра». Приведены многочисленные задачи экономического содержания, которые показывают возможности применения математического аппарата в экономических исследованиях; математические модели многоотраслевой экономики, международной торговли. Линейная алгебра – одна из наиболее полезных отраслей прикладной математики для экономистов. Учебное пособие адресовано в первую очередь студентам экономических специальностей вузов. Однако оно, безусловно, может быть полезно для экономистов, а также для тех, кто хочет самостоятельно углубить свои знания по математике и ее приложениям в экономике.

Печатается по решению методической комиссии Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

УДК 51-7:33
ББК 22.143:65.05

© Турусикова Н.М., 2025
© Рязанский институт (филиал)
Московского политехнического
университета, 2025

Содержание

Введение	4
1 Применение матриц при решении экономических задач	5
2 Использование систем линейных уравнений	8
3 Модель Леонтьева многоотраслевой экономики	11
3.1 Балансовые соотношения.....	11
3.2 Линейная модель многоотраслевой экономики	12
3.3 Продуктивные модели Леонтьева	13
4 Линейная модель торговли	18
5 Упражнения	20
Библиографический список.....	23

Введение

Цель изучения математики в вузе – овладение основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и прикладных задач; формирование умений формализации задач, представления их в виде математических моделей, анализа и интерпретации полученных результатов; выработка навыков математического исследования прикладных вопросов; формирование математической культуры, развитие математического мышления, знаний и умений в использовании математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности. Дисциплина «Линейная алгебра» ориентирована на применение математических методов к решению прикладных задач с учетом характера будущей профессиональной деятельности выпускников.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов экономических специальностей высших учебных заведений.

В современной экономике используется множество математических методов, разработанных ещё в 20 веке. Применение линейной алгебры значительно упростило решение многих экономических задач. В учебном пособии рассматриваются основные способы решения задач с помощью элементов линейной алгебры.

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра – имеют большое значение для экономистов, основная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в простой и компактной матричной форме. Особенно этот вопрос стал актуальным при разработке и использовании баз данных: при работе с ними почти вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

Материал учебного пособия ориентирован на практическое применения линейной алгебры в экономических задачах, не содержит общих теоретических сведений по основным вопросам данного раздела математики. Пособие предназначено для студентов владеющих математической теорией по векторам, матрицам, определителям, системам линейных алгебраических уравнений и методам их решения.

Ученое пособие содержит достаточное количество практических задач в разделе «Упражнения», которые можно использовать для самостоятельного решения студентами, а также для аудиторной работы на практических занятиях.

1 Применение матриц при решении экономических задач

Рассмотрим типичные задачи на применение матриц при решении задач в области экономики.

Пусть предприятие выпускает продукцию m видов, используя при этом n видов сырья. Предположим, что для производства одной единицы продукции i -го вида (i от 1 до m) расходуется сырье j -го типа (j от 1 до n) в количестве a_{ij} единиц, т. е. нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Предположим также, что стоимость единицы сырья j -го типа составляет p_j денежных единиц, j от 1 до n , т. е. стоимость единицы каждого типа сырья задается матрицей-столбцом

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Тогда затраты $S = (s_1 \dots s_n)$ и общая стоимость Q сырья, необходимые для планового выпуска продукции, заданного матрицей строкой $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)$, соответственно вычисляются по формулам:

$$S = B \cdot A, \quad (1)$$

$$Q = S \cdot P. \quad (2)$$

Задача 1. Предприятие выпускает продукцию двух видов, используя при этом три вида сырья. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

стоимость единицы каждого типа сырья (денежных единиц) задается матрицей-столбцом $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, а план выпуска продукции – матрицей-строкой $B = (100 \ 200 \ 300)$. Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Решение. Согласно формуле (1) затраты сырья составляют

$$S = (100 \ 200 \ 300) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = (100 \cdot 1 + 200 \cdot 4 + 300 \cdot 5 \quad 100 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 300 \cdot 1) = (2400 \ 1000).$$

Общую стоимость вычислим по формуле (2)

$$Q = (2400 \ 1000) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (8800).$$

Получили, что общая стоимость сырья составит 8800 денежных единиц.

Задача 2. Пусть затраты четырех видов сырья на выпуск четырех видов продукции характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Здесь каждая строка соответствует определенному виду изделия, а каждый из четырех столбцов соответствует одному из четырех видов сырья по порядку номеров столбцов.

Требуется найти:

- 1) общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку;
- 2) общие затраты на сырье и его транспортировку при условии заданного плана выпуска продукции — матрицы-строки $B = (60 \ 50 \ 35 \ 40)$, если известны себестоимости каждого вида сырья и его доставки, соответственно 4, 6, 5, 8 и 2, 1, 3, 2 денежных единиц.

Решение. Составим матрицу C себестоимостей сырья и его доставки (соответственно 1-я и 2-я строки)

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку находятся в виде произведения матрицы A на транспонированную матрицу C^T

$$A \cdot C^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix}.$$

2. Суммарные затраты на сырье и его транспортировку (в денежных единицах) определяются произведением матрицы B на матрицу $A \cdot C^T$

$$B \cdot (A \cdot C^T) = (60 \ 50 \ 35 \ 40) \cdot \begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix} = (17695 \ 6185).$$

Получили, что общие затраты на сырье составляют 17695 денежных единиц, а затраты на его доставку – 6185 денежных единиц.

Задача 3. В таблице 1 приведены данные о дневной производительности пяти предприятий, выпускающих четыре вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также продолжительность работы каждого предприятия в году, и цена каждого вида сырья.

Таблица 1 – Производительность предприятий

Вид изделия, № п/п	Производительность предприятия, изд./день					Затраты видов сырья изделия, ед. веса/изд.		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
	Количество рабочих дней в году					Цена видов сырья		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	170	120	140	40	50	60

Требуется определить:

- 1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;
- 2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;
- 3) годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска продукции указанных видов и количеств.

Решение. Нужно составить матрицы, характеризующие весь экономический спектр производства, указанный в задаче, а затем при помощи соответствующих операций над ними получить решение данной задачи. Вначале приведем матрицу производительности предприятий по всем видам продукции

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Производительность} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Вид} \\ \text{изделия} . \\ \downarrow \end{matrix}$$

Каждый столбец матрицы A соответствует дневной производительности отдельного предприятия по каждому виду продукции. Следовательно, годовая производительность j -го предприятия по каждому виду продукции получается умножением j -го столбца матрицы A на количество рабочих дней в году для этого предприятия (j от 1 до 5). Таким образом, годовая производительность по каждому из изделий описывается матрицей

$$A_{год} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 170 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix}.$$

Матрица затрат сырья на единицу изделия (эти показатели по условию задачи одинаковы для всех предприятий) имеет вид

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{вид изделия} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \text{вид} \\ \text{сырья} \\ \downarrow \end{matrix}$$

Данный дневной расход по типам сырья на предприятиях описывается произведением матрицы B на матрицу A

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 126 & 53 & 62 & 58 \\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77 \\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82 \end{pmatrix},$$

где i -я строка соответствует номеру типа сырья, а j -й столбец – номеру предприятия согласно таблице 1 (i от 1 до 3; j от 1 до 5).

Ответ на второй вопрос задачи получим по аналогии с матрицей $A_{год}$, то есть в результате умножения столбцов матрицы BA на соответствующие количества рабочих дней в году для предприятий – это годовая потребность каждого предприятия в каждом виде сырья

$$B \cdot A_{год} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11000 & 18900 & 9010 & 7440 & 8120 \\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780 \\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вектор (матрицу-столбец) стоимости сырья

$$P = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Тогда стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия получается в результате умножения матриц

$$S = P \cdot B \cdot A_{год} = \begin{pmatrix} 20080000 \\ 3496500 \\ 1878500 \\ 1494000 \\ 1552600 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, суммы кредитования предприятий для закупки сырья определяются соответствующими компонентами матрицы S .

2 Использование систем линейных уравнений

Рассмотрим задачи, приводящие к составлению и решению систем линейных алгебраических уравнений на основе прогноза выпуска продукции по запасам сырья.

Сформулируем общую постановку задачи прогноза выпуска продукции. Пусть $A = (a_{ij})$, i от 1 до m , j от 1 до n . A – матрица затрат сырья m видов при выпуске продукции n видов. Известные объёмы сырья каждого вида, вектор-план выпуска продукции соответственно составляют матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда объём выпуска продукции определяется из решения системы m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = q_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = q_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = q_m. \end{cases}$$

Задача 4. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице 2. Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Таблица 2 – Исходные данные для задачи 4

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.			Запас сырья, вес. ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Задачи такого рода типичны для прогнозов и оценок функционирования предприятия, экспертных оценках проектов освоения месторождений полезных ископаемых, а также для планирования микроэкономики предприятий.

Решение. Обозначим неизвестные объёмы выпуска продукции через x_1 , x_2 и x_3 . Тогда при условии полного расхода запасов для каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения, которые образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Решим систему уравнений методом Крамера. Для этого составим и вычислим соответствующие определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 54 + 20 + 40 - 75 - 48 - 12 = -21,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2400 & 4 & 5 \\ 1450 & 3 & 1 \\ 1550 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3150,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2400 & 5 \\ 4 & 1450 & 1 \\ 5 & 1550 & 3 \end{vmatrix} = -5250, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2400 \\ 4 & 3 & 1450 \\ 5 & 2 & 1550 \end{vmatrix} = -2100.$$

Находим, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составят по каждому виду соответственно (в условных единицах)

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3150}{-21} = 150, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5250}{-21} = 250 \quad \text{и} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2100}{-21} = 100.$$

Задача 5. Из определенного листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице 3.

Таблица 3 – Количество заготовок по типам

Тип заготовки	Способ раскроя		
	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Решение. Обозначим через x , y , z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Тогда при первом способе раскроя x листов будет получено $3x$ заготовок типа А, при втором – $2y$, при третьем – z заготовок типа А. Для полного выполнения задания по заготовкам типа А должно выполняться равенство

$$3x + 2y + z = 360.$$

Таким же способом для полного выполнения задания по заготовкам типов Б и В получаем уравнения

$$x + 6y + 2z = 300, \quad 4x + y + 5z = 675.$$

Имеем систему

$$\begin{cases} x + 6y + 2z = 300, \\ 3x + 2y + z = 360, \\ 4x + y + 5z = 675. \end{cases} \quad (3)$$

Системе (3) должны удовлетворять неизвестные x , y , z для того, чтобы выполнить задание по заготовкам А, Б и В. Полученная система линейных уравнений (3) выражает в математической форме условия выполнения задания.

Решим систему (3) методом Гаусса. Для этого составим расширенную матрицу системы и приведём ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & | & 300 \\ 3 & 2 & 1 & | & 360 \\ 4 & 1 & 5 & | & 675 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & | & 300 \\ 0 & -16 & -5 & | & -540 \\ 1 & -1 & 4 & | & 315 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & | & 300 \\ 0 & 16 & 5 & | & 540 \\ 0 & -7 & 2 & | & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & | & 300 \\ 0 & 16 & 5 & | & 540 \\ 0 & -14 & 4 & | & 30 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & | & 300 \\ 0 & 16 & 5 & | & 540 \\ 0 & 2 & 9 & | & 570 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & | & 300 \\ 0 & 2 & 9 & | & 570 \\ 0 & 16 & 5 & | & 540 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & | & 300 \\ 0 & 2 & 9 & | & 570 \\ 0 & 0 & -67 & | & -4020 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & | & 300 \\ 0 & 2 & 9 & | & 570 \\ 0 & 0 & 1 & | & 60 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система (3) равносильна следующей системе

$$\begin{cases} x + 6y + 2z = 300, \\ 2y + 9z = 570, \\ z = 60. \end{cases}$$

Решая полученную систему, имеем

$$\begin{cases} x = 90, \\ y = 15, \\ z = 60. \end{cases}$$

Таким образом, вектор (90; 15; 60) есть решение системы, его компоненты отвечают необходимому количеству листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами, для выполнения задания по заготовкам.

3 Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (линейная модель межотраслевого баланса)

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Цель балансового анализа – ответить на вопрос: каким должен быть объём производства каждой из n отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли? При этом каждая отрасль выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продукции и своей, и произведенной другими отраслями. Впервые проблема расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции была сформулирована в 1936 г. в виде математической модели в трудах известного американского экономиста В. Леонтьева.

3.1 Балансовые соотношения

Будем полагать, что производственная сфера хозяйства состоит из n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Обычно процесс производства

рассматривается за некоторый период времени; в ряде случаев такой единицей служит год.

Введем обозначения:

x_i – общий объем продукции i -й отрасли (ее *валовой выпуск*);

x_{ij} – объем продукции i -й отрасли, потребляемый j -ой отраслью при производстве объема продукции x_j ;

y_i – объем продукции i -й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере, или так называемый продукт конечного потребления (**конечный продукт**).

Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовой выпуск i -й отрасли должен быть равным сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме (*гипотеза линейности или простого сложения*) балансовые соотношения имеют вид

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Уравнения (4) называют **соотношениями баланса**. Поскольку продукция разных отраслей имеет разные измерения, в дальнейшем везде будем рассматривать стоимостный баланс.

3.2 Линейная модель многоотраслевой экономики

В. Леонтьев на основании анализа экономики США в период перед второй мировой войной установил, что в течение длительного периода времени величины $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ меняются очень слабо и могут рассматриваться как постоянные числа. Это

явление можно объяснить тем, что технология производства остается на одном и том же уровне довольно длительное время, и, следовательно, объем потребления j -й отраслью продукции i -й отрасли при производстве своей продукции объема x_j есть технологическая константа. В силу этого факта можно сделать следующее допущение: для производства продукции j -й отрасли объемом x_j нужно использовать продукцию i -й отрасли объемом $a_{ij}x_j$, где a_{ij} – постоянное число. При таком допущении технология производства принимается **линейной**, а само это допущение называется **гипотезой линейности**. При этом числа a_{ij} называют **коэффициентами прямых затрат**, и соотношения баланса (4) принимают вид

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Введем обозначения:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец объемов произведенной продукции (вектор

валового выпуска);

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} - \text{вектор конечного потребления};$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица прямых затрат (технологическая или}$$

структурная матрица).

Тогда соотношения баланса (5) в матричной форме можно записать так:

$$X = AX + Y. \quad (6)$$

Матричное уравнение (6) называют **математической моделью линейного статического межотраслевого баланса Леонтьева**.

Математическую модель межотраслевого баланса можно использовать для решения двух основных задач.

1. Известен вектор валового выпуска X и матрица прямых затрат A , требуется рассчитать вектор конечного продукта Y . Для этого в матричном уравнении (6) нужно выразить, а затем вычислить вектор Y .

2. Для периода времени T (например, год) известен вектор конечного потребления Y и матрица прямых затрат A . Требуется определить вектор валового выпуска X . Для этого достаточно решить систему линейных уравнений (6).

В силу прикладного характера задач все элементы матриц A , X и Y должны быть неотрицательными.

3.3 Продуктивные модели Леонтьева

Матрицу A , все элементы которой неотрицательны, называют **продуктивной**, если для любого вектора Y с неотрицательными элементами существует решение уравнения (6) – вектор X , все элементы которого неотрицательны. В этом случае и модель Леонтьева называют продуктивной.

При изучении систем линейных алгебраических уравнений рассматривается соответствующая математическая теория исследования решения и его особенностей для уравнений типа (6). Укажем некоторые ее основные моменты. Приведем без доказательства теорему, позволяющую устанавливать продуктивность матрицы.

Теорема 1. Если для матрицы A с неотрицательными элементами и некоторого вектора Y с неотрицательными компонентами уравнение (6) имеет решение X с неотрицательными элементами, то матрица A продуктивна.

Другими словами, достаточно установить наличие положительного решения системы (6) хотя бы для одного положительного вектора Y , чтобы матрица A была продуктивной. Запишем систему (6) с использованием единичной матрицы E в виде

$$(E - A)X = Y. \quad (7)$$

Если квадратная матрица $E-A$ невырожденная, то есть $|E-A| \neq 0$, то существует обратная матрица $(E-A)^{-1}$, и существует единственное решение системы (7) определяемое равенством

$$X = (E - A)^{-1}Y.$$

Матрицу $(E - A)^{-1}$ называют **матрицей полных затрат**.

Сформулируем несколько критериев продуктивности матрицы A .

Теорема 2. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и все ее элементы неотрицательны.

Теорема 3. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна, если максимум сумм элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы

$$\max_{j=1,n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1 \quad (\max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1),$$

причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Теорема 4. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна тогда и только тогда, когда наибольшее собственное значение матрицы меньше единицы.

Рассмотрим применение модели В. Леонтьева на примерах.

Задача 6. Отрасль состоит из двух предприятий. Вектор валового выпуска продукции и матрица внутреннего потребления имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Найти вектор объемов конечного продукта, предназначенного для реализации вне отрасли.

Решение. Подставим в уравнение (7) матрицы X и A , получим

$$Y = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 - 200 \\ -225 + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вектор конечного продукта

$$Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

Задача 7. В таблице 4 приведены данные об исполнении баланса за отчетный период в условных денежных единицах. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроения сохранится на прежнем уровне.

Таблица 4 – Исходные данные для задачи 7

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
	Энергетика	Машиностроение		
Энергетика	7	21	72	100
Машиностроение	12	15	123	150

Решение.

1) Вектор конечного потребления и вектор валового выпуска за отчетный период имеют соответственно вид

$$Y = \begin{pmatrix} 72 \\ 123 \end{pmatrix} \text{ и } X = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Объемы потребления в отраслях $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$.

2) Вычислим коэффициенты прямых затрат:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{7}{100} = 0,07; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{21}{150} = 0,14; \quad a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{12}{100} = 0,12; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{15}{150} = 0,10.$$

3) Выпишем матрицу прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

Она имеет неотрицательные элементы. Проверим матрицу A на продуктивность с помощью теоремы 3

$$\max\{0,07 + 0,12; 0,14 + 0,10\} = \max\{0,19; 0,24\} = 0,24 < 1.$$

Поэтому для любого вектора конечного продукта Y можно найти необходимый объем валового выпуска X по формуле $X = (E - A)^{-1}Y$.

4) Найдем матрицу полных затрат $(E - A)^{-1}$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix},$$

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,93 \cdot 0,9 - (-0,12) \cdot (-0,14) = 0,8202 \neq 0,$$

$$(E - A)^T = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,12 \\ -0,14 & 0,9 \end{pmatrix}, \quad (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

5) Так как конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроения сохранится на прежнем уровне, то новый вектор конечного продукта имеет вид

$$Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим новый вектор валового выпуска

$$X = (E - A)^{-1}Y = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, валовой выпуск в энергетической отрасли надо увеличить до 179 условных денежных единиц, а в машиностроительной – до 160,5 условных денежных единиц.

Задача 8. В таблице 5 приведены данные по балансу за некоторый период времени между пятью отраслями промышленности в условных денежных единицах. Найти векторы конечного потребления и валового выпуска, а также матрицу коэффициентов прямых затрат и определить, является ли она продуктивной в соответствии с приведенными выше критериями.

Таблица 5 – Исходные данные для задачи 8

№ п/п	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	15	12	24	23	16	10	100
2	Энергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машиностроение	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобильная промышленность	10	5	10	5	5	15	50
5	Добыча и переработка углеводородов	7	15	15	10	3	50	100

Решение. В таблице приведены составляющие баланса в соответствии с соотношениями (4). Вектор конечного потребления, вектор валового выпуска имеют соответственно вид

$$Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Объемы потребления в отраслях:

$$x_{11}=15; x_{12}=12; x_{13}=24; x_{14}=23; x_{15}=16; x_{21}=10; x_{22}=3 \text{ и т.д.}$$

Коэффициенты прямых затрат находим по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

Например, у нас

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{15}{100} = 0,15; a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{12}{100} = 0,12; a_{13} = \frac{x_{13}}{x_3} = \frac{24}{50} = 0,48; a_{14} = \frac{x_{14}}{x_4} = \frac{23}{50} = 0,46 \text{ и т.д.}$$

Таким образом, матрица прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 0,48 & 0,46 & 0,16 \\ 0,1 & 0,03 & 0,7 & 0,3 & 0,07 \\ 0,1 & 0,05 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,07 & 0,15 & 0,3 & 0,2 & 0,03 \end{pmatrix}.$$

Она имеет неотрицательные элементы. Сумма элементов в третьем и четвертом столбцах больше единицы. Следовательно, по теореме 3 матрица A не является продуктивной. Экономическая причина этой непродуктивности заключается в том, что внутреннее потребление отраслей 3 и 4 велико в соотношении с их валовыми выпусками.

Задача 9. Таблица 6 содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Найти объём валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 60, 70 и 30 условных денежных единиц.

Таблица 6 – Данные о балансе трех отраслей для задачи 9

№ п/ п	Отрасль	Конечный продукт			Валовой выпуск	
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	15	12	24	10	100
2	Энергетика	10	3	35	30	100
3	Машиностроение	10	5	10	5	50

Решение. Выпишем векторы валового выпуска X и конечного потребления Y и матрицу A коэффициентов прямых затрат. Согласно формулам (5) и (6) имеем

$$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A удовлетворяет теореме 3 – критерию продуктивности. В случае заданного увеличения конечного потребления новый вектор конечного продукта Y_* будет иметь вид

$$Y_* = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти новый вектор валового выпуска X_* , удовлетворяющий соотношениям баланса (6) в предположении, что матрица A не изменяется. В таком случае компоненты x_1, x_2, x_3 вектора X_* находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 0,05x_1 + 0,35x_2 + 0,4x_3 + 60, \\ x_2 = 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,4x_3 + 70, \\ x_3 = 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 + 30. \end{cases}$$

В матричной форме данная система выглядит следующим образом

$$X_* = A \cdot X_* + Y_*. \quad (8)$$

Запишем систему (8) в виде равенства (7). Для этого найдем матрицу

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,4 \\ -0,1 & 0,9 & -0,4 \\ -0,2 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему

$$\begin{pmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,4 \\ -0,1 & 0,9 & -0,4 \\ -0,2 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

любым известным способом (например, методом Гаусса) получаем новый вектор валового выпуска X_* как решение системы уравнений баланса (8)

$$X_* = \begin{pmatrix} 152,6 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того, чтобы обеспечить заданное увеличение конечного потребления по отраслям, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,6%; уровень энергетики – на 35,8% и выпуск продукции машиностроения – на 85% по сравнению с исходными величинами, указанными в таблице 6.

4 Линейная модель торговли

Одним из примеров экономического процесса, приводящего к понятиям собственного числа и собственного вектора матрицы, является процесс взаимных закупок товаров.

Будем полагать, что n стран ведут торговлю. Обозначим $x_1, x_2, \dots, x_n$ бюджеты этих стран, которые расходуются на покупку товаров. Эти величины называют **национальными торговыми бюджетами**. Будем рассматривать **линейную модель обмена**, или, как ее еще называют, **модель международной торговли**.

Пусть a_{ij} – доля бюджета x_j , которую j -я страна тратит на закупку товаров у i -ой страны. Введем матрицу коэффициентов a_{ij} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Так как национальный торговый бюджет расходует только на закупки товаров внутри страны и вне ее, то справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Другими словами, равенство (10) означает, что сумма элементов любого столбца матрицы A равна единице.

Квадратная матрица A (9) со свойством (10) получила название **структурной матрицы торговли**.

Для i -й страны общая выручка от внутренней и внешней торговли выражается формулой

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Условие сбалансированной (бездефицитной) торговли заключается в том, что выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше ее национального бюджета, то есть $p_i \geq x_i$ или

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq x_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Докажем, что в условиях (11) возможен только знак равенства. Действительно, сложим все эти неравенства при i от 1 до n . Группируя слагаемые с величинами бюджетов x_j , получаем

$$x_1 \sum_{i=1}^n a_{i1} + x_2 \sum_{i=1}^n a_{i2} + \dots + x_n \sum_{i=1}^n a_{in} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что суммы в неравенстве (12) – это суммы элементов матрицы A (9) по ее столбцам от первого до последнего, которые равны единице по условию (10). Следовательно, мы получили неравенство

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

откуда следует, что возможен только знак равенства.

Таким образом, условия (11) принимают вид равенств

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = x_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение вектор национальных бюджетов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, каждая

компонента которого характеризует бюджет соответствующей страны, тогда уравнения (12) можно записать в матричной форме

$$A\vec{x} = \vec{x}. \quad (14)$$

Уравнение (14) означает, что собственный вектор структурной матрицы торговли A , соответствующий ее собственному значению равному единице, состоит из национальных торговых бюджетов стран, удовлетворяющих условию бездефицитной международной торговли.

Задача 10. Структурная матрица торговли двух стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Найти национальные торговые бюджеты этих стран, удовлетворяющие условию сбалансированной бездефицитной торговли при условии, что сумма бюджетов этих стран составляет 1800 условных денежных единиц.

Решение. Для удобства определения вектора $\vec{x}$ перепишем равенство (14) в виде

$$(A - E)\vec{x} = \vec{0} \quad (15)$$

или

$$\left(\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем уравнение

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 0,4 \\ 0,5 & -0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перепишем полученное матричное уравнение в виде системы

$$\begin{cases} -0,5x_1 + 0,4x_2 = 0, \\ 0,5x_1 - 0,4x_2 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса, считая x_1 основной переменной, а x_2 свободной. Тогда $\{x_1 = 0,8x_2; x_2 \in \mathbf{R}\}$, и вектор национальных торговых бюджетов двух стран имеет вид $\vec{x} = x_2 \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Так как сумма торговых бюджетов составляет 1800 условных денежных единиц, то есть $x_1 + x_2 = 1800$, то

$0,8x_2 + x_2 = 1\,800$ и $x_2 = \frac{1\,800}{1,8} = 1\,000$ условных денежных единиц, $x_1 = 0,8 \cdot 1000 = 800$ условных денежных единиц.

Таким образом, национальные торговые бюджеты двух стран составляют соответственно 800 и 1000 условных денежных единиц.

Задача 11. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных торговых бюджетов стран для сбалансированной бездефицитной торговли.

Решение. Находим вектор $\bar{x}$, решая уравнение вида (15). Получим систему

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Применив метод Гаусса, будем иметь

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3, \\ x_2 = 2x_3, \\ x_3 \in R. \end{cases}$$

Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных бюджетов

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}c \\ 2c \\ c \end{pmatrix},$$

где c — произвольное положительное действительное число, т. е. при соотношении национальных бюджетов $\frac{3}{2}:2:1$ или $3:4:2$.

5 Упражнения

1. По данным таблицы 1 составить новую таблицу по следующим условиям:

- дневная производительность всех предприятий увеличивается на 100 %;
- число рабочих дней в году для первого предприятия увеличивается на 50 %, а для остальных — на 40 %;
- цены на виды сырья уменьшаются соответственно на 10, 20 и 30 %.

Определить суммы кредитования предприятий и их соответствующие процентные изменения.

2. Отрасль состоит из трех предприятий. Вектор выпуска продукции и матрица внутреннего потребления имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор объемов конечного продукта, предназначенного для реализации вне отрасли.

3. Отрасль состоит из четырех предприятий. Вектор выпуска продукции и матрица внутреннего потребления имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,10 & 0,24 & 0,25 \\ 0,20 & 0,15 & 0,36 & 0,17 \\ 0,15 & 0,20 & 0,20 & 0,15 \\ 0,30 & 0,15 & 0,20 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор объемов конечного продукта, предназначенного для реализации вне отрасли.

4. Экономическая система состоит из трех отраслей. Матрица прямых затрат и вектор конечного потребления имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0,33 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор валового выпуска.

5. В условиях задачи 9 пункта 3.3 определить прирост объёмов валовых выпусков по каждой отрасли (в процентах), если конечное потребление увеличить по отраслям соответственно на 30, 10 и 50 %.

Решить задачу методом обратной матрицы и методом Гаусса.

6. В таблице 7 приведены данные по балансу за некоторый период времени между пятью отраслями промышленности. Найти векторы конечного потребления и валового выпуска, а также матрицу коэффициентов прямых затрат и определить, является ли она продуктивной.

Таблица 7 – Данные о балансе пяти отраслей промышленности

№ п/п	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	12	18	20	10	16	24	100
2	Энергетика	6	8	8	2	10	16	50
3	Машиностроение	12	9	6	12	15	6	60
4	Автомобильная промышленность	5	10	10	5	5	15	50
5	Добыча и производство углеводородов	27	15	15	12	6	45	120

7. В таблице 8 приведены данные об исполнении баланса за отчетный период в условных денежных единицах. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли должен увеличиться в два раза, а второй отрасли – на 20%.

Таблица 8 – Данные по отраслям за отчетный период

№ п/п	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2		
1	Станкостроение	100	160	240	500
2	Энергетика	275	40	85	400

8. В таблице 9 содержатся данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 50, 80 и 40 условных денежных единиц.

Таблица 9 – Исходные данные для нахождения объёма валового выпуска

№ п/п	Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
2	Энергетика	10	10	20	60	100
3	Машиностроение	20	10	10	10	50

9. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти национальные торговые бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет третьей страны равен 1100 условных денежных единиц.

10. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти национальные торговые бюджеты стран, удовлетворяющие условию сбалансированной бездефицитной торговли при условии, что сумма бюджетов задана уравнением (в условных денежных единицах)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270.$$

11. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид матрицы A . Найти национальные торговые бюджеты стран, удовлетворяющие условию сбалансированной бездефицитной торговли.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \text{ б) } A = \begin{pmatrix} \frac{8}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{6}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}, \text{ в) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{7}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Библиографический список

1. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – Москва : Дело, 2003. – 688 с.
2. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – Санкт-Петербург : Питер, 2009. – 464 с.
3. Кремер, Н.Ш. Математика для экономистов / Н.Ш. Кремер, Б.Т. Путко, И.М. Тришин. – Москва : Издательство Юрайт, 2010. – 646 с.
4. Ключин, В.Л. Высшая математика для экономистов. Практический курс: учебник и практикум для вузов/ В.Л. Ключин. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 143 с.

Учебное издание

Турушикова Надежда Михайловна

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Подписано в печать _____. Тираж 5 экз.

Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53