

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емец Валерий Сергеевич
Должность: Директор филиала
Дата подписания: 30.06.2026 09:52:45
Уникальный идентификатор:
f2b8a1573c931f1098cfe699d1debd94fcff35d7

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский институт (филиал)
Федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

А.С. Сивиркина, Т.А. Асаева, Е.И. Миронова

**МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ПРОГРАММЕ СПО
ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
Часть 3**

Учебно-методическое пособие

Рязань
2023

УДК 51
ББК 22.11
С 34

Сивиркина, А.С.

С 34 Математика для обучающихся по программе СПО технических специальностей. Часть 3: учебно-методическое пособие / А.С. Сивиркина, Т.А. Асаева, Е.И. Миронова. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2023. – 36 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса среднего профессионального образования всех технических специальностей.

В пособии представлены теоретический материал с примерами разобранных задач, задачи для решения на практических занятиях, задачи для самостоятельного решения и для подготовки к контрольным работам, а также список вопросов для зачета.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

УДК 51
ББК 22.11

© Сивиркина А.С., Асаева Т.А.,
Миронова Е.И., 2023
© Рязанский институт (филиал)
Московского политехнического
университета, 2023

Содержание

Введение	4
1 Основные положения теории вероятности	5
1.1 Основные формулы комбинаторики	5
1.2 Предмет теории вероятностей	6
1.3 Виды случайных событий	7
1.4 Классическое определение вероятности	8
1.5 Основные теоремы теории вероятностей	10
1.5.1 Сумма и произведение событий	10
1.5.2 Противоположные события	13
1.5.3 Формула полной вероятности	14
1.5.4 Формулы Бейеса	15
1.6 Схема независимых испытаний	17
1.6.1 Формула Бернулли	17
1.6.2 Локальная теорема Лапласа	18
1.6.3 Формула Пуассона	19
1.6.4 Интегральная теорема Лапласа	20
2 Задания для решения на практических занятиях	22
2.1 Элементы комбинаторики	22
2.2 Случайное событие и его вероятность	23
2.3 Основные теоремы о вероятности	23
2.4 Схема Бернулли	26
3 Образцы контрольных работ	29
3.1 Контрольная работа № 1	29
3.2 Контрольная работа № 2	29
3.3 Контрольная работа № 3	30
4 Вопросы к зачету	31
Приложение А – Таблицы значений функций Лапласа	32
Библиографический список	35

Введение

Данное пособие содержит материал по теме «Основы теории вероятностей». Теория вероятностей, подобно другим разделам математики, зародилась и получила свое развитие из потребностей практики. Результаты теории вероятностей широко используются в естествознании, военном деле, экономике, в технических дисциплинах.

Целью данного пособия является систематизация теоретических сведений, отработка их на примерах и образцах решения задач, а также подбор материала для проведения практических задач и контрольных работ.

Учебно-методическое пособие включает:

- 1) подробный теоретический материал, который поможет студентам подготовиться к практическим занятиям;
- 2) задания для решения на практических занятиях и для самостоятельного решения;
- 3) варианты контрольных работ;
- 4) список вопросов для зачета.

Лекционный курс изложен в соответствии с рабочей программой, утвержденной на кафедре. Основное внимание уделено введению новых понятий и методам решения задач.

Практические занятия рекомендуется проводить в виде практикума по решению задач. Приведены варианты контрольной работы.

Учебное пособие будет полезно студентам при решении типового расчета, а также при подготовке к зачету и экзамену.

1 Основные положения теории вероятности

1.1 Основные формулы комбинаторики

Определение. Комбинаторика – область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из элементов заданного множества.

Некоторые формулы комбинаторики используются в теории вероятностей. Приведем наиболее употребительные из них.

Будем рассматривать комбинации без повторений.

Пусть дано n различных элементов.

Определение. Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся друг от друга только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок равно

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Замечание. По определению, полагают, $0! = 1$.

Пример. Сколькими способами можно рассадить 5 человек на одной скамейке?

Решение. Искомое число мест равно $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Определение. Размещениями из n элементов по m ($m < n$) называются их соединения, каждое из которых содержит ровно m различных элементов, и которые отличаются друг от друга только порядком их расположения.

Число всех возможных размещений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример. Сколько трехзначных чисел можно составить из семи различных цифр при отсутствии среди них нуля?

Решение. $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

Определение. Сочетаниями из n элементов по m ($m \leq n$) называются комбинации, составленные ровно из m элементов и отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов равно

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 45.$$

При решении задач комбинаторики используют следующие *правила*:

1) правило суммы: если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A , либо B можно $m + n$ способами;

2) правило произведения: если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

1.2 Предмет теории вероятностей

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие события.

Определение. Событие – это такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий (испытания) может произойти или не произойти.

Например, выпадение герба при бросании монеты (испытание – бросание монеты, событие – выпадение герба).

Определение. *Достоверным* относительно комплекса условий S называется событие, которое при реализации данного комплекса условий обязательно произойдет.

Пример. Если гладкий желоб с лежащим внутри него тяжелым шариком наклонить, то шарик *обязательно* покатится по желобу в сторону наклона.

Определение. *Невозможным* относительно комплекса условий S называется событие, которое при реализации данного комплекса условий заведомо (никогда) не произойдет.

Пример. При подбрасывании игральной кости выпадет 7 очков.

Определение. *Случайным* называется событие, которое при реализации комплекса условий может как произойти, так и не произойти.

Пример. Если уронить фарфоровую чашку на пол, то она может, как разбиться, так и остаться не поврежденной.

Теория вероятностей имеет дело со случайными событиями. Однако она не может предсказать, произойдет единичное событие или нет.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий, т.е. случайных событий, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий.

Методы теории вероятностей получили широкое распространение в различных областях естествознания и прикладных технических задачах.

1.3 Виды случайных событий

Определение. События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

В противном случае, события называются совместными.

Пример. Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали (событие A) исключает появление нестандартной (событие B). События A и B несовместные

Определение. События называются *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример. Появление герба и появление решки при бросании монеты.

Определение. Система событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется *полной группой событий для данного испытания*, если в результате испытания обязательно появится одно и только одно из них.

Пример. A_1 – попадание и A_2 – промах при одном выстреле образуют полную группу.

1.4 Классическое определение вероятности

Количественной мерой возможности появления событий является вероятность.

Определение. Каждый из возможных результатов испытания назовем элементарным событием или элементарным исходом.

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов данного испытания, образующих полную группу

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A , и n – общее число всех элементарных исходов при данном испытании.

Замечание. Из определения вероятности следует, что равновозможные элементарные события являются *равновероятными*, т. е. наступают с одной и той же вероятностью.

Из определения вероятности вытекают *основные свойства вероятности*:

- 1) Вероятность невозможного события равна нулю.
- 2) Вероятность достоверного события равна единице.
- 3) Вероятность любого события есть величина $0 \leq P(A) \leq 1$.

Пример. В корзине 5 синих и 9 красных шаров. Вынули один шар.

Какова вероятность, что это красный шар (событие A)?

Какова вероятность, что вынули синий шар (событие B)?

Какова вероятность, что вынули белый шар (событие C)?

Какова вероятность, что вынули цветной шар (событие D)?

Решение. $P(A)=9/14$, $P(B)=5/14$, $P(C)=0$, $P(D)=1$.

Пример. В ящике находятся 10 стандартных и 5 нестандартных деталей.

Какова вероятность, что среди наугад взятых 6 деталей будет 4 стандартных?

Решение. Испытание – извлекается 6 деталей. Событие A – среди шести извлеченных деталей: 4 – стандартные и 2 – нестандартные.

Так как детали вытягиваются наудачу, то все исходы испытания равно-возможны и несовместны. Число всех возможных исходов испытания

$$n = C_{15}^6 = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15!}{6!9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 5005.$$

Найдем число благоприятных исходов: 4 стандартные детали можно взять из 10 стандартных C_{10}^4 способами, причем остальные 2 – из 5 нестандартных C_5^2 способами. Следовательно

$$m = C_{10}^4 \cdot C_5^2 = \frac{10!}{4!6!} \cdot \frac{5!}{2!3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 2100.$$

Отсюда, искомая вероятность $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2100}{5005} \approx 0,4196$.

1.5 Основные теоремы теории вероятностей

1.5.1 Сумма и произведение событий

С каждым испытанием связан ряд интересующих нас событий, которые, вообще говоря, могут появляться одновременно. Например, пусть при бросании игральной кости событие A есть выпадение одного очка, а событие B есть выпадение нечетного числа очков. Очевидно, эти события не исключают друг друга.

Определение. Суммой двух событий A и B называется событие $A+B$, которое заключается в наступлении либо события A , либо события B , либо событий A и B одновременно.

Пример. Произведены два выстрела, события A и B – попадание при первом и втором выстрелах соответственно. Тогда $A + B$ – попадание либо при первом выстреле, либо при втором, либо в обоих случаях.

Замечание. Если события A и B несовместны, то их сумма – это событие, состоящее в наступлении какого-либо одного из этих событий.

Определение. Произведением двух событий A и B называется событие $A \cdot B$, означающее совместное появление этих событий.

Пример. Пусть для поступления в вуз необходимо сдать 2 экзамена.

Событие A – успешная сдача 1-го экзамена; событие B – успешная сдача 2-го экзамена. Тогда AB – поступление в вуз.

Замечание. Если события A и B несовместны в данном испытании, то их произведение есть событие невозможное, то есть $P(AB)=0$.

Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме необходимого комплекса условий, не налагается, то такая вероятность называется *безусловной*.

Если же вводятся дополнительные условия, содержащие случайные события, то вероятность называется *условной*.

Определение. Условной вероятностью $P_B(A)$ события A при условии B называется вероятность события A , найденная при условии, что событие B произошло.

Пример. В ящике лежат 11 деталей, 3 из них нестандартные. Из ящика дважды берут по одной детали, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что во второй раз из ящика будет извлечена стандартная деталь, если в первый раз была извлечена нестандартная деталь.

Решение. Событие A – в первый раз извлекли нестандартную деталь, событие B – во второй раз извлекли стандартную деталь.

После первого извлечения в ящике всего осталось 10 деталей, из них 8 стандартных, тогда искомая вероятность $P_A(B) = \frac{8}{10} = 0,8$.

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Пример. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 4 концентрические зоны. Вероятности попадания в эти зоны соответственно равны: 0,4; 0,3; 0,2; 0,1. Найти вероятность попадания либо в первую, либо во вторую зону.

Решение. Пусть событие A – попадание в первую зону мишени; событие B – попадание во вторую зону мишени. Тогда событие $A + B$ – попадание либо в первую, либо во вторую зону мишени. Так как события A и B несовместные, то искомая вероятность

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,4 + 0,3 = 0,7.$$

Определение. Два события A и B называются независимыми, если появление или неappearance одного из них не зависит от появления или неappearance другого, то есть

$$P(A) = P_B(A) = P_{\bar{B}}(A) \quad \text{и} \quad P(B) = P_A(B) = P_{\bar{A}}(B).$$

В противном случае события называются зависимыми.

Теорема. Вероятность суммы двух *совместных* событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

1. Если события A и B *независимы*, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

2. Если события A и B *зависимы*, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B).$$

Пример. Вероятности поражения цели первым и вторым стрелками равны соответственно 0,8 и 0,9. Найти вероятность поражения цели при залпе.

Решение. Событие A – поражение цели первым стрелком, событие B – поражение цели вторым стрелком. Так как события A и B независимые, то искомая вероятность

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0,8 + 0,9 - 0,72 = 0,98.$$

Теорема. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих *полную группу* равна 1:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Теорема. Вероятность произведения двух событий определяется формулой

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Пример. В ящике лежит 11 деталей, 3 из них нестандартных. Из ящика дважды берут по одной детали, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что в первый раз из ящика извлечена нестандартная деталь, а во второй раз – стандартная деталь.

Решение. Событие A – извлечение из ящика нестандартной детали, событие B – извлечение стандартной детали.

$$\text{Тогда } P(A) = \frac{3}{11}, \quad P_A(B) = \frac{8}{10}, \quad P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{10} \approx 0,22.$$

Замечание. Справедливо равенство

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Пример. Найти вероятность поражения цели тремя орудиями, если вероятности поражения цели орудиями соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,7 (события A, B, C).

Решение. Событие $A \cdot B \cdot C$ – поражение цели тремя орудиями. Поскольку события независимые, то искомая вероятность

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.$$

1.5.2 Противоположные события

Определение. Событие $\bar{A}$, происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие A называется противоположным событию A .

Пример. Если при бросании монеты событие A есть выпадение герба, то событие $\bar{A}$ представляет собой не выпадение герба, т.е. выпадение решки.

Теорема. Вероятность противоположного события находится по формуле

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Пример. На складе готовой продукции находятся изделия, среди которых 5% нестандартных. Найдите вероятность того, что при выдаче изделия со склада оно будет стандартным.

Решение. Событие A – выдача стандартного изделия, событие B – выдача нестандартного изделия. $P(B) = 0,05$ по условию.

Тогда вероятность события A , противоположного событию B , равна

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Теорема. Вероятность наступления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ вычисляется по формуле

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n,$$

где $q_i = 1 - p_i$ – вероятности соответствующих противоположных событий.

Пример. Найти вероятность поражения цели (хотя бы одного попадания) при залповой стрельбе орудий (событие A), если вероятности поражения цели орудиями соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,7.

Решение. Вероятности противоположных событий (промахов) соответственно равны $q_1 = 0,1$; $q_2 = 0,2$; $q_3 = 0,3$.

Тогда искомая вероятность

$$P(A) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,994.$$

1.5.3 Формула полной вероятности

Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ несовместны и образуют полную группу событий, т.е. выполняется равенство $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$. События $H_1, H_2, \dots, H_n$ принято называть гипотезами, т.к. заранее не известно, какое из них наступит.

Пусть событие A может наступить при условии появления одного и только одного из событий H_i , причем известны как вероятности $P(H_i)$, так и условные вероятности $P_{H_i}(A)$, $i = \overline{1..n}$. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

Пример. В двух урнах находятся белые и красные шары: в первой – 7 белых и 3 красных, во второй – 4 белых и 5 красных. Из первой урны наудачу взяли один шар и переложили его во вторую урну. Найти вероятность того, что наудачу взятый после этого из второй урны шар будет белым.

Решение. Пусть событие A – появление белого шара в результате опыта.

Сформулируем гипотезы:

H_1 – из первой урны переложили белый шар, $P(H_1) = \frac{7}{10}$,

H_2 – из первой урны переложили красный шар. $P(H_2) = \frac{3}{10}$.

Сделаем проверку правильности нахождения вероятности гипотез:

$$P(H_1) + P(H_2) = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1.$$

Найдем условные вероятности события A при этих гипотезах:

$$P_{H_1}(A) = \frac{5}{10}, \quad P_{H_2}(A) = \frac{4}{10}.$$

Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = 0,7 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,35 + 0,12 = 0,47.$$

1.5.4 Формулы Бейеса

Имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, вероятности которых $P(H_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) известны до опыта. Производится опыт (испытание), в результате которого зарегистрировано появление события A , причем известно, что этому событию наши гипотезы приписывали определенные вероятности $P_{H_i}(A)$.

Условные вероятности гипотез, но уже после опыта можно пересчитать по формуле

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} \quad \text{или} \quad P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}.$$

Эти формулы называются *формулами Бейеса*. Они позволяют переоценить вероятность гипотез H_i во всех испытаниях, после того, как уже наступило событие A .

Пример. Имеются три урны; в первой 3 белых шара и 1 чёрный, во второй – 2 белых шара и 3 чёрных, в третьей – три белых шара. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из неё один шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятности того, что этот шар вынут из первой урны.

Решение.

Сформулируем гипотезы: B_1 - выбрана первая урна; B_2 - выбрана вторая урна; B_3 - выбрана третья урна.

Так как урна выбирается наугад, то вероятности гипотез будут равны

$$P(B_1) = P(B_1) = P(B_1) = \frac{1}{3}.$$

В результате опыта произошло событие A – из выбранной наугад урны вынут белый шар.

Тогда условные вероятности события A относительно каждой из гипотез

$$P_{B_1}(A) = \frac{3}{4}; \quad P_{B_2}(A) = \frac{2}{5}; \quad P_{B_3}(A) = 1.$$

Применяя формулу Байеса, находим вероятность гипотезы, что шар вынут из первой после наступления события A

$$\begin{aligned} P_A(B_1) &= \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)} = \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{15}{43}. \end{aligned}$$

1.6 Схема независимых испытаний

1.6.1 Формула Бернулли

Определение. *Схемой Бернулли* называется серия повторных независимых испытаний, в каждом из которых данное событие A имеет одну и ту же вероятность $P(A) = p$, не зависящую от номера испытания.

Таким образом, в схеме Бернулли для каждого испытания имеется только два исхода: событие A («успех») и событие $\bar{A}$ («неудача»), с постоянными вероятностями $P(A) = p$ и $P(\bar{A}) = q$, причем, очевидно, $p + q = 1$.

В теории вероятностей особый интерес представляет случай, когда в n испытаниях событие A наступает m раз и не наступает $(n - m)$ раз.

Вероятность этого события определяется *формулой Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m q^{n-m} \quad \text{или} \quad P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Пример. Вероятность покупки бракованного комплекта деталей равна 0,1. Найти вероятность того, что из 7 купленных комплектов 5 будут без брака.

Решение. Эксперимент состоит в том, что последовательно проверяется 7 комплектов, т.е. проводится 7 повторных независимых испытаний.

Каждое испытание имеет два исхода: комплект бракованный и комплект не бракованный.

Вероятность покупки комплекта с браком постоянна и равна $q = 0,1$. Значит вероятность покупки комплекта без брака $p = 1 - q = 0,9$.

Тогда искомая вероятность находится по формуле Бернулли

$$P_7(5) = \frac{7!}{5!2!} 0,9^5 \cdot 0,1^2 = 0,12.$$

1.6.2 Локальная теорема Лапласа

Использование формулы Бернулли при больших значениях n и m представляется затруднительным ввиду громоздких вычислений.

Теорема (локальная теорема Лапласа). Если вероятность $P(A) = p$ ($0 < p < 1$) наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что событие A наступит ровно m раз при достаточно большом числе испытаний n ($n > 10$) находится по приближенной формуле Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

$$\text{где } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Формула носит название *асимптотической*, т.к. с возрастанием n погрешность вычисления по этой формуле стремится к нулю.

Функция $\varphi(x)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\varphi(x)$ определена и непрерывна для всех $x \in R$.
- 2) $\varphi(x)$ – четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
- 3) при $|x| > 3,99$ $\varphi(x) \approx 0$.

Замечание: Таблица значений функции $\varphi(x)$ приведена в таблице А.1.

Пример. Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,9. Определите вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий 530 будут первого сорта.

Решение. Эксперимент заключается в проведении 600 повторных независимых испытаний с двумя исходами в каждом. Вероятность появления изделия первого сорта в каждом испытании постоянна. Следовательно, схема Бернулли применима. По условию задачи $n=600$, $m=530$, $p=0,9$, $q=1-0,9=0,1$.

Так как n достаточно велико, то для вычисления искомой вероятности воспользуемся локальной теоремой Лапласа.

Вычислим $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{530 - 600 \cdot 0,9}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,36$.

Т.к. $\varphi(x)$ - четная, то $\varphi(-1,36) = \varphi(1,36)$.

По таблице значений $\varphi(x)$ из приложения 1 находим $\varphi(1,36) = 0,1582$.

Вычисляем искомую вероятность по формуле $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$.

Получим, что $P_{600}(530) \approx \frac{1}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \cdot \varphi(-1,36) \approx 7,54 \cdot 0,1582 = 0,021$.

1.6.3 Формула Пуассона

Приближенная формула Лапласа при больших n ($n > 10$) тем точнее, чем ближе к 0,5 вероятность наступления события A в каждом испытании. Если же эта вероятность близка к 0 или 1, то для получения хорошей точности результатов с помощью формулы Лапласа необходимо достаточно большое число испытаний n . На практике в сериях независимых испытаний встречаются задачи о вероятностях редких явлений, когда вероятность мала ($p < 0,1$). Французский математик Пуассон нашел более точную формулу, по которой можно найти вероятность $P_n(m)$ с небольшой погрешностью.

Теорема (Пуассона). Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и мала, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что при n независимых испытаниях событие A наступит m раз находится по формуле

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \text{где } \lambda = np - \text{const}.$$

Данная формула называется *формулой Пуассона* или *законом редких событий*.

Пример. С базы в магазин отправлено 4000 тщательно упакованных доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0,0005. Найдите вероятность того, что в магазин придут 3 испорченные изделия.

Решение. Испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли.

По условию задачи $n=4000, m=3, p=0,0005$.

Так как n достаточно велико, а p сравнительно мало, то применима формула Пуассона. Вычислим $\lambda = np = 4000 \cdot 0,0005 = 2$.

$$P_{4000}(3) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} = \frac{8}{6e^2} \approx 0,804.$$

1.6.4 Интегральная теорема Лапласа

Предположим, что в каждом из проведенных n независимых испытаний событие A наступает с одинаковой вероятностью $P(A)=p$.

Теорема (интегральная теорема Лапласа). Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна ($0 < p < 1$), то, вероятность того, что событие A наступит от m_1 до m_2 раз при достаточно большом числе испытаний можно приближенно вычислить по формуле

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{где } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ называется функцией Лапласа или стандартным интегралом вероятностей.

Рассмотрим свойства этой функции:

- 1) $\Phi(x)$ – нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
- 2) $\Phi(0) = 0$, $\Phi(+\infty) = 0,5$ (при $x > 5$ $\Phi(x) = 0,5$).

Замечание. Соответствующая таблица значений функции Лапласа приведена в таблице А.2 приложения А.

Пример. Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,9. Определите вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий от 520 до 535 изделия (включительно) будут первого сорта.

Решение. По условию задачи $n = 600$, $m_1 = 520$, $m_2 = 535$, $p = 0,9$.

$$\text{Вычислим } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{520 - 600 \cdot 0,9}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -2,72;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{535 - 600 \cdot 0,9}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -0,68.$$

По таблице значений функции Лапласа находим, что

$$\Phi(x_1) = \Phi(-2,72) = -0,4967; \quad \Phi(x_2) = \Phi(-0,68) = -0,2517.$$

Окончательно получим

$$P_{600}(520, 535) = -0,2517 - (-0,4967) = 0,2450.$$

2 Задания для решения на практических занятиях

2.1 Элементы комбинаторики

1. Сколько существует различных автомобильных номеров в городе Рязани и Рязанской области?
2. Сколькими способами 8 автомобилей смогут встать в очередь на шиномонтаж?
3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,4,6,7,8, если каждую цифру можно использовать в каждом числе один раз??
4. Сколькими способами из 5 книг можно выбрать несколько, но не менее одной?
5. Сколькими способами из 7 марок автомобилей можно выбрать 3 и расставить их для выставки?
6. Вычислите C_9^3 , C_9^6 , C_m^3 , C_n^1 , C_5^5 .
7. Найти n из уравнений: $C_n^2 = 45$, $A_n^4 = 60 \cdot C_{n-1}^3$, $C_n^8 = C_n^{12}$.
8. Сколькими способами из 9 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 5 человек?
9. Сколько различных слов можно образовать из всех букв слова «автомобиль»?
10. Сколько существует различных девятизначных телефонных номеров?
11. Из города A в город B ведут 5 дорог, а из города B в город C – 3 дороги. Сколько путей, проходящих через B , ведут из A в C ?
12. В автомашине 7 мест. Сколькими способами 7 человек могут сесть в эту машину, если правами водителя обладают только 3 из них?
13. В гонке участвуют 10 машин. Сколькими способами могут распределиться первые 3 места?
14. В автомастерскую требуется 4 механика. По поводу работы обратилось 10 претендентов. Сколькими способами можно выбрать нужных 4 рабочих?

15. На окружности выбрано 10 точек. Сколько можно провести хорд с концами в этих точках. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках.

16. Код в секретном замке набирается с помощью 6 цифр. Сколько потребуется времени для перебора всех кодов, если один код устанавливается в среднем за 5 секунд?

2.2 Случайное событие и его вероятность

17. В ящике 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из ящика черный шар?

18. В ящике 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

19. Брошены 2 игральные кубика. Постройте пространство элементарных событий. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5.

20. Брошены 2 игральные кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков больше 5, а произведение меньше 10.

21. Брошены 3 игральные кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 4.

22. Монета подброшена два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет герб?

23. В лотерее 1000 билетов. Из них 500 – выигрышные и 500 – невыигрышные. Куплено 2 билета. Какова вероятность того, что оба билета выигрышные?

24. В ящике 9 белых и 1 черный шар. Вынули сразу 3 шара. Какова вероятность того, что все шары белые?

2.3 Основные теоремы о вероятности

25. В автосалоне 5 белых, 8 черных, 3 синих и 2 красных авто. Была куплена одна машина. Найти вероятность того, что купили машину: 1) белую,

2) черную, 3) синюю, 4) красную, 5) белую или черную, 6) синюю или красную; 7) белую, черную или синюю?

26. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из первого ящика вынули один шар и переложили его во второй ящик. Затем из второго ящика также вынули один шар. Какова вероятность того, что второй шар белый?

27. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика последовательно вынули 2 шара (не возвращая первый вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

28. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

29. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

30. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет 3 девочки и 2 мальчика. Вероятности рождения мальчик и девочки предполагаются одинаковыми.

31. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

32. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

33. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

34. Стрелку для поражения мишени предложено 5 винтовок, причем 3 из них – с оптическим прицелом. Вероятность поражения мишени из винтовки с оптическим прицелом – 0,9; из обычной – 0,55. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелку для одного выстрела предложена наугад взятая винтовка.

35. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; а вторым – 0,75. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что один из них попадет в цель, а другой не попадет?

36. Производят 3 выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,5. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов произойдет только одно попадание.

37. В магазин поступают однотипные детали с трех заводов, причем первый завод поставляет 20% деталей, второй – 40%, третий – 40%. Среди деталей первого завода 90% первосортных, второго – 70%, третьего – 80%. Куплена одна деталь. Она оказалась первосортной. Определите вероятность того, что купленная деталь выпущена вторым заводом.

38. В автосалон города поступают автомобили с трех стран: Китай, Япония и Германия, причем Китай поставляет 40% всех машин салона, второй – 40%, третий – 20%. Среди автомобилей из Китая 60% с механической коробкой передач, из Японии – 70%, из Германии – 80%. Куплен один автомобиль. Он оказался с механической коробкой передач. Определите вероятность того, что купленный автомобиль выпущен в Германии.

39. В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел из наудачу взятой винтовки.

40. Двигатель работает в трёх режимах: нормальном, форсированном и на холостом ходу. В режиме холостого хода вероятность его выхода из строя равна 0,05, при нормальном режиме работы – 0,1, а при форсированном – 0,7.

70% времени двигатель работает в нормальном режиме, а 20% – в форсированном. Какова вероятность выхода из строя двигателя во время работы?

41. На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно из первой партии.

42. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся.

43. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

2.4 Схема Бернулли

44. Производят 3 выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,5. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов произойдёт только одно попадание.

45. Вероятность того, что магнитола имеет скрытые дефекты, равна 0,2. На склад поступило 10 магнитол. Какое событие вероятнее: что в этой партии имеется две магнитолы со скрытыми дефектами или три?

46. Статистика аудиторских проверок компании утверждает, что вероятность обнаружения ошибки в каждом проверяемом документе равна 0,1. Какова вероятность, что из десяти проверяемых документов девять из них не будут содержать ошибки?

47. По данным технического контроля 2% замененных колёс нуждаются в дополнительной регулировке. Найти вероятность того, что из 6 таких колёс 4 нуждаются в дополнительной регулировке.

48. В автосалоне 6 покупателей. Каждый может купить машину с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что не более двух человек совершат покупку.

49. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник марки «Атлант», равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется всем четырем покупателям.

50. На конвейер за смену поступает 300 деталей. Вероятность того, что поступившая на конвейер деталь стандартна, равна 0,75. Найти вероятность того, что стандартных деталей на конвейер за смену поступило ровно 240.

51. Страховая компания заключила 40000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2%. Найти вероятность, что таких случаев будет не более 870.

52. В жилом доме имеется 6400 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет между 31200 и 3200.

53. В институте обучается 1000 студентов. В столовой имеется 105 посадочных мест. Каждый студент отправляется в столовую на большой перемене с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что в обычный учебный день посадочных мест на всех не хватит.

54. Вычислительное устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа каждого элемента за смену равна 0,024. Найти вероятность, что за смену откажут 6 элементов.

55. При автоматической прессовке карболитовых болванок $\frac{2}{3}$ общего числа из них не имеют зазубрин. Найти вероятность того, что из 450 взятых наудачу болванок количество болванок без зазубрин заключено между 280 и 320.

56. Вероятность выхода из строя за время t одного конденсатора равна 0,2. Найдите вероятность того, что за время t из 100 независимо работающих конденсаторов выйдут из строя от 14 до 26 конденсаторов.

57. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,012. Поступило 1000 вызовов. Определите вероятность 9 «сбоев».

58. Из 100 аккумуляторов за год хранения 7 выходит из строя. Наудачу выбирают 5 аккумуляторов. Определить вероятность того, что среди них 3 исправных.

59. Пусть вероятность того, что автомашина потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 машин не более одной потребует ремонта.

60. С базы в магазин отправлено 4000 тщательно упакованных доброкачественных ручек коробки передач. Вероятность того, что изделие повредится в пути равна 0.0005. Найти вероятность того, что из 4000 изделий в магазин придут 3 испорченных изделия.

61. Автомат по продаже воды не срабатывает в среднем в одном случае из тысячи. Какова вероятность того, что он не сработает в трех случаях из ста.

62. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

63. На базе получено 10000 фар. Вероятность того, что в пути фара разобьется, равна 0,0003. Найдите вероятность того, что среди полученных фар будет пять разбитых.

64. Из 100 изделий, среди которых имеется 3 нестандартных, выбраны случайным образом 9 изделий для проверки их качества. Определить вероятность того, что среди выбранных 9 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие, используя классическое определение вероятностей, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

3 Образцы контрольных работ

3.1 Контрольная работа № 1

Вариант № 1

Задача №1. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Вынимают три шара. Какова вероятность вынуть один белый и два черных шара?

Задача №2. В урне 7 белых и 8 черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают его в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны достают еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

Задача №3. Сколько хорд можно провести через 6 точек окружности?

Вариант № 2

Задача №1. В урне 7 белых и 4 черных шаров. Вынимают два шара. Какова вероятность вынуть разноцветные шары?

Задача №2. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одинаковое число очков.

Задача №3. Сколькими способами можно вынуть пять игровых карт из колоды?

3.2 Контрольная работа № 2

Вариант № 1

Задача №1. В первой урне находится 12 белых и 8 черных шаров, во второй урне находится 3 белых и 5 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили 2 шара, а затем из второй урны вынули один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Задача №2. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,2. Найти вероятность того, что при 6 выстрелах мишень будет поражена не менее 1 и не более 3 раз.

Вариант № 2

Задача №1. В первой урне находится 17 белых и 3 черных шара, во второй урне находится 4 белых и 4 черных шара. Из первой урны во вторую переложили 2 шара, а затем из второй урны вынули один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Задача №2. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,3. Найти вероятность того, что при 2100 выстрелах мишень будет поражена не менее 600 и не более 660 раз.

3.3 Контрольная работа № 3

Вариант № 1

Задача №1. В автосалоне 8 покупателей. Каждый может купить машину с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что три человека купят машину.

Задача №2. С базы в магазин отправлено 4000 тщательно упакованных доброкачественных ручек коробки передач. Вероятность того, что изделие повредится в пути равна 0.0002. Найти вероятность того, что в магазин придут 5 испорченных изделия.

Вариант № 2

Задача №1. В автосалоне 5 покупателей. Каждый может купить машину с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что только один человек купит машину.

Задача №2. На базе получено 10000 фар. Вероятность того, что в пути фара разобьется, равна 0,0001. Найдите вероятность того, что среди полученных фар будет пять разбито.

4 Вопросы к зачету

1. Формулы комбинаторики.
2. Виды случайных событий.
3. Классическое определение вероятности.
4. Сумма событий. Произведение событий и условная вероятность.
5. Теорема сложения.
6. Теорема умножения вероятностей. Независимые события.
7. Полная группа событий. Противоположные события.
8. Формула полной вероятности.
9. Формулы Бейеса.
10. Формула Бернулли.
11. Локальная теорема Лапласа.
12. Формула Пуассона.
13. Интегральная теорема Лапласа.
14. Решение задач по схеме Бернулли.

Приложение А

Таблицы значений функций Лапласа

Таблица А.1 – Значения функции $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1491	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Продолжение таблицы А.1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0026
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица А.2 – Значения функции $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

Продолжение таблицы А.2

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997

Библиографический список

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2006. – 575 с.
2. Вентцель, Е.С., Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. втузов, / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2003. – 448с.
3. Васильев, А.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / А. А. Васильев. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2023. – 224 с.
4. Григорьев, В.П. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 3-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2019. – 368 с.
- 5 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова – М.: «Мир и образование», 2016.

Учебное издание

Сивиркина Анна Сергеевна
Асаева Татьяна Александровна
Миронова Елена Ивановна

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ПРОГРАММЕ СПО
ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
Часть 3

Учебно-методическое пособие

Рязанский институт (филиал) Московского политехнического
университета
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53.