

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емец Валерий Сергеевич  
Должность: Директор филиала  
Дата подписания: 28.06.2028 15:38:08  
Уникальный программный ключ:  
f2b8a1573c931f1098cfe699d1debd94fcff35d7

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Рязанский институт (филиал)

федерального государственного образовательного учреждения  
высшего образования

«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

**И.А. Азизян**

# **Математическая статистика**

Учебное пособие

Рязань  
2020

**УДК 519.2**  
**ББК 22.172**  
**А 35**

**Азизян, И.А.**

**А 35** Математическая статистика. Учебное пособие/ И.А. Азизян. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2020. – 48 с.

Учебное пособие содержит основные понятия и теоремы математической статистики, элементы теории вероятностей. Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач. Предназначено для студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки 23.03.03 и специальности 23.05.01.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

**УДК 519.2**  
**ББК 22.172**

© Азизян И.А., 2020  
© Рязанский институт (филиал)  
Московского политехнического  
университета, 2020

## Содержание

1 Основы математической статистики.....	4
1.1 Введение. ....	4
1.2 Предмет математической статистики.....	4
1.3 Генеральная и выборочная совокупности.....	5
1.4 Репрезентативная, повторная и бесповторная выборки .....	5
1.5 Способы отбора.....	6
1.6 Статистическое распределение выборки.....	6
1.7 Полигон и гистограмма.....	7
1.8 Числовые характеристики статистического распределения.....	7
1.9 Задачи статистической проверки гипотез.....	8
1.10 Нормальное распределение.....	13
1.11 Статистические оценки параметров распределения.....	14
1.12 Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности. Дисперсия генеральной сово- купности неизвестна.....	20
1.13 Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупно- стей с неизвестными дисперсиями (зависимые выбор- ки).....	24
2. Задания для текущего контроля.....	29
2.1 Примеры решения тестовых заданий.....	29
2.2 Контрольные вопросы .....	38
Библиографический список.....	41
Приложение А.....	42
Приложение Б.....	44
Приложение В.....	46

# **1 Основы математической статистики**

## **1.1 Введение**

Учебное пособие содержит подробный теоретический материал по дисциплине «Математическая статистика», задания для решения на практических занятиях и для самостоятельного решения, образцы решения тестовых заданий, список контрольных вопросов, список рекомендуемой литературы.

Целью данного пособия является систематизация теоретических сведений, отработка их на примерах и образцах решения задач, а также подбор материала для проведения практических занятий и контрольных работ.

Учебное пособие будет полезно студентам технического вуза при изучении прикладных дисциплин: «Математические основы теории надежности»; «Надежность и диагностика технических систем».

## **1.2 Предмет математической статистики**

*Математическая статистика* – раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

*Предметом* математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий, процессов) по результатам наблюдений.

*Задачи* математической статистики: 1) обработка результатов (необходимо упорядочить результаты наблюдений, представить в удобном для обозрения и анализа виде); 2) оценка характеристик (например, дать оценку неизвестной вероятности события, оценку неизвестной функции распределения, оценку математического ожидания и т.д.); 3) проверка статистических гипотез, т. е. решение вопроса согласования результатов оценивания с опытными данными.

Одной из важнейших задач математической статистики является разработка методов, позволяющих по результатам обследования выборки (т. е. части исследуемой совокупности объектов) делать обоснованные выводы о распределении признака изучаемых объектов по всей совокупности.

Математическая статистика возникла в XVII веке и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX) обязано П.Л. Чебышеву, А.А. Маркову, К. Пирсону и др. В XX веке наиболее существенный вклад в математическую статистику был сделан советскими математиками (А.Н. Колмогоров, Н.В. Смирнов и др.), а также английскими (Стьюдент, Р. Фишер и др.) и американскими (Ю. Нейман, А. Вальд) учеными.

### **1.3 Генеральная и выборочная совокупности**

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты.

*Выборочной совокупностью* или просто выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов.

*Генеральной совокупностью* называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

*Объемом* совокупности называют число объектов этой совокупности.

### **1.4 Репрезентативная, повторная и бесповторная выборки**

*Повторной* называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

*Бесповторной* называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности, то есть выборка должна быть *репрезентативной* (представительной).

## 1.5 Способы отбора

На практике применяются различные способы отбора.

*Простым* случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности.

*Типическим* называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части.

*Механическим* называют отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект.

*Серийным* называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию.

## 1.6 Статистическое распределение выборки

В теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, относительными частотами.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем  $x_i$  наблюдалось  $n_i$  раз. Наблюдаемые значения  $x_i$  называют *вариантами*, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, – *вариационным рядом*. Числа наблюдений называют *частотами*, а их отношения к объему выборки – *относительными частотами*.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

## 1.7 Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки, которой соединяют точки  $(x_i; n_i)$ . Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты  $x_i$ , а на оси ординат – соответствующие им частоты  $n_i$ . Точки  $(x_i; n_i)$  соединяют отрезками прямых и получают полигон частот. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной  $h$  и находят для каждого частичного интервала  $n_i$  – сумму частот вариантов, попавших в  $i$ -й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной  $h$ , а высоты равны отношению  $\frac{n_i}{h}$  (плотность частоты). Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки. Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной  $h$ , а высоты численно равны плотности относительной частоты.

## 1.8 Числовые характеристики статистического распределения

Для выборки можно определить ряд числовых характеристик, аналогичным тем, что в теории вероятностей определялись для случайных величин.

Выборочным средним  $\bar{x}_B$  называется среднее арифметическое всех значений выборки:  $\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i$ .

Выборочное среднее можно записать и так:  $\bar{x}_B = \sum_{i=1}^k x_i \cdot p_i^*$ , где  $p_i^* = \frac{n_i}{n}$ .

Выборочной дисперсией  $D_B$  называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней  $\bar{x}_B$ , т. е.

$\overline{D_B} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B) \cdot n_i$ , или  $\overline{D_B} = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B) \cdot p_i^*$ . Выборочное среднее квадратичное отклонение выборки определяется формулой  $\sigma_B = \sqrt{D_B}$ .

Особенность выборочного с.к.о. состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и изучаемый признак.

При решении практических задач используется и величина  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B) \cdot n_i$ , т. е.  $S^2 = \frac{1}{n-1} D_B$ , которая называется исправленной выборочной дисперсией.

Величина  $S = \sqrt{S^2}$  называется исправленным выборочным средним квадратическим отклонением.

Размахом вариации называется число  $R = x_{\max} - x_{\min}$ , где  $x_{\max}$  — наибольший,  $x_{\min}$  — наименьший вариант ряда.

Модой вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Медианой вариационного ряда называется значение признака, приходящегося на середину ряда.

**1.9 Задачи статистической проверки гипотез**

Одна из часто встречающихся на практике задач, связанных с применением статистических методов состоит в решении вопроса о том, должно ли на основании данной выборки быть принято или, напротив, отвергнуто некоторое предположение (гипотеза) относительно генеральной совокупности.

Процедура сопоставления высказанного предположения (гипотезы) с выборочными данными называется *проверкой гипотез*.

Задачи статистической проверки гипотез ставятся в следующем виде: относительно некоторой генеральной совокупности высказывается та или иная гипотеза  $H$ . Из этой генеральной совокупности извлекается выборка. Требуется указать правило, при помощи которого можно было бы по выборке решить вопрос о том, следует ли отклонить гипотезу  $H$  или принять ее.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки.

Под статистической гипотезой понимают всякое высказывание о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

#### *Проверка гипотез о законе распределения*

Во многих случаях закон распределения изучаемой случайной величины неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет вполне определенный вид: нормальный, биномиальный или какой-либо другой.

Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. (Он используется для проверки согласия предполагаемого вида распределения с опытными данными на основании выборки).

Наиболее часто употребляемый критерий для проверки простой гипотезы о законе распределения – критерий согласия Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^m \frac{n_i^2}{np_i} - n.$$

К. Пирсон (1857-1936; англ. математик, статик, биолог, философ) предложил величину («критерий Пирсона»). Согласно теореме Пирсона, при  $n$  стремящемся к бесконечности, статистика имеет  $\chi$ -квадрат распределение с  $k = m - r - 1$  степенями свободы, где  $m$  – число групп (интервалов) выборки,  $r$  – число параметров предполагаемого распределения.

Правило применения критерия  $\chi$ -квадрат сводится к следующему:

1. Сначала вычисляют выборочное значение статистики критерия  $\chi^2$ -квадрат наблюдения.
2. Выбрав уровень значимости критерия, находят критическую точку (квантиль).
3. Если  $\chi^2$ -квадрат наблюдения меньше или равно критическому значению, то выдвинутая гипотеза о законе распределения принимается, в противном случае, гипотеза отклоняется.

Необходимым условием применения критерия Пирсона является наличие в каждом из интервалов не менее 5 наблюдений. Если в отдельных интервалах их меньше, то число интервалов надо уменьшить путем объединения соседних интервалов.

**Пример.** Измерены 100 обработанных деталей: отклонения от заданного размера следующие:

$[x_i; x_{i+1})$	$[-3;-2)$	$[-2;-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
$n_i$	3	10	15	24	25	13	7	3

Проверить при уровне значимости  $\alpha = 0.01$  гипотезу  $H_0$  о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

**Решение.**

Число наблюдений в крайних интервалах меньше 5, поэтому объединим их с соседними. Получим следующий ряд распределения ( $n = 100$ ):

$[x_i; x_{i+1})$	$[-3;-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;5)$
$n_i$	13	15	24	25	13	10

Случайную величину – отклонение – обозначим через  $X$ .

Для вычисления вероятностей  $p_i$  необходимо вычислить параметры, определяющие нормальный закон распределения  $(a, \sigma)$ . Их оценки вычислим по выборке:

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(-2 \cdot 13 + (-0,5) \cdot 15 + 0,5 \cdot 24 + 1,5 \cdot 25 + 2,5 \cdot 13 + 4 \cdot 10) = 0,885 \approx 0,9.$$

$$D_B = \frac{1}{100}(4 \cdot 13 + 0,25 \cdot 15 + 0,25 \cdot 24 + 2,25 \cdot 25 + 6,25 \cdot 13 + 16 \cdot 10) - (0,885)^2 \approx 2,809.$$

$$\sigma \approx 1,676 \approx 1,7.$$

Находим  $p_i$  ( $i = \overline{1,6}$ ). Так как с. в.  $X \sim N(a, \sigma)$  определена на  $(-\infty; \infty)$ , то крайние интервалы в ряде распределения заменяем, соответственно, на  $(-\infty; -1)$  и  $(3; \infty)$ . Тогда

$$p_1 = P\{-\infty < X < -1\} = \Phi_0\left(\frac{-1-0,9}{1,7}\right) - \Phi_0(-\infty) = \frac{1}{2} - \Phi_0(1,12) = 0,1314.$$

Аналогично получаем:  $p_2 = 0,1667$ ,  $p_3 = 0,2258$ ,  $p_4 = 0,2183$ ,  $p_5 = 0,1503$ ,

$$p_6 = P\{3 \leq X < \infty\} = \Phi_0(\infty) - \Phi_0\left(\frac{3-0,9}{1,7}\right) = \frac{1}{2} - \Phi_0(1,24) = 0,1075.$$

Полученные результаты приведем полученные результаты:

$[x_i; x_{i+1})$	$(-\infty; -1)$	$[-1; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; \infty)$
$n_i$	13	15	24	25	13	10
$n' = np_i$	13,14	16,67	22,58	21,83	15,03	10,75

Вычисляем  $\chi_{набл}^2$ :

$$\chi_{набл}^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^m \frac{n_i^2}{np_i} - n = \left( \frac{13^2}{13,14} + \frac{15^2}{16,67} + \dots + \frac{10^2}{10,75} \right) - 100 = 101,045 - 100 \approx 1,045$$

т.е.  $\chi_{набл}^2 \approx 1,045$ .

Находим число степеней свободы: по выборке рассчитаны два параметра, значит,  $r = 2$ .

Количество интервалов 6, т.е.  $m = 6$ .

Следовательно,  $k = 6 - 2 - 1 = 3$ . Зная, что  $\alpha = 0,01$  и  $k = 3$ , по таблице  $\chi^2$ -распределения находим  $\chi_{\alpha, k}^2 = 11,3$ .

Итак,  $\chi_{набл}^2 < \chi_{\alpha, k}^2$ , следовательно, нет оснований отвергнуть проверяемую гипотезу.

### Индивидуальные задания

**Пример.** Измерены  $N$  обработанных деталей, проверить при уровне значимости  $\alpha = 0.01$  гипотезу  $H_0$  о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

Таблица 1 – Исходные данные

$[x_i; x_{i+1})$	$[-3;-2)$	$[-2;-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
1	3	5	8	9	7	6	5	2
2	13	14	20	25	20	13	12	7
3	23	24	30	35	30	33	32	17
4	13	15	18	19	17	16	15	12
5	23	25	28	29	27	26	25	22
6	33	35	38	38	37	36	35	32
7	43	44	50	55	50	43	42	37
8	23	24	35	35	35	33	32	17
9	23	24	33	34	30	30	28	27
10	31	51	81	91	71	61	51	21
11	13	14	20	25	20	13	12	7
12	22	23	25	30	30	23	22	17
13	12	15	19	19	17	16	15	13
14	28	29	29	29	27	26	25	22
15	23	35	37	38	37	36	35	32
16	43	44	50	53	50	43	42	37
17	23	24	35	35	35	33	32	17
18	23	24	33	39	30	33	32	30
19	23	25	28	29	27	26	25	22
20	33	35	38	38	37	36	35	32

## 1.10 Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины  $X$ , плотность которого имеет вид  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ , где  $a$  – математическое ожидание,  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение  $X$ .

Вероятность того, что  $X$  примет значение, принадлежащее интервалу  $(\alpha; \beta)$ ,  $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ , где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  – функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа  $\delta$ ,  $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ .

В частности, при  $a = 0$  справедливо равенство  $P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ .

**Пример.** Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины  $X$  соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания  $X$  примет значение, заключенное в интервале (12,14).

**Решение.** Воспользуемся формулой  $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ .

Подставив  $\alpha = 12$ ,  $\beta = 14$ ,  $a = 10$  и  $\sigma = 2$ , получим  $P(12 < X < 14) = \Phi(2) - \Phi(1)$ . По приложению находим:  $\Phi(2) = 0,4772$ ,  $\Phi(1) = 0,3413$ . Искомая вероятность  $P(12 < X < 14) = 0,1359$ .

**Пример.** Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения  $X$  подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением  $\sigma = 10$  мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

**Решение.** Математическое ожидание случайных ошибок равно нулю, поэтому применима формула  $P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ . Положив  $\delta = 15$ ,  $\sigma = 10$ , находим  $P(|X| < 15) = 2\Phi(1,5)$ . По таблице приложения находим:  $\Phi(1,5) = 0,4332$ . Искомая вероятность  $P(|X| < 15) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664$ .

**Пример.** Автомат изготавливает детали. Деталь считается годной, если отклонение  $X$  размера от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина  $X$  распределена нормально со средним квадратическим отклонением  $\sigma = 0,4$  мм, найти, сколько в среднем будет годных деталей среди ста изготовленных.

**Решение.** Так как  $X$  – отклонение (от проектного размера), то  $M(X) = a = 0$ . Воспользуемся формулой  $P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ . Подставив  $\delta = 0,7$ ,  $\sigma = 0,4$ , получим  $P(|X| < 0,7) = 2\Phi\left(\frac{0,7}{0,4}\right) = 2\Phi(1,75) = 2 \cdot 0,4599 = 0,92$ .

Таким образом, вероятность отклонения, меньшего 0,7 мм, равна  $P(|X| < 0,7) = 0,92$ . Отсюда следует, что примерно 92 детали из 100 окажутся годными.

## 1.11 Статистические оценки параметров распределения.

### Точечные оценки

Статистической оценкой  $\theta^*$  неизвестного параметра  $\theta$  теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом  $\theta^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – результаты  $n$  наблюдений над количественным признаком  $X$ .

Несмещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Смещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя  $\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i$ .

*Замечание.* Если первоначальные варианты  $x_i$  – большие числа, то для упрощения расчета целесообразно вычесть из каждой варианты одно и то же число  $C$ , то есть перейти к условным вариантам (в качестве  $C$  выгодно принять число, близкое к выборочной средней). Тогда  $\bar{x}_B = C + \frac{\sum n_i u_i}{n}$ .

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная средняя  $D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B) \cdot n_i$ . Эта оценка является смещенной, так как  $M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_G$ .

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия  $S^2 = \frac{n-1}{n} D_B$ .

**Пример.** Из генеральной совокупности извлечена выборка объема  $n = 50$ :

варианта  $x_i$  2 5 7 10

частота  $n_i$  16 12 8 14

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

**Решение.** Несмещенной генеральной средней является выборочная средняя  $\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i = \frac{16 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 14 \cdot 10}{50} = 5,76$ .

**Пример.** По выборке объема  $n = 41$  найдена смещенная оценка  $D_B = 3$  генеральной дисперсии.

Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

**Решение.** Искомая несмещенная оценка равна исправленной дисперсии:  $S^2 = \frac{n-1}{n} D_B = \frac{41}{40} \cdot 3 = 3,075$ .

**Пример.** В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106.

Найти: а) выборочную среднюю длины стержня;

б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

**Решение.**

а) Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{x}_B = 92 + \frac{0 + 2 + 11 + 13 + 14}{5} = 92 + 8 = 100.$$

б) Найдем выборочную дисперсию:

$$D_B = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{(92 - 100)^2 + (94 - 100)^2 + (103 - 100)^2 + (105 - 100)^2 + (106 - 100)^2}{5} = 34$$

Найдем исправленную дисперсию:

$$S^2 = \frac{n-1}{n} D_B = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42,5.$$

### ***Задания для самостоятельной работы***

1. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 40 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найдите вероятность того, что длина наудачу взятой детали больше 55 мм.

2. Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок (одного знака). Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 10 мм. Найдите вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

3. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 20 мм. Найдите вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 мм.

4. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 20 мм и математическим ожиданием 0. Найдите вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

5. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,8 мм. Считая, что случайная величина распределена нормально со средним квадратическим отклонением 0,5 мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

6. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 5 мм и математическим ожиданием 0. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

7. Станок-автомат изготавливает валики, причем контролируется их диаметр  $X$ . Считая, что  $X$  – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 10 мм и средним квадратическим отклонением 0,1 мм, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

8. По статистическим данным наблюдения за размером детали составлена выборка объема 50:

варианта	2	5	7	10
частота	16	12	8	14

Найдите несмещенную оценку генеральной средней.

9. Станок-автомат изготавливает валики, причем контролируется их диаметр  $X$ . Считая, что  $X$  – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 10 мм и средним квадратическим отклонением 0,1 мм, найти интервал, симметричный относительно математического ожида-

ния, в котором с вероятностью  $0,9973$  будут заключены диаметры изготовленных валиков.

10. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 98, 96, 102, 106, 10. Найдите выборочную среднюю длину стержня, выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

11. В итоге четырех измерений диаметра вала прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 82, 83, 86, 81. Найдите выборочную среднюю результатов измерений, выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

12. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений  $40$  м произведено  $5$  равноточных измерений расстояния от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния от цели с надежностью  $0,95$ , зная среднее арифметическое результатов измерений  $2000$  м. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

13. Станок-автомат штампует валики. По выборке объема  $n=100$  вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков. Найдите с надежностью  $0,95$  точность, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров изготавливаемых валиков, зная, что их среднее квадратическое отклонение  $2$  мм. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально.

14. Найдите минимальный объем выборки, при котором с надежностью  $0,975$  точность оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочной средней равна  $0,5$ , если известно среднее квадратическое отклонение  $1,2$  нормально распределенной генеральной совокупности.

15. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений  $30$  и «исправленное» среднее квадратическое отклонение  $7$ .

Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

16. По данным выборки объема 14 из генеральной совокупности найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение, равное двум, нормально распределенного количественного признака. Найдите доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение с надежностью 0,95.

17. Партия изделий принимается, если вероятность того, что изделие окажется бракованным, не превышает 0,03. Среди случайно отобранных 440 изделий оказалось 18 бракованных. Можно ли принять партию?

18. Станок штампует детали. По выборке объема 150 вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков.

Найдите с надежностью 0,95 точность, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров изготавливаемых валиков, зная, что их среднее квадратическое отклонение 2 мм. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально.

19. В итоге шести измерений диаметра вала прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 72, 73, 74, 76, 78. Найдите выборочную среднюю результатов измерений, выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

20. По статистическим данным наблюдения за размером детали составлена выборка объема 50:

варианта	3	4	5	7
частота	17	12	8	14

Найдите несмещенную оценку генеральной средней.

21. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений 14 м произведено 7 равноточных измерений расстояния от орудия до цели.

Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния от цели с надежности 0,9, зная среднее арифметическое результатов измерений 100 м. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

## 1.12 Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности.

### Дисперсия генеральной совокупности неизвестна

Если дисперсия генеральной совокупности неизвестна (например, в случае малых выборок), то в качестве критерия проверки нулевой гипотезы

принимают случайную величину  $T = \frac{(\bar{X} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{S}$ , где  $S = \sqrt{\frac{\sum n_i \cdot x_i^2 - \frac{(\sum n_i x_i)^2}{n}}{n-1}}$  –

исправленное среднее квадратическое отклонение. Величина  $T$  имеет распределение Стьюдента с  $k = n - 1$  степенями свободы.

*Правило 1.* Для того чтобы при заданном уровне значимости  $\alpha$  проверить нулевую гипотезу  $H_0: a = a_0$  о равенстве неизвестной генеральной средней  $a$  (нормальной совокупности с неизвестной дисперсией) гипотетическому значению  $a_0$  при конкурирующей гипотезе  $H_1: a \neq a_0$ , надо вычислить наблюдаемое значение критерия  $T = \frac{(\bar{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{S}$  и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы найти критическую точку  $t_{\text{двуст.кр.}(\alpha; k)}$ .

Если  $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст.кр.}}$  – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если  $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст.кр.}}$  – нулевую гипотезу отвергают.

*Правило 2.* При конкурирующей гипотезе  $H_1: a > a_0$  по уровню значимости  $\alpha$ , и числу степеней свободы  $k = n - 1$  находят критическую точку  $t_{\text{правост.кр.}(\alpha; k)}$  правосторонней критической области. Если  $T_{\text{набл}} < t_{\text{правост.кр.}}$  – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если  $T_{\text{набл}} > t_{\text{правост.кр.}}$  – нулевую гипотезу отвергают.

**Правило 3.** При конкурирующей гипотезе  $H_1: a < a_0$  сначала находят «вспомогательную» критическую точку (по правилу 2)  $t_{\text{правост.кр.}(\alpha;k)}$  и полагают границу левосторонней критической области  $t_{\text{левост.кр.}(\alpha;k)} = -t_{\text{правост.кр.}(\alpha;k)}$ . Если  $T_{\text{набл}} > -t_{\text{правост.кр.}}$  — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если  $T_{\text{набл}} < -t_{\text{правост.кр.}}$  — нулевую гипотезу отвергают.

**Пример.** Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом,  $a = a_0 = 35$  мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

Контролируемый размер $x_i$	34,8	34,9	35,0	35,1	35,3
Частота (число изделий) $n_i$	2	3	4	6	5

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу  $H_0: a = a_0 = 35$  при конкурирующей гипотезе  $H_1: a \neq 35$ .

**Решение.** Найдем средний размер изделий выборки:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i = \frac{34,8 \cdot 2 + 34,9 \cdot 3 + 35,0 \cdot 4 + 35,1 \cdot 6 + 35,3 \cdot 5}{20} = 35,07.$$

Найдем исправленную дисперсию. Для упрощения расчета перейдем к условным вариантам  $u_i = 10 \cdot x_i - 351$ . В итоге получим распределение:

$u_i$	-3	-2	-1	0	2
$n_i$	2	3	4	6	5

Найдем исправленную дисперсию условных вариантов:

$$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{(\sum n_i u_i)^2}{n}}{n-1} = \frac{54 - \frac{(-6)^2}{20}}{19} = 2,747.$$

Следовательно, исправленная дисперсия первоначальных вариантов  $s_x^2 = \frac{2,747}{100} = 0,027$ . Отсюда, «исправленное» среднее квадратическое отклонение  $s_x = \sqrt{0,027} = 0,16$ .

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$T = \frac{(\bar{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{S} = \frac{(35,07 - 35,0)\sqrt{20}}{0,16} = 1,96.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид  $a \neq a_0$ , поэтому критическая область – двусторонняя. По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости  $\alpha = 0,05$  и по числу степеней свободы  $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$  находим критическую точку  $t_{\text{двуст.кр}}(0,05;19) = 2,09$ . Так как  $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст.кр}}$  – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, станок обеспечивает проектный размер изделий.

### **Индивидуальные задания**

**Пример.** Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом,  $a = a_0$  мм. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу  $H_0: a = a_0$  при конкурирующей гипотезе  $H_1: a \neq a_0$ . Измерения случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

Таблица 2 – Исходные данные

1	Контролируемый размер $x_i$  $a = a_0 = 30$	30,5	30,4	30,8	29,5	29	29,6	30	30,1
	Частота (число изделий) $n_i$	6	5	3	6	7	3	1	6
2	Контролируемый размер $x_i$  $a = a_0 = 20$	20,5	20,4	20,8	19,5	19	19,6	20	20,1
	Частота (число изделий) $n_i$	6	5	3	6	7	3	1	6
3	Контролируемый размер $x_i$  $a = a_0 = 40$	40,5	40,3	40,8	39,6	39	39,7	40	40,2
	Частота (число изделий) $n_i$	7	3	1	6	6	3	1	6

Продолжение таблицы 2

4	Контролируемый размер $x_i$  $a = a_0 = 50$	50,3	50,4	50,8	49,6	49	49,7	50	50,3
	Частота (число из- делий) $n_i$	6	3	1	6	7	3	1	6
5	Контролируемый размер $x_i$  $a = a_0 = 60$	60	60,3	60,8	59,6	59	59,7	60	60,2
	Частота (число из- делий) $n_i$	7	3	1	6	6	5	3	6
6	Контролируемый размер $x_i$  $a = a_0 = 70$	70,5	70,3	70,9	69,7	69	69,6	70	70,2
	Частота (число из- делий) $n_i$	5	6	3	6	6	3	1	3
7	Контролируемый размер $x_i$  $a = a_0 = 30$	30,5	30,4	30,8	29,6	29	29,7	30	30,1
	Частота (число из- делий) $n_i$	5	5	4	6	6	3	1	6
8	Контролируемый размер $x_i$  $a = a_0 = 40$	40,5	40,4	40,8	39,5	39	39,6	40	40,1
	Частота (число из- делий) $n_i$	6	5	3	6	7	3	1	6

### 1.13 Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей с неизвестными дисперсиями (зависимые выборки)

Пусть генеральные совокупности  $X$  и  $Y$  распределены нормально, причем их дисперсии неизвестны. Из этих совокупностей извлечены выборки одинакового объема  $n$ , варианты которых равны  $x_i$  и  $y_i$ . Введем следующие обозначения:

$d_i = x_i - y_i$  – разности вариант с одинаковыми номерами,

$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$  – средняя разностей вариант с одинаковыми номерами,

$s_d = \frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n-1}$  – «исправленное» среднее квадратическое отклонение.

*Правило 1.* Для того чтобы при заданном уровне значимости  $\alpha$  проверить нулевую гипотезу  $H_0: M(\bar{X}) = M(\bar{Y})$  о равенстве двух средних нормальных совокупностей  $X$  и  $Y$  с неизвестными дисперсиями (в случае зависимых выборок одинакового объема) при конкурирующей гипотезе  $H_1:$

$M(\bar{X}) \neq M(\bar{Y})$ , надо вычислить наблюдаемое значение критерия:  $T_{набл} = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{s_d}$  и

по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости и числу степеней свободы найти двустороннюю критическую точку. Если  $|T_{набл}| < t_{двуст.кр.}$  – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если  $|T_{набл}| > t_{двуст.кр.}$  – нулевую гипотезу отвергают.

**Пример.** Двумя приборами в одном и том же порядке измерены шесть деталей и получены следующие результаты измерений (в сотых долях миллиметра):

$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$

$y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4.$

По уровню значимости 0,05 установить, значимо или незначимо различаются результаты измерений, в предположении, что они распределены нормально.

**Решение.** Найдем разности  $d_i = x_i - y_i$ ; вычитая из чисел первой строки числа второй, получим:  $d_1 = -8, d_2 = 0, d_3 = -1, d_4 = 5, d_5 = 1, d_6 = 6$ .

Найдем выборочную среднюю, учитывая, что  $\sum d_i = 3, \bar{d} = \frac{3}{6} = 0,5$ .

Найдем «исправленное» среднее квадратическое отклонение, учитывая,

$$\text{что } \sum d_i^2 = 127 \text{ и } \sum d_i = 3: s_d = \frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n-1} = \sqrt{\frac{127 - \frac{9}{6}}{6-1}} = \sqrt{25,1}.$$

Найдем наблюдаемое значение критерия:  $T_{набл} = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{s_d} = \frac{0,5 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{25,1}} = 0,24$ .

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы  $k = n - 1 = 6 - 1 = 5$  находим критическую точку  $t_{двуст.кр(0,05;5)} = 2,57$ .

Так как  $T_{набл} < t_{двуст.кр}$  – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, средние результаты измерений различаются незначительно.

### *Индивидуальные задания*

**Пример.** Двумя приборами в одном и том же порядке измерены шесть деталей и получены следующие результаты измерений (в сотых долях миллиметра). По уровню значимости 0,05 установить, значимо или незначимо различаются результаты измерений, в предположении, что они распределены нормально.

**1.**  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 9$ ;

$y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4$ .

**2.**  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10$ ;

$y_1 = 8, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 5$ .

- 3.**  $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 7, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 9, y_2 = 4, y_3 = 6, y_4 = 2, y_5 = 7, y_6 = 4.$
- 4.**  $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 7, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4.$
- 5.**  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 11, y_2 = 4, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4.$
- 6.**  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4.$
- 7.**  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4.$
- 8.**  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 8, y_2 = 4, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 5.$
- 9.**  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 8, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 10, y_5 = 7, y_6 = 4.$
- 10.**  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4.$
- 11.**  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 9;$   
 $y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4.$
- 12.**  $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4.$
- 13.**  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 10, y_2 = 4, y_3 = 6, y_4 = 10, y_5 = 7, y_6 = 4.$
- 14.**  $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4.$
- 15.**  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$   
 $y_1 = 8, y_2 = 4, y_3 = 6, y_4 = 10, y_5 = 7, y_6 = 4.$

**16.**  $x_1 = 8, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$

$y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 9.$

**17.**  $x_1 = 7, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$

$y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 5, y_5 = 7, y_6 = 8.$

**18.**  $x_1 = 8, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$

$y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 4, y_5 = 7, y_6 = 7.$

**19.**  $x_1 = 6, x_2 = 3, x_3 = 7, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 6;$

$y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 1, y_5 = 7, y_6 = 4.$

**20.**  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10;$

$y_1 = 4, y_2 = 3, y_3 = 6, y_4 = 5, y_5 = 7, y_6 = 6.$

**Пример.** По заданным исходным данным необходимо найти и построить эмпирическую функцию распределения, построить полигон частот, найти числовые характеристики и точечные оценки числовых характеристик.

**1.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$n_i$	2	4	6	10	18	20	16	11	7	5	1

Найти и построить эмпирическую функцию распределения, построить полигон частот. Найти точечные оценки числовых характеристик.

**2.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	[9, 11)	[11, 13)	[13, 15)	[15, 17)	[17, 19)	[19, 21)	[21, 23]
$n_i$	6	13	18	25	18	12	8

Построить гистограмму частот и найти числовые характеристики.

**3.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38
$n_i$	1	4	6	10	19	20	15	11	9	3	2

Найти и построить эмпирическую функцию распределения, построить полигон частот. Найти точечные оценки числовых характеристик.

**4.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	[7, 9)	[9, 11)	[11, 13)	[13, 15)	[15, 17)	[17, 19)	[19, 21]
$n_i$	5	11	20	27	19	12	6

Построить гистограмму частот и найти числовые характеристики.

**5.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
$n_i$	2	4	6	10	18	20	16	11	7	5	1

Найти и построить эмпирическую функцию распределения, построить полигон частот. Найти точечные оценки числовых характеристик.

**6.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
$n_i$	1	5	5	11	17	21	15	12	8	4	1

Найти и построить эмпирическую функцию распределения, построить полигон частот. Найти точечные оценки числовых характеристик.

**7.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	[11, 14)	[14, 17)	[17, 20)	[20, 23)	[23, 26)	[26, 29)	[29, 32]
$n_i$	4	10	21	27	22	11	5

Построить гистограмму частот и найти числовые характеристики.

**8.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
$n_i$	2	4	7	11	16	21	15	11	7	5	1

Найти и построить эмпирическую функцию распределения, построить полигон частот. Найти точечные оценки числовых характеристик.

**9.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	[15, 18)	[18, 21)	[21, 24)	[24, 27)	[27, 30)	[33, 36)	[36, 39]
$n_i$	5	11	22	26	21	11	4

Построить гистограмму частот и найти числовые характеристики.

## 10. Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	22	25	27	29	32,5	34,5	37	39,5	42,5	45	48
$n_i$	2	4	6	10	18	20	16	11	7	5	1

Найти и построить эмпирическую функцию распределения, построить полигон частот. Найти точечные оценки числовых характеристик.

## 2. Задания для текущего контроля

*Вопросы для повторения*

1. Теоремы теории вероятностей.
2. Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.
3. Законы распределения вероятностей непрерывных случайных величин.
4. Основные понятия математической статистики.
5. Элементы корреляционного анализа.

### 2.1 Примеры решения тестовых заданий

*Задание №1.*

Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет нечетное число очков, равна...

- $\frac{1}{3}$       $\frac{1}{2}$       $\frac{1}{6}$      0,1

*Решение.*

Рассмотрим событие  $A$  – на верхней грани выпадет нечетное число очков. Воспользуемся формулой  $P(A) = \frac{m}{n}$ , где  $n$  – общее число возможных элементарных исходов испытания, а  $m$  – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события  $A$ . В нашем случае возможны 6 элементарных исходов, из которых благоприятствующими являются три исхода

(одно очко, три очка и пять очков). Следовательно,  $m=3$ ,  $n=6$ ,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \text{ Ответ: } \frac{1}{2}.$$

### **Задание №2.**

С первого станка на сборку поступает 20%, со второго – 80% всех деталей. Среди деталей первого станка 85% стандартных, второго – 95%. Наудачу взятая деталь оказалась нестандартной. Тогда вероятность того, что она поступила на сборку со второго станка равна...

$\frac{4}{7}$       $\frac{3}{7}$       $\frac{9}{14}$      0,07

*Решение.*

Рассмотрим событие  $A$  – взятая наудачу деталь оказалась нестандартной. Тогда по формуле полной вероятности  $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)$ .

$B_1$  – деталь поступила с первого станка, тогда  $P(B_1) = 0,2$ .

$B_2$  – деталь поступила со второго станка, тогда  $P(B_2) = 0,8$ .

$P_{B_1}(A)$  – условная вероятность того, что деталь нестандартна, если она изготовлена на первом станке,  $P_{B_1}(A) = 0,15$ .

$P_{B_2}(A)$  – условная вероятность того, что деталь нестандартна, если она изготовлена на втором станке,  $P_{B_2}(A) = 0,05$ .

Тогда вероятность события  $A$  равна  $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0,2 \cdot 0,15 + 0,8 \cdot 0,05 = 0,07$ .

Вероятность того, что нестандартная деталь поступила на сборку со второго станка, вычислим по формуле Байеса:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,8 \cdot 0,05}{0,07} = \frac{0,04}{0,07} = \frac{4}{7}. \text{ Ответ: } \frac{4}{7}.$$

**Задание №3.**

Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения вероятностей:

$X$	1	3	5	6
$P$	0,1	$a$	$b$	0,3

Тогда значения  $a$  и  $b$  могут быть равны...

- $a = 0,3, b = 0,2$
- $a = 0,3, b = 0,1$
- $a = 0,6, b = 0,6$
- $a = 0,4, b = 0,2$

*Решение.*

Так как сумма вероятностей возможных значений  $X$  равна 1, то  $a + b = 1 - 0,1 - 0,3 = 0,6$ . Этому условию удовлетворяет ответ:  $a = 0,4, b = 0,2$ .

**Задание №4.**

Из генеральной совокупности извлечена выборка объема  $n = 110$ :

$x_i$	4	6	8	10	12	14
$n_i$	10	15	20	25	30	$n_6$

Тогда значение  $n_6$  равно...

- 10
- 20
- 35
- 110

*Решение.*

Объем выборки вычисляется по формуле  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ , где  $n_i$  – частота варианты  $x_i$ . Тогда  $n_6 = 110 - 10 - 15 - 20 - 25 - 30 = 10$ . *Ответ:* 10.

**Задание №5.**

В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 12,5; 14,5; 16,5. Тогда несмещенная оценка дисперсии равна...

- 2    ○ 4    ○ 14,5    ○ 8

*Решение.*

Несмещенная оценка дисперсии вычисляется по формуле:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}, \quad \text{где} \quad \bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad \text{Найдем}$$

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{12,5 + 14,5 + 16,5}{3} = 14,5$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1} = \frac{(12,5 - 14,5)^2 + (14,5 - 14,5)^2 + (16,5 - 14,5)^2}{3-1} = 4. \text{ Ответ: } 4.$$

**Задание №6.**

Непрерывная случайная величина  $X$  задана плотностью распределения вероятностей  $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{50}}$ . Тогда математическое ожидание  $a$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  этой случайной величины равны...

- $a = -4, \sigma = 50$     ○  $a = 5, \sigma = 4$   
 ○  $a = 4, \sigma = 5$     ○  $a = 4, \sigma = 25$

*Решение.*

Плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины  $X$  имеет вид:  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ , где  $a = M(X)$ ,  $\sigma = \sigma(X)$ .

Поэтому  $a = 4, \sigma = 5$ . *Ответ:  $a = 4, \sigma = 5$ .*

**Задание №7.**

Дан доверительный интервал  $(18,44; 19,36)$  для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда точечная оценка математического ожидания равна...

- 18,9    0,46    18,85    19,0

*Решение.*

Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенного количественного признака представляет собой интервал, симметричный относительно точечной оценки. Тогда точечная оценка будет равна  $\frac{18,44+19,36}{2}=18,9$ . *Ответ:* 18,9.

**Задание №8.**

При построении выборочного уравнения парной регрессии вычислены выборочный коэффициент корреляции  $r_B = 0,86$  и выборочные средние квадратические отклонения  $\sigma_X = 2,4$  и  $\sigma_Y = 4,8$ . Тогда выборочный коэффициент регрессии  $Y$  на  $X$  равен

- 0,43    8,05  
 -1,72    1,72

*Решение.*

Выборочный коэффициент регрессии  $Y$  на  $X$  вычисляется по формуле

$$\rho_{YX} = r_B \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad \rho_{YX} = 0,86 \cdot \frac{4,8}{2,4} = 1,72. \quad \text{Ответ: } 1,72.$$

**Задание №9.**

Если основная гипотеза имеет вид  $H_0: p = 0,3$ , то конкурирующей гипотезой может являться...

- $H_1: p \neq 0,3$      $H_1: p \leq 0,3$   
  $H_1: p \geq 0,3$      $H_1: p \geq 0,2$

*Ответ:*  $p \neq 0,3$ .

**Задание №10.**

Мода вариационного ряда 3, 4, 6, 6, 7, 10, 11, 12 равна...

7    3    12    6

*Решение.*

Модой вариационного ряда называется варианта, имеющая наибольшую частоту.

Такой вариант является варианта 6, частота которой равна двум.

*Ответ:* 6.

**Задание №11.**

Медиана вариационного ряда 3, 4, 5, 6, 7, 12 равна...

5    6    5,5    7,5

*Решение.*

Медианой вариационного ряда называется варианта, расположенная в середине вариационного ряда. Так как в середине ряда располагаются две варианты 5 и 6, то медиана равна их средней арифметической 5,5.

*Ответ:* 5,5.

**Задание №12.**

Даны две независимые дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ :

$X$	1	2
$p$	0,2	0,8

$Y$	3	5
$q$	0,4	0,6

Тогда закон распределения вероятностей суммы  $X + Y$  имеет вид...

$Y$	4	7
$q$	0,3	0,7

$X + Y$	4	5	6	7
$p$	0,2	0,8	0,4	0,6

○

$X+Y$	4	5	6	7
$p$	0,08	0,32	0,12	0,48

*Решение.*

Возможные значения  $X_{ij}$  суммы дискретных случайных величин определяются как  $X_{ij} = X_i + Y_j$ , а соответствующие вероятности как произведение  $p_{ij} = p_i \cdot q_j = p(X = x_i) \cdot p(y = y_j)$ . Соответственно,

$X+Y$	4	5	6	7
$p$	0,08	0,32	0,12	0,48

### **Задание № 13.**

Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид  $y = 6 - 3x$ . Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен...

- $-0,9$    ○  $0,9$    ○  $6,0$    ○  $-3,0$

*Решение.*

Значение выборочного коэффициента корреляции, во-первых, принадлежит промежутку  $[-1; 1]$ , а во-вторых, его знак совпадает со знаком выборочного коэффициента регрессии. Этим условиям удовлетворяет значение  $-0,9$ .

*Ответ:*  $-0,9$ .

### **Задания для самостоятельной подготовки**

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости выпало 2 очка при условии, что сумма очков, выпавших на двух костях, меньше 6.

2. Из двух колод вынимают по одной карте. Событие  $A$  – {карта из первой колоды красной масти} и  $B$  – {карта из второй колоды бубновой масти}. Укажите верные утверждения:

- 1) события  $A$  и  $B$  являются зависимыми;
- 2) события  $A$  и  $B$  являются несовместными;
- 3) события  $A$  и  $B$  являются совместными;

4) события  $A$  и  $B$  являются независимыми.

3. Случайные события  $A$  и  $B$ , удовлетворяющие условиям  $P(A) = 0,6, P(B) = 0,4, P(AB) = 0,2$ , являются:

- 1) совместными и зависимыми;
- 2) несовместными и зависимыми;
- 3) совместными и независимыми;
- 4) несовместными и независимыми.

4. Для улучшения качества радиосвязи используются два радиоприемника. Вероятность приема сигнала каждым приемником равна  $0,8$ , и эти два события (прием сигнала приемником) независимы. Определить вероятность приема сигнала, если вероятность безотказной работы за время сеанса радиосвязи для каждого приемника равна  $0,9$ .

5. По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих разнотипную продукцию, равны  $0,3$  и  $0,35$ . Найти вероятность банкротства обоих предприятий.

6. По мишени производится три выстрела. Значение вероятности ни одного попадания при всех трех выстрелах равно  $0,6$ ; значение вероятности ровно одного попадания -  $0,2$ ; значение вероятности ровно двух попаданий -  $0,1$ . Найти вероятность того, что мишень будет поражена **не менее двух** раз.

7. Вероятность того, что деталь бракованная, равна  $0,005$ . Проверяется  $400$  деталей. Определить вероятность того, что больше  $3$  деталей оказались с браком.

8. Внутри круга радиуса  $4$  наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется вне вписанного в круг квадрата.

9. Монета подбрасывается пять раз. Построить ряд и многоугольник распределения дискретной случайной величины  $Z$  – числа выпадений герба.

10. Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения вероятностей:

$X$	-1	3	6	7	8
$p$	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1

Найти её функцию распределения и вероятность  $P(3 \leq x \leq 7)$ .

11. Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения вероятностей:

$x$	-1	5
$p$	0,3	0,7

Определить её числовые характеристики.

12. Непрерывная случайная величина  $X$  задана плотностью распределения вероятностей;

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ Cx^3 & \text{при } 0 < x \leq 6, \\ 0 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Найти значение параметра  $C$ .

13. Непрерывная случайная величина  $X$  задана плотностью распределения вероятностей;

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 2x/25 & \text{при } 0 < x \leq 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

14. Непрерывная случайная величина  $X$  задана функцией распределения вероятностей;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 / 25 & \text{при } 0 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти её плотность распределения и  $P(4 < x < 6)$ .

15. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины  $X$  с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-6)^2}{50}}.$$

16. Найти моду вариационного ряда 1, 2, 5, 6, 7, 7, 10.

17. Найти исправленную дисперсию  $S^2$  для выборки объема  $n = 10$ , если выборочная дисперсия  $D = 180$ .

18. Определить выборочный коэффициент корреляции, если выборочное уравнение парной регрессии имеет вид  $y = -3 + 2x$

## 2.2 Контрольные вопросы

*Направление подготовки 23.05.01, 23.03.03.*

### *1. Выборки и их характеристики*

Предмет математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Графическое изображение статистического распределения. Числовые характеристики статистического распределения.

### *2. Законы распределения случайных величин*

Закон биномиального распределения; закон редких событий (Пуассона); закон нормального распределения; характеристика отклонений от нормального закона; закон распределения эксцентриситета (Релея).

### *3. Выборочный метод*

Основные понятия и определения теории выборок; задачи выборочного метода; свойства выборочных средних и дисперсий; оценка точности вычисления генеральной средней по данным выборки; оценка точности вычисления среднего квадратического отклонения; генеральной совокупности по данным выборки; оценка параметров нормального распределения с помощью доверительных интервалов; обработка статистических данных и определение характеристик эмпирического распределения; сопоставление и проверка сходимости эмпирических распределений с теоретическими.

### *4. Элементы теории оценок и проверки гипотез*

Оценка неизвестных параметров. Методы нахождения точечных оценок. Понятие интервального оценивания параметров. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Проверка статистических гипотез. Проверка гипотез о законе распределения.

### *5. Статистические методы в технологических исследованиях*

Исследование влияния технологических факторов на точность обработки и шероховатость поверхности. Обработка экспериментальных данных по способу наименьших квадратов.

*6. Анализ точности, стабильности и устойчивости технологических процессов*

Статистическое регулирование технологического процесса. Статистический приемочный контроль надежности.

Статистический анализ точности механической обработки и статистическое регулирование технологических процессов.

### *7. Теоретические диаграммы точности обработки*

Задачи статистического анализа точности механической обработки. Статистический анализ посредством больших выборок. Статистический анализ посредством малых выборок. Статистический анализ с помощью точечных диаграмм. Оценка точности обработки формы и взаимного расположения поверхностей и осей деталей. Статистические методы регулирования

технологических процессов. Механизация операций статистического анализа и статистического регулирования технологических процессов. Точность обработки изделий в машиностроении и методы ее достижения.

#### *8. Основные погрешности при механической обработке и сборке*

Погрешности механической обработки и законы их распределения. Определение погрешностей обработки методом математической статистики. Определение погрешностей в процессе обработки. Корреляционный анализ технологических процессов. Установление связей между точностными характеристиками двух смежных операций технологического процесса. Анализ точности работы поточных линий.

## Библиографический список

- 1 Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учебное пособие для студ. вузов/Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: «Академия», 2005. – 576 с.
- 2 Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов/ В.Е. Гмурман. – М: Высшая школа, 1998. – 400 с.
- 3 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов/ В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1998. – 479 с.
- 4 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам/ Д.Т. Письменный – М.: Айрис-пресс, 2007. – 288 с.
- 5 Фадеева, Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций/Л.Н. Фадеева. – М.: Эксмо, 2006. – 336 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

**Таблица А.1— Значения функции Лапласа**

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000

**Продолжение таблицы А.1**

0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760		
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774		
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788		
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801		
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813		
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825		
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836		
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846		
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856		

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

**Таблица Б.1—Критические точки распределения Стьюдента**

k \ $\alpha$	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,924
4	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
35	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,5911
40	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
45	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,5203
50	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,4960

### Продолжение таблицы Б.1

55	1,6730	2,004	2,3961	2,6682	3,4764
60	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
70	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,4350
80	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
90	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,4019
100	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,3905
110	1,6588	1,9818	2,3607	2,6213	3,3812
120	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
$\infty$	1,6448	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

Распределение Стьюдента используется при проверке статистических гипотез при небольшом объёме выборки. Изучать малые выборки начал английский статистик В.С. Госсет (псевдоним Стьюдент) в 1908 году. Он доказал, что оценка расхождения между средней малой выборки и генеральной средней подчинена особому закону распределения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

**Таблица В.1—Таблица критических точек распределения Пирсона**

k / $\alpha$	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,63490	5,02389	3,84146	0,00393	0,00098	0,00016
2	9,21034	7,37776	5,99146	0,10259	0,05064	0,02010
3	11,34487	9,34840	7,81473	0,35185	0,21580	0,11483
4	13,2767	11,14329	9,48773	0,71072	0,48442	0,29711
5	15,08627	12,8325	11,0705	1,14548	0,83121	0,55430
6	16,81189	14,44938	12,59159	1,63538	1,23734	0,87209
7	18,47531	16,01276	14,06714	2,16735	1,68987	1,23904
8	20,09024	17,53455	15,50731	2,73264	2,17973	1,64650
9	21,66599	19,02277	16,91898	3,32511	2,70039	2,08790
10	23,20925	20,48318	18,30704	3,94030	3,24697	2,55821
11	24,72497	21,92005	19,67514	4,57481	3,81575	3,05348
12	26,21697	23,33666	21,02607	5,22603	4,40379	3,57057
13	27,68825	24,7356	22,36203	5,89186	5,00875	4,10692
14	29,14124	26,11895	23,68479	6,57063	5,62873	4,66043
15	30,57791	27,48839	24,99579	7,26094	6,26214	5,22935
16	31,99993	28,84535	26,29623	7,96165	6,90766	5,81221
17	33,40866	30,19101	27,58711	8,67176	7,56419	6,40776
18	34,80531	31,52638	28,86930	9,39046	8,23075	7,01491
19	36,19087	32,85233	30,14353	10,11701	8,90652	7,63273
20	37,56623	34,16961	31,41043	10,85081	9,59078	8,26040
21	38,93217	35,47888	32,67057	11,59131	10,2829	8,89720
22	40,28936	36,78071	33,92444	12,33801	10,98232	9,54249
23	41,63840	38,07563	35,17246	13,09051	11,68855	10,19572
24	42,97982	39,36408	36,41503	13,84843	12,40115	10,85636
25	44,31410	40,64647	37,65248	14,61141	13,11972	11,52398
26	45,64168	41,92317	38,88514	15,37916	13,84391	12,19815
27	46,96294	43,19451	40,11327	16,15140	14,57338	12,87850
28	48,27824	44,46079	41,33714	16,92788	15,30786	13,56471
29	49,58788	45,72229	42,55697	17,70837	16,04707	14,25645
30	50,89218	46,97924	43,77297	18,49266	16,79077	14,95346
31	52,19139	48,23189	44,98534	19,28057	17,53874	15,65546
32	53,48577	49,48044	46,19426	20,07191	18,29076	16,36222
33	54,77554	50,72508	47,39988	20,86653	19,04666	17,07351
34	56,06091	51,96600	48,60237	21,66428	19,80625	17,78915
35	57,34207	53,20335	49,80185	22,46502	20,56938	18,50893

### Продолжение таблицы В.1

36	58,61921	54,43729	50,99846	23,26861	21,33588	19,23268
37	59,89250	55,66797	52,19232	24,07494	22,10563	19,96023
38	61,16209	56,89552	53,38354	24,8839	22,87848	20,69144
39	62,42812	58,12006	54,57223	25,69539	23,65432	21,42616
40	63,69074	59,34171	55,75848	26,5093	24,43304	22,16426
41	64,95007	60,56057	56,94239	27,32555	25,21452	22,90561
42	66,20624	61,77676	58,12404	28,14405	25,99866	23,65009
43	67,45935	62,99036	59,30351	28,96472	26,78537	24,39760
44	68,70951	64,20146	60,48089	29,78748	27,57457	25,14803
45	69,95683	65,41016	61,65623	30,61226	28,36615	25,90127
46	71,20140	66,61653	62,82962	31,43900	29,16005	26,65724
47	72,44331	67,82065	64,00111	32,26762	29,95620	27,41585
48	73,68264	69,02259	65,17077	33,09808	30,75451	28,17701
49	74,91947	70,22241	66,33865	33,93031	31,55492	28,94065
50	76,15389	71,42020	67,50481	34,76425	32,35736	29,70668

Вообще такая точность (5 знаков после запятой) значений критических точек в статистике не требуется. Обычно достаточно бывает 1-2 знаков после запятой.

Учебное издание

**Азизян** Инара Артушовна

**Математическая статистика**

*Учебное пособие*

Подписано в печать \_\_\_\_\_ Тираж 5 экз.

Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета  
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53