

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емец Валерий Сергеевич
Должность: Директор
Дата подписания: 23.06.2026 16:48:39
Уникальный программный ключ:
f2b8a1573c931f1098cfe699d1debd94fcff35d7

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

Ю.И. Арабчикова, Т.А. Асаева

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Рязань
2023

УДК 51-7
ББК 22.3
А-79

Арабчикова, Ю.И.

А-79 Предел и непрерывность функции. Часть 1: учебно-методическое пособие / Ю.И. Арабчикова, Т.А. Асаева. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2023. – 28 с.

Данное пособие предназначено студентам младших курсов технических специальностей. В нем детально изложены различные приемы вычисления пределов, подробно разобраны многочисленные примеры, даны задачи для самостоятельного решения.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

УДК 51-7
ББК 22.3

© Арабчикова Ю.И., Асаева Т.А., 2023

© Рязанский институт (филиал)

Московского политехнического

университета, 2023

Содержание

Введение.....	4
1 Понятие функции.....	5
2 Предел функции.....	8
3 Теоремы о пределах функции.....	12
4 Вычисление пределов.....	17
4.1 Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	17
4.2 Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$	19
4.3 Неопределенность вида $(\infty - \infty)$	21
5 Замечательные пределы.....	24
Библиографический список.....	27

Введение

Изучение математики совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует её, приучает человека логически рассуждать, воспитывает у него точность и обстоятельность аргументации. Основной теорией математики является теория пределов.

Операция предельного перехода является одной из основных операций математического анализа и используется как инструмент для исследования переменной величины. Более того, все основные операции математического анализа – непрерывность, дифференцирование, интегрирование, нахождение суммы ряда и др. основаны на понятии предела переменной величины.

Математический анализ в настоящее время является незаменимым инструментом исследования в самых различных областях науки и техники. Знание дифференциального и интегрального исчисления сейчас необходимы каждому инженеру и научному работнику. Но для того, чтобы изучить математический анализ и научиться правильно его применять, необходимо изучить теорию пределов.

1 Понятие функции

При изучении и исследовании разнообразных явлений природы, решении технических задач приходится рассматривать не столько переменные величины, взятые отдельно, сколько связь между ними, зависимость одной величины от другой. В природе не существует переменных величин, которые изменялись бы изолированно, без связи с другими физическими величинами. Например, пройденный путь можно рассматривать как величину, которая изменяется в зависимости от изменения времени, т.е. пройденный путь является функцией времени. Расстояние, на которое летит пушечный снаряд, и точность попадания зависят от массы снаряда, угла возвышения дула пушки, начальной скорости снаряда, направления и силы ветра и многих других факторов. Абстрагируясь от этих конкретных примеров зависимостей между конкретными величинами, в математике ввели понятие функциональной зависимости или функции.

Определение. Пусть даны два непустых множества X и Y , элементами которых могут быть любые объекты. Если каждому элементу x множества X по некоторому закону поставлен в соответствие один и только один элемент множества Y , то говорят, что на множестве X задана функция (или отображение) со множеством значений Y . Обозначения функции: $y = f(x)$, $X \xrightarrow{f} Y$.

Определение. Множество X называют областью определения функции, а множество Y - множеством значений функции.

Переменную величину x называют независимой переменной или аргументом.

Равенство $y = f(x)$ означает, что, применив к значению аргумента x закон f , найдем соответствующее этому значению x значение функции y .

Для обозначения функций используют так же другие буквы латинского и греческого алфавитов, например, $y = u(x)$, $y = g(x)$, $y = \phi(x)$. Значение функции $y = f(x)$ при $x = a$ называют частным значением функции и обозначают $f(a)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости XOY с координатами $(x, f(x))$, где $x \in X$, или (x, y) .

График функции может представлять собой некоторую «сплошную» линию (прямую или кривую) и может состоять из отдельных точек (рисунок 1).

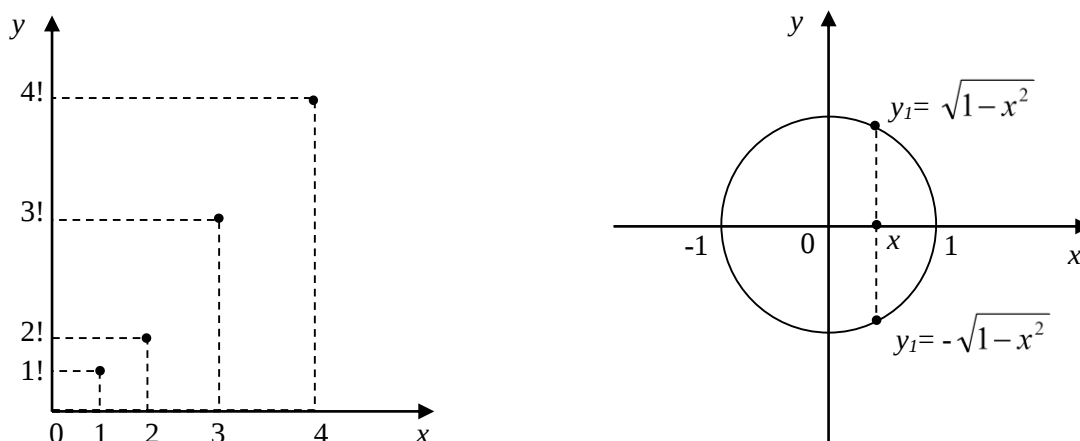


Рисунок 1 – Графики функций

Функция, все значения которой равны между собой, называется постоянной и обозначается буквой C ($f(x) = C$).

Определение. Функция f , определенная на множестве X , называется ограниченной сверху (снизу) на этом множестве, если существует число M (m) такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$).

Определение. Функция, ограниченная сверху и снизу на множестве X , называется ограниченной на этом множестве. Условие ограниченности функции $f(x)$ можно записать в следующем виде: существует число $M > 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$. В противном случае функция называется неограниченной.

Пример. Функция $f(x) = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, так как для произвольного x выполняется условие $|\sin x| \leq 1$ при любом x .

Пример. Функция $f(x) = a^x$ ограничена снизу, так как для любого x выполняется неравенство $0 < a^x$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X , а Y -множество её значений и пусть она ограничена сверху либо снизу на множестве X . Тогда число $M(m)$ и всякое большее (меньшее), число называется верхней (нижней) гранью множества значений функции Y , а наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих множество Y , сверху (снизу), - точной верхней (нижней) гранью функции на множестве X , которая обозначается $\sup_x f(x)$ ($\inf_x f(x)$).

Если множество Y не ограничено сверху (снизу), то пишут $\sup_x f(x) = +\infty$ ($\inf_x f(x) = -\infty$).

Пример. Функция $f(x) = \frac{x}{1+x}$ в промежутке $X = [0; +\infty)$ имеет точную нижнюю грань $m = 0$ и точную верхнюю грань $M = 1$. Действительно, функция ограничена на данном промежутке, так как для любого $x \in [0; +\infty)$ выполняются неравенства $0 \leq \frac{x}{1+x} < 1$ ($m = 0, M = 1$). Значит, m и M являются соответственно нижней и верхней гранями множества значений функции $Y = [0; 1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область определения функций:

а) $y = \sqrt{2 - \log_2(x-2)^2}$; б) $y = \sqrt{\sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{x}}$; в) $y = \sqrt{8 - (0,5)^x}$.

2. Найти наибольшее целое значение x из области определения функции

$$y = \sqrt{(x^2 - 5x + 6)^2} + \sqrt[4]{1-x}.$$

3. Найти область значений функций:

а) $y = (0,2)^{-x^2+4x-6}$; б) $y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$; в) $y = \log_2(|x| + 4) + 1$.

4. Доказать, что функция $y = \frac{x^2}{1+x^4}$ ограничена на всей числовой оси.

5. Является ли функция $y = \lg \sin x$ ограниченной на области определения?

2 Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, за исключением быть может самой точки x_0 .

Определение 5. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (при $x \rightarrow x_0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это записывают так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Определение предела можно записать кратко, используя кванторы $\forall$ (любой, произвольный) и $\exists$ (найдется):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \left(\forall x \in \overset{0}{O}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right),$$

где $\overset{0}{O}(a, \delta)$ - проколота окрестность точки a , т.е. $x \neq a$.

Геометрически: поскольку из $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, то это означает, что для всех точек x , удаленных от точки x_0 не далее чем на δ , точки графика $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε , ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рисунок 2).

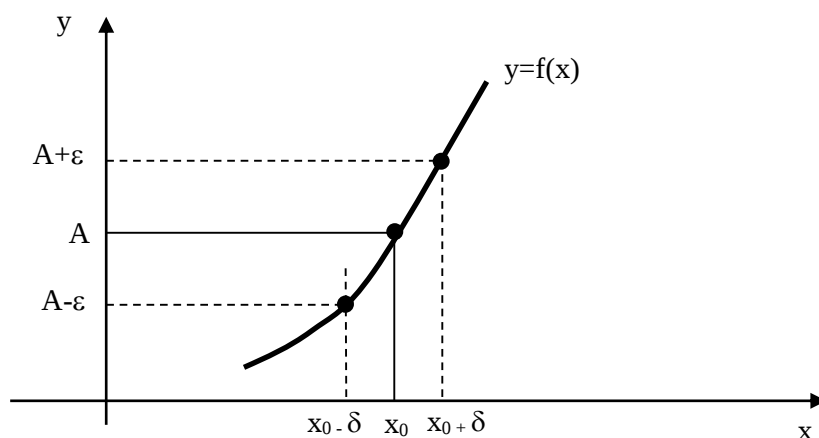


Рисунок 2 – Геометрическое определение предела

Пример. Используя определение предела, доказать, что функция $f(x) = 3x - 2$ в точке $x = 1$ имеет предел, равный 1, т.е. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Задача состоит в том, чтобы по этому ε найти такое $\delta > 0$, при котором из неравенства $|x - 1| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| < \varepsilon$. Преобразуя последнее неравенство, получаем $|3(x - 1)| < \varepsilon$, или $|x - 1| < \varepsilon/3$.

Отсюда видно, что если взять $\delta \leq \frac{1}{3}\varepsilon$, то для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 1| < \delta$, выполняется требуемое неравенство $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$. В частности, если $\varepsilon = 1$, то $\delta \leq \frac{1}{3}$, если $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то $\delta \leq \frac{1}{6}$ и т.д.; т.е. в общем случае, δ зависит от ε . Поэтому в определении предела иногда пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Пример. Пользуясь определением предела функции, показать, что $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x + 4} = 3$.

Решение. Надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $|x - 5| < \delta$ следует $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

Рассмотрим выражение $|\sqrt{x + 4} - 3| = \frac{|x - 5|}{|\sqrt{x + 4} + 3|}$. Так как $|\sqrt{x + 4} + 3| \geq 3$

при всех x из области определения функции $[-4; +\infty)$, то $|\sqrt{x + 4} - 3| \leq \frac{|x - 5|}{3}$.

Поэтому для всех x , для которых $|x - 5| < 3\varepsilon$, справедливо неравенство $|\sqrt{x + 4} - 3| < \varepsilon$. Положим $\delta = 3\varepsilon$. Тогда будем иметь $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x + 4} = 3$.

Число A называется пределом функции $f(x)$, если для любой последовательности значений x ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$), принадлежащей области определения функции и имеющей пределом число x_0 , последовательность соответствующих значений функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, имеет предел A .

Критерий Коши. Для того чтобы функция $f(x)$ имела конечный предел при $x=a$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых x_1 и x_2 из области определения функции и при $|x_1 - x_0| < \delta, |x_2 - x_0| < \delta$ выполнялось условие $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Определение. Число b_1 называется правым (правосторонним) пределом функции $f(x)$ в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x , для которых выполняется неравенство $x_0 < x \leq x_0 + \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b_1| < \varepsilon$.

Правый предел функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ или $f(x_0 + 0)$.

Определение. Число b_2 называется левым пределом функции $f(x)$ в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x , для которых выполняется неравенство $x_0 - \delta \leq x < x_0$, выполняется $|f(x) - b_2| < \varepsilon$.

Левый предел функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$.

Для того чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, необходимо и достаточно, чтобы левый и правый пределы $f(a + 0)$ и $f(a - 0)$ существовали и равнялись A .

Пример. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$ в точке $x = 0$ не имеет предела (рисунок 3).

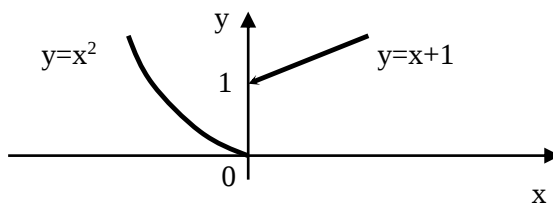


Рисунок 3 – График функции

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. При $x \leq 0$ функция задается формулой $f(x) = x^2$. Тогда левый предел данной функции в точке $x = 0$ равен нулю, т.е. $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$.

Аналогично доказывается, что правый предел данной функции в точке $x = 0$ равен 1, т.е. $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$. Следовательно, в точке $x = 0$ данная функция имеет правый и левый пределы, но они не равны. Это и означает, что функция $f(x)$ в этой точке не имеет предела, т.е. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует.

Определение. Функция $f(x)$ имеет бесконечный предел при $x \rightarrow a$, если, какое бы большое ни было положительное число M , существует такое число $\delta > 0$, что для всех значений x , для которых выполняется неравенство $0 < |x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (или $-\infty$, или ∞).

Определение. Функция $f(x)$ имеет пределом число b при $x \rightarrow \infty$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $|x| > N$, где N - сколь угодно большое положительное число, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пример. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$.

Решение. Равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$ такое, что из неравенства $|x| > N$ следует неравенство $\left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{|2x+1|} < \varepsilon$ или $|2x+1| > \frac{1}{\varepsilon}$. Найдем значения x , для которых выполняется последнее неравенство. Так как $|2x+1| > |2x| - 1$, то достаточно решить неравенство $|2x| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, откуда получаем $|x| > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)$. Если взять

$N = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)$, то для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, будет

выполняться неравенство $\left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$. А это и означает, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь определением предела функции в точке, показать, что:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 5) = 3$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{2}{7}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$; г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x+4} = \frac{2}{3}$.

2. Используя определение предела, доказать, что функция $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ в

точке $x = 0$ имеет предел равный 0.

3. Найти в указанных точках односторонние пределы следующих функций:

а) $f(x) = \frac{1-x^2}{|x-1|}$ при $x \rightarrow 1$; б) $f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ при $x \rightarrow 0$;

в) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ при $x \rightarrow 0$; г) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1-x^2, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$ при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$, $x \rightarrow 2$.

3 Теоремы о пределах

1. Предел постоянной величины C при $x \rightarrow a$ равен этой величине:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c.$$

2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций, имеющих конечные пределы, равен алгебраической сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \pm \dots \pm \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, если существуют конечные пределы сомножителей:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел делителя отличен от нуля и пределы делимого и делителя существуют:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \phi(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) \neq 0, \quad \phi(x) \neq 0 \right).$$

5. Если функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ и если $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

6. Монотонная функция непрерывного аргумента имеет предел (конечный или бесконечный) при любом значении аргумента x ; монотонная ограниченная функция имеет конечный предел при любом значении аргумента x .

7. Постоянный множитель можно вынести за знак предела, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, где C - постоянный множитель.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 1)$.

Решение. На основании свойств 1,2,7 имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 3 \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 + 1 = 5,$$

т.к. $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 1}$.

Решение. Предел числителя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 1 \cdot 1 + 1 + 2 = 4,$$

а предел знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 \cdot 1 - 1 + 1 = 1.$$

Так как предел знаменателя не равен нулю, то

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 1)} = \frac{4}{1} = 4.$$

Пример. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$.

Решение. Для любого $x \neq 0$ выполняются неравенства $1 < \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} < 1 + \frac{1}{x^2}$.

Имеем $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$, т.к. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Тогда получим, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой функцией (или просто бесконечно малой) в точке $x = x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Бесконечно малые функции играют существенную роль: общее понятие предела может быть сведено к понятию бесконечно малой.

Теорема. Для выполнения равенства $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$.

Из этой теоремы получаем специальное представление для функции, имеющей в точке $x \rightarrow x_0$ предел, равный A :

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

При этом говорят, что функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ отличается от A на бесконечно малую функцию при $x \rightarrow x_0$.

Свойства бесконечно малых функций

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow x_0$.

2. Произведение любого числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow x_0$.

3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow x_0$.

Все сказанное о бесконечно малых функциях при $x \rightarrow x_0$ справедливо и для бесконечно малых функций при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0 - 0$.

Пример. Доказать, что функция $f(x) = (x-1) \cdot \sin \frac{1}{x-1}$ является

бесконечно малой при $x \rightarrow 1$, т.е. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \sin \frac{1}{x-1} = 0$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$, то, функция $y = (x-1)$ является

бесконечно малой при $x \rightarrow 1$, а так как функция $\sin \frac{1}{x-1} (x \neq 1)$ ограничена

$\left(\left| \sin \frac{1}{x-1} \right| \leq 1 \right)$, то данная функция $f(x)$ представляет собой произведение

бесконечно малой функции на ограниченную. Тогда функция $f(x)$ является

бесконечно малой при $x \rightarrow 1$, т. е. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \sin \frac{1}{x-1} = 0$.

Две бесконечно малые функции сравнивают друг с другом при помощи исследования их отношения.

Рассмотрим две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$, то говорят, что β быстрее стремится к нулю, чем α , или

что β имеет высший (более высокий) порядок малости, чем α , а α имеет низший (более низкий) порядок малости, чем β .

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$ (A - число), то говорят, что β и α имеют

одинаковый порядок малости (или бесконечно малые одного порядка малости).

3. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$, то говорят, что α и β являются эквивалентными

бесконечно малыми функциями. Эквивалентность обозначается так: $\alpha \sim \beta$ при $x \rightarrow a$.

Свойства эквивалентных функций

1. Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$.

2. Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$.

3. Если $\alpha \sim \beta$, то $\alpha = \beta + \gamma$, где γ - бесконечно малая функция, т.е. эквивалентные бесконечно малые различаются на бесконечно малую высшего порядка малости.

4. Если $\alpha = \beta + \gamma$, то $\alpha \sim \beta$, т.е., прибавляя к бесконечно малой величине величину высшего порядка, получаем величину, эквивалентную первой.

5. Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a \cdot \alpha}{b \cdot \beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a \cdot \alpha_1}{b \cdot \beta_1}$, где a и b - любые величины;

другими словами, при нахождении предела можно бесконечно малые множители, стоящие в числителе и знаменателе, заменять эквивалентными величинами.

В процессе вычислений приходится часто пользоваться следующими эквивалентными функциями при $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1 \pm x) \sim \pm x, \quad (1 \pm x)^m \sim 1 \pm mx,$$

$$\frac{1}{1 \pm x} \sim 1 \mp x, \quad \sqrt{1 \pm x} \sim 1 \pm \frac{1}{2}x, \quad \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \sim 1 \mp \frac{1}{2}x, \quad \sqrt[3]{1 \pm x} \sim 1 \pm \frac{1}{3}x, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1 \pm x}} \sim 1 \mp \frac{1}{3}x,$$

$$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a, \quad \sin kx \sim kx.$$

Пример. Функции $\sin 3x$ и $\sin x$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$, поэтому их можно заменить на эквивалентные: $\sin 3x \sim 3x$, $\sin x \sim x$.

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3.$$

Так как предел отношения бесконечно малых функций равен 3, то функции являются бесконечно малыми одного порядка малости.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x - 5)$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} ((7x + 2)(4x - 3)(5x + 1))$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3 \cos x}{x + 1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 2}$; д) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x - 6}$; е) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 + \sqrt{x - 3}}{x^2 - 40}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Показать, что функции

$$\text{а) } f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2 + 1}; \begin{cases} 1) x \rightarrow 0, \\ 2) x \rightarrow 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = (x-1)^2 \cos^{99} \frac{1}{x-1}; \begin{cases} 1) x \rightarrow 1, \\ 2) x \rightarrow 0; \end{cases}$$

являются бесконечно малыми при условии 1) и не являются таковыми при условии 2).

3. Сравнить между собой бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции: $x^3, x^2, x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$ ($x \geq 0$).

4. Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых функций, вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\arcsin 3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{5x}{3}} - 1}{\ln(1+7x)}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt[3]{1-x^4} - 1}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{3-x} - 1}{\operatorname{arctg}^3(6-2x)}.$$

4 Вычисление пределов

При вычислении пределов функций часто встречаются случаи, когда применить непосредственно свойства пределов нельзя. Эти случаи называют неопределенностями.

Они бывают нескольких видов: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^∞ , ∞^0 , $0 \cdot \infty$ и т.д. В этих случаях ничего конкретного о пределе сказать нельзя. Раскрыть эти неопределенности – значит, вычислить предел, если он существует, или установить, что он не существует. Рассмотрим, как это делается в некоторых случаях.

4.1 Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Если при вычислении предела функции в точке x_0 (или при $x \rightarrow \infty$) получается отношение двух бесконечно больших функций, то говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + 5}{5x^3 + x - 8}$.

Решение. В данном случае свойство предела частного непосредственно применить нельзя, так как ни делимое, ни делитель не имеют конечного предела при $x \rightarrow \infty$. Преобразуем дробь, разделив её числитель и знаменатель на x в старшей степени, т.е. на x^3 . Величина дроби при этом не изменится.

Получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + 5}{5x^3 + x - 8} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}}{5 + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (5 + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3})} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 4 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x^3}} = \\ &= \frac{4 + 0 + 0}{5 + 0 - 0} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt[3]{8x^3 + 1}}{\sqrt[5]{x^5 + 3}}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, имеется отношение двух бесконечно больших функций, т.е. неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Разделим числитель и знаменатель на старшую степень x , при делении корней x подводим под знак корня. Получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt[3]{8x^3 + 1}}{\sqrt[5]{x^5 + 3}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2 + 5}{x^2}} + \sqrt[3]{\frac{8x^3 + 1}{x^3}}}{\sqrt[5]{\frac{x^5 + 3}{x^5}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + \sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^3}}}{\sqrt[5]{1 + \frac{3}{x^5}}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^3}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{1 + \frac{3}{x^5}}} = \frac{1 + 2}{1} = 3 \end{aligned}$$

Таким образом, для отыскания предела отношения двух многочленов при $x \rightarrow \infty$ оба члена отношения целесообразно разделить на x^α , где α - наивысший

показатель степени этих многочленов. Аналогичный прием можно применить и для дробей, содержащих иррациональность (неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$).

4.2 Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Если при вычислении предела функции в точке x_0 получилось отношение двух бесконечно малых функций, то говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

Решение. Т.к. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 6) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0$, то

имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь на общий множитель $(x - 3)$. Сокращение можно производить, т.к. в определении предела имеет место неравенство $0 < |x - x_0| < \delta$, т.е. $x \neq x_0$. В нашем случае $(x - 3) \neq 0$. Получим

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 3 - 2 = 1.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{3x^2 - x - 2}$.

Решение. Пусть $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = P(x)$, а $3x^2 - x - 2 = Q(x)$. Тогда $P(1) = 0$,

$Q(1) = 0$, т.е. имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. По теореме Безу оба этих многочлена можно без остатка разделить на $(x - 1)$.

Разделим $P(x)$ на $(x - 1)$:

$$\begin{array}{r}
x^3 - 4x^2 + 4x - 1 \\
- \frac{x^3 - x^2}{-3x^2 + 4x - 1} \quad \left| \frac{x-1}{x^2 - 3x + 1} \right. \\
- \frac{-3x^2 + 3x}{x-1} \\
- \frac{x-1}{0}
\end{array}$$

Разделив $Q(x)$ на $(x-1)$, получим $(3x+2)$. Тогда дробь преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{3x^2 - x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x^2 - 3x + 1)}{(x-1) \cdot (3x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 1}{3x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x+2)} = \\
&= \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 1 + 2} = -\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения предела вида $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$

- многочлены, причем $P(x_0) = Q(x_0) = 0$, нужно разложить многочлены на множители и сократить дробь на $(x-x_0)$ один или несколько раз. При разложении многочлена на множители можно воспользоваться теоремой Безу, которая говорит о том, если многочлен обращается в нуль при $x = x_0$, то он делится на $(x-x_0)$ без остатка. Поэтому можно сократить дробь делением числителя и знаменателя на $(x-x_0)$ необходимое число раз.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

Решение. Т.к. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, то имеется

неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для вычисления этого предела освободимся от

иррациональности в числителе, для чего умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, т.е. на $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$. В результате чего получим:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1.\end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения предела от выражения, содержащего иррациональность (в случае неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$), необходимо перевести иррациональность из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель.

4.3 Неопределенность вида $(\infty - \infty)$

Эта неопределенность раскрывается путем сведения различными преобразованиями к неопределенностям вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \cdot x$.

Решение.

а) Пусть $x \rightarrow +\infty$. Свойство о пределе суммы непосредственно применить нельзя, так как выражение в скобках есть разность двух бесконечно больших функций, о которой без специального исследования ничего конкретного сказать нельзя. Умножим и разделим функцию на выражение, сопряженное с $(\sqrt{x^2+1} - x)$, т.е. на $(\sqrt{x^2+1} + x)$.

Тогда получим:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\sqrt{x^2+1} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (\sqrt{x^2+1} - x) \cdot (\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} + \frac{x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad \text{ò.ê.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.\end{aligned}$$

б) Пусть $x \rightarrow -\infty$. В этом случае выражение, стоящее в скобках, имеет положительное значение и неограниченно возрастает по абсолютной величине.

Множитель x , стоящий перед скобкой, также неограниченно возрастает по абсолютной величине, но сохраняет отрицательное значение. А поэтому все выражение $x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ при $x \rightarrow -\infty$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, сохраняя отрицательное значение, и $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x) = -\infty$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$.

Решение. Под знаком предела имеется разность двух бесконечно больших функций, т.е. неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Для вычисления неопределенности приведем дроби к общему знаменателю, разложим числитель на множители и, сократив дробь, вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x + 4) - 12}{(x^3 - 8)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x^2 + 2x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x+4)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)} = \frac{2+4}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)(x - 3)^2}{(3x^3 + 1)(2x + 1)}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$;

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}$; е) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - x - 20}{3x^4 - 9x^3 - 12x^2 - 9x + 5}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right)$;

з) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{2 - \sqrt{x-4}}{x^2 - 16x - 16}$; и) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$; к) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$; л) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

2. Вычислить пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n^2 - 1}}{7n + \sqrt[4]{16n^4 + 1}}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 5n^3 + 9}{6n^5 + 6n^2 + 1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3) \cdot n!}{(n+1)!}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!}$;

д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)(4n+5)(7n-4)^2}{(3n-1)(2n^2-3)(1-5n)}$; е) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{\sqrt{3n+6}} - \sqrt{3n} \right)$; ж) $\lim_{n \rightarrow \infty} (7n - \sqrt{49n^2 - 2})$;

з) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 1})$; и) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 1} - n}{\sqrt{n^2 + 2} - n}$; к) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n-1}}{3 \cdot 5^{n-2} + 3^{n+4}}$.

5 Замечательные пределы

При вычислении пределов трансцендентных функций часто используются некоторые важные пределы, называемые замечательными.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

где x - угол в радианах.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e,$$

где $e \approx 2,71828\dots$

С помощью первого замечательного предела и сравнения бесконечно малых функций рассмотрим раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $(0 \cdot \infty)$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Решение. При раскрытии неопределенности следует использовать первый замечательный предел и формулу тригонометрии: $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x^3 \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cdot \cos x} = \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 4} = \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$.

Решение. Используем при решении первый замечательный предел и замену эквивалентных функций.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)}{\sin \pi x} = \left| \begin{array}{l} 1-x=y, \\ x=1-y, \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right| = 2 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin \pi \cdot (1-y)} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin(\pi - \pi y)} = 2 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin \pi y} = 2 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\pi y} = \frac{2}{\pi}, \text{ т.к. } \sin \pi y \sim \pi y \text{ при } y \rightarrow 0.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

Решение. Подставив вместо x под знак предела 1, получаем неопределенность вида $(0 \cdot \infty)$. Для её раскрытия нужно свести неопределенность к виду $\left(\frac{0}{0} \right)$, заменив $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ на $\frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}$. Тогда получим:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} 1-x=y, \\ x=1-y, \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} (1-y)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi}, \text{ т.к. } \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} \sim \frac{\pi y}{2} \text{ при } y \rightarrow 0.$$

С помощью второго замечательного предела раскрывается неопределенность вида (1^∞) . Рассмотрим это на примерах.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+1}$.

Решение. Найдем пределы основания степени и показателя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{2-0} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) = \infty.$$

В данном случае имеем неопределенность вида (1^∞) , для раскрытия которой используем второй замечательный предел. Для этого основание

представим в виде $1 + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - бесконечно малая функция, а в показателе степени выделим множитель $\frac{1}{\varphi(x)}$ и построим функцию $(1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}$.

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+1} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{2x+1}{2x-1} - 1 \right) \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{2} \cdot \frac{2(x+1)}{2x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{2}} \right]^{\frac{2(x+1)}{2x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2}{2x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}}} = e^1 = e. \end{aligned}$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Т.к. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, а $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, то получаем неопределенность вида (1^∞) . При раскрытии этого вида неопределенности используем второй замечательный предел.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2}{4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \text{ т.к. } 1 - \cos x \sim 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \text{ при } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+x) - \ln 2}{x}$.

Решение. При подстановке $x = 0$ под знак предела получим неопределенность вида $\left(\frac{0}{0} \right)$, которую можно раскрыть с помощью второго замечательного предела.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+x) - \ln 2}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln \left(\frac{2+x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{2+x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{\frac{2}{x}} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln e = \frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x}}$;

е) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\sin 2x}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$; и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$;

к) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x \sin x - 2 \sin^2 x}{7x^2 - 4x \sin x + \sin^2 x}$; л) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 4x}$; м) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \right)}$.

2. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \sqrt{1+x})^{\frac{2}{x}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 4} (9-2x)^{\frac{1}{4-x}}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x^2}}$; ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 9}{x^2 + 3x + 5} \right)^{6x}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$; и) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{2 \sin x}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{\sin 3x}}$;

к) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$; л) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; м) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$; н) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$.

Библиографический список

1. Садовничая, И.В. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной: учебное пособие для среднего профессионального образования / И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко. – М.: Издательство Юрайт, 2023. – 115 с.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 2002. – 443 с.
3. Демидович, Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Астрель, 2003. – 495 с.
4. Ильин, В.А. Математический анализ. В 2 ч. Часть 1.: учебник для академического бакалавриата / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 324 с.

Учебное издание

Арабчикова Юлия Ивановна

Асаева Татьяна Александровна

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать _____. Тираж 5 экз.

Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53