

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емец Валерий Сергеевич
Должность: Директор филиала
Дата подписания: 25.06.2025 16:31:20
Уникальный программный ключ:
f2b8a1573c931f1098cfe699d1debd945ff75d7

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Рязанский институт (филиал)
Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Московский государственный открытый университет»**

В. А. Долгоруков, Г. С. Нечипорук

**СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ
СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ
В ПРИМЕРАХ**

**Методические указания для
студентов строительных специальностей**

Рязань

2010

ББК 38.112
УДК 624.04
Р 24

В. А. Долгоруков, Г. С. Нечипорук.

Статически определимые стержневые системы в примерах. Методические указания для студентов строительных специальностей. Рязанский институт (филиал) Государственного образовательного учреждения «Московский государственный открытый университет», 2010

В методических указаниях даны необходимые сведения о методах расчета статически определимых стержневых систем (многопролетных балок, ферм, арок и рам) на неподвижную и подвижную нагрузки и приведены примеры по определению внутренних усилий и перемещений. Даны схемы и исходные данные для выполнения расчетно-графических работ.

Печатается по решению методического совета вуза

© Рязанский институт (филиал) МГОУ, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Статически определимые многопролетные балки.....	4
1.1. Общая теория линий влияния.....	4
1.2. Расчет статически определимых многопролетных балок на неподвижную и подвижную нагрузки.....	13
2. Статически определимые фермы.....	25
2.1. Расчет простейших ферм на неподвижную нагрузку.....	26
2.2. Расчет ферм на подвижную нагрузку.....	32
3. Статически определимые арки.....	36
3.1 Аналитический расчет трехшарнирной арки.....	37
3.2 Расчет арок на подвижную нагрузку.....	47
4. Расчет на прочность и жесткость ломаных стержней.....	57
4.1 Построение эпюр внутренних усилий в раме.....	57
4.2 Определение перемещений в стержневых системах методом Мора.....	61
5. Список рекомендуемой литературы.....	73
Приложения	74
Задание к расчетно-графической работе № 1 (многопролетная балка).....	75
Задание к расчетно-графической работе № 2 (статически определимая ферма).....	77
Задание к расчетно-графической работе № 3 (трехшарнирная арка, рама).....	81
Задание к контрольной работе (статически определимая рама).....	85

1 Статически определимые многопролетные балки

1.1 Общая теории линий влияния

1.1.1 Понятие о линиях влияния

При расчете мостов, кранов и других инженерных сооружений часто приходится иметь дело с подвижной нагрузкой различного вида. Обычно подвижная нагрузка состоит из системы параллельных друг другу (чаще вертикальных) грузов, между которыми сохраняется неизменное положение. Примерами такой нагрузки являются поезд, перемещающийся по железнодорожному мосту, кран, движущийся по подкрановой балке, и др.

Усилия в том или ином элементе сооружения (а также его деформации) зависят от положения подвижной нагрузки. Для определения расчетных величин усилий необходимо из всех возможных положений нагрузки выбрать такое, при котором рассчитываемый элемент будет находиться в наиболее неблагоприятных условиях. Такое положение нагрузки называется *невыгоднейшим*, или *опасным*.

Указанные выше задачи позволяют решать *линии влияния* (л. в.). Линия влияния это график, выражающий изменение той или иной величины (опорной реакции, внутреннего усилия, перемещения в заданном сечении и т. п.) от положения движущегося по сооружению единичного груза постоянного направления.

На рис. 1. 1 для примера показана линия влияния прогиба в сечении «с» при перемещении силы $P = 1$ по сооружению.

Линию влияния необходимо отличать от эпюры. Это противоположные друг другу понятия. Действительно, ординаты

эпюры характеризуют распределение изучаемого фактора (например изгибающего момента) по различным сечениям балки при неподвижной нагрузке; орди-

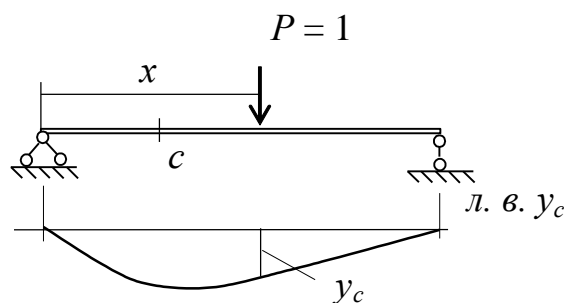


Рис. 1. 1

наты линии влияния, наоборот, характеризуют изменение фактора (например того же момента), возникающего в одном определенном сечении при перемещающейся по длине балки силы $P = 1$.

Зная линию влияния какой-либо искомой величины нетрудно определить ее значение при действии системы сосредоточенных грузов, распределенной нагрузки или сосредоточенного момента.

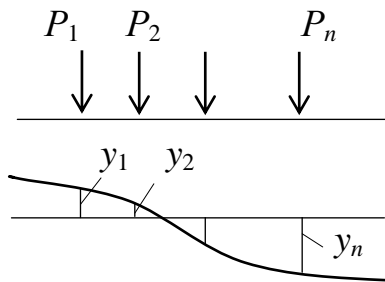


Рис. 1.2

а) *Влияние системы сосредоточенных грузов* (рис. 1. 2). Пусть имеем систему сосредоточенных грузов P_1, P_2, \dots, P_n . Требуется определить влияние этой нагрузки на величину Z , для которой известна линия влияния. Влияние каждой из сил выражается произведением $P_i \cdot y_i$. Пользуясь принципом независимости действия сил можем записать

$$Z = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \dots + P_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^n P_i y_i.$$

б) *Влияние сосредоточенного момента M* (рис. 1. 3). Любой момент можно заменить парой сил, расположенных на плече h . Тогда его влияние можно оценить по следующей формуле

$$Z = M(y_{\text{лев}} - y_{\text{пр}}) / h, \text{ или } Z = M \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

где φ – угол наклона касательной к линии влияния Z в точке приложения M .

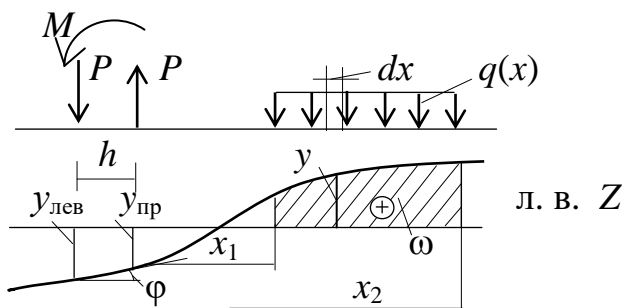


Рис. 1.3

в) *Влияние распределенной нагрузки* (рис. 1. 3). Элементарная сила $q \cdot dx$ будет вызывать элементарное усилие $dZ = q \cdot dx \cdot y$. Тогда полное усилие Z определится как

$$Z = \int_{x_1}^{x_2} q \cdot y dx.$$

В случае равномерной нагрузки при $q = \text{const}$

$$Z = q \int_{x_1}^{x_2} y dx = q \omega,$$

где ω – площадь линии влияния Z под распределенной нагрузкой q .

1.1.2 Построение линий влияния в простой балке

Построение линий влияния опорных реакций.

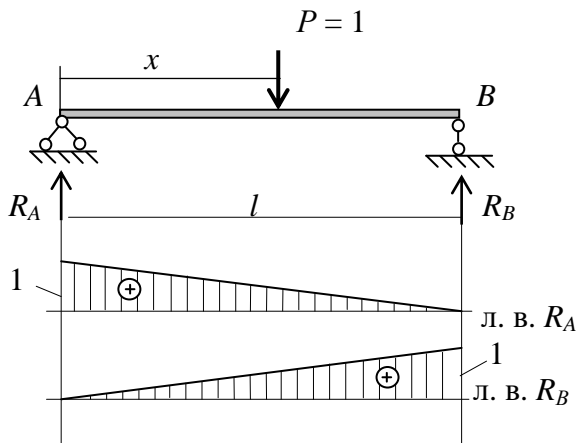


Рис. 1.4

Для построения линии влияния какого-либо параметра необходимо получить формулу (выражение) этого параметра.

Запишем выражение для реакции R_A

$$\sum M_B = 0. \quad R_A l - P(l - x) = 0.$$

$$R_A = P \frac{l - x}{l}, \text{ или}$$

$$\text{л. в. } R_A = \frac{l - x}{l}. \quad (1.1)$$

при $x = 0$ $R_A = 1$, при $x = l$ $R_A = 0$.

Линия влияния реакции R_A показана на рис. 1.4.

Для построения л.в. R_B запишем выражение этой реакции.

$$\sum M_A = 0. \quad R_B l - P \cdot x = 0. \quad R_B = P \frac{x}{l}, \text{ или}$$

$$\text{л. в. } R_B = \frac{x}{l}. \quad (1.2)$$

При $x = 0$ $R_B = 0$, при $x = l$ $R_B = 1$. Линия влияния реакции R_B показана на рис. 1.4.

Построение линий влияния внутренних усилий.

Построение линий влияния Q_c .

Пусть единичная сила находится справа от сечения «C» (рис. 1.5). Тогда, рассматривая левую от сечения часть балки, можем записать $Q_c = R_A$, или

$$\text{л. в. } Q_c = \text{л. в. } R_A, \quad (1.3)$$

получили уравнение правой ветви л. в. Q_c , то есть, когда $P = 1$ перемещается по балке на отрезке $C - B$ линия влияния поперечной силы повторяет линию влияния реакции R_A .

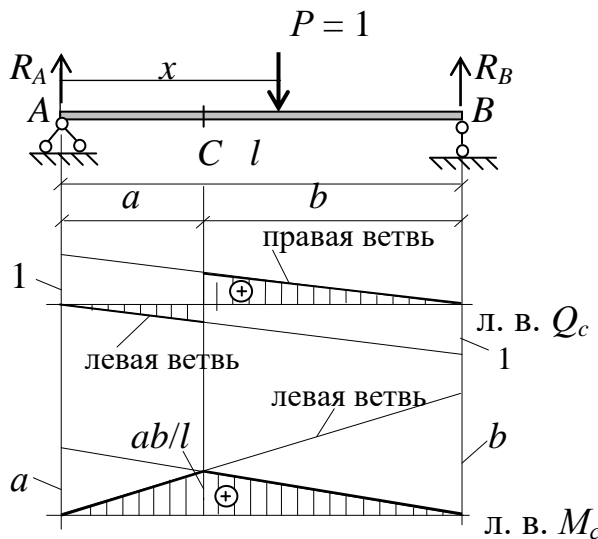


Рис. 1.5

Теперь $P = 1$ перемещается слева от сечения «C». Рассмотрим правую часть балки.

$$Q_c = - R_B, \text{ или}$$

$$\text{л. в. } Q_c = (-1) \text{ л. в. } R_B. \quad (1.4)$$

Получили уравнение левой ветви. В соответствии с полученными уравнениями (1.3) и (1.4) строим линию влияния Q_c (рис. 1.5).

Для построения линии влияния изгибающего момента в сечении

«C» используем ту же методику, что и при построении л. в. Q_c .

Пусть $P = 1$ перемещается справа от сечения «C». Рассмотрим левую часть балки. Изгибающий момент в сечении «C» будет

$$M_c = R_A \cdot a, \text{ или}$$

$$\text{л. в. } M_c = (\text{л. в. } R_A) \cdot a, \quad (1.5)$$

Таким образом, правая ветвь линии влияния повторяет линию влияния R_A , с множителем «a» (рис. 1.5).

Теперь $P = 1$ перемещается слева от сечения «C». Рассмотрим правую часть балки, тогда

$$M_c = R_B \cdot b, \text{ или}$$

$$\text{л. в. } M_c = (\text{л. в. } R_B) \cdot b, \quad (1.6)$$

при $x = 0$ $R_B = 0$, $M_c = 0$, при $x = a$ $M_c = (\text{л. в. } R_B) \cdot b = (x/l) \cdot b = a \cdot b/l$.

Линия влияния M_c приведена на рис. 1.5.

Отметим, что при построении линий влияния положительные ординаты откладывают выше оси ординат. Линии влияния реакций и поперечных сил безразмерны, поскольку величина единичной силы безразмерна, линии влияния моментов имеют размерность «метр».

Линии влияния для консольной балки

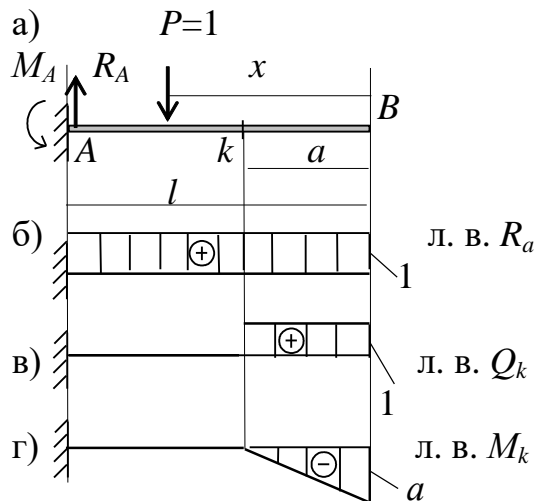


Рис. 1. 6

Линия влияния реакции R_A

Из уравнения равновесия $\sum y = 0$, получим $R_A = P = 1$, т. е.

л. в. $R_B = 1$ (см. рис. 1.6 (б)).

Линия влияния поперечной силы в сечении «k» Q_k .

Единичная сила $P = 1$ находится справа от сечения «k». Рассмотрим правую часть балки.

$$Q_k = P = 1.$$

Далее, $P = 1$ слева от сечения «k». Рассмотрим опять правую ненагруженную часть балки.

$$Q_k = 0.$$

Линия влияния изгибающего момента в сечении «k» M_k .

Пусть $P = 1$ справа от сечения «k». Рассмотрим правую часть балки.

$$M_k = P \cdot x.$$

При $x = 0$, $M_k = 0$, при $x = a$, $M_k = 1 \cdot a = a$.

Теперь $P = 1$ слева от сечения «k». Рассмотрим опять правую ненагруженную часть балки.

$$M_k = 0.$$

Линии влияния Q_k и M_k приведены на рис. 1. 6 (в, г).

Пример 1.1. Построить линии влияния реакций и Q_k и M_k в шарнирно опертой балке с консолями (рис. 1.7.).

Решение. Если выбрать начало координат на левой опоре в точке A , то полученные выше выражения для линий влияния в простой балке справедливы и в данном случае. При этом, координата x будет меняться от $-c$ до $l + d$.

Дополнительно необходимо построить линии влияния поперечной силы для двух соседних сечений – одно слева от опоры A , другое справа от той же опоры.

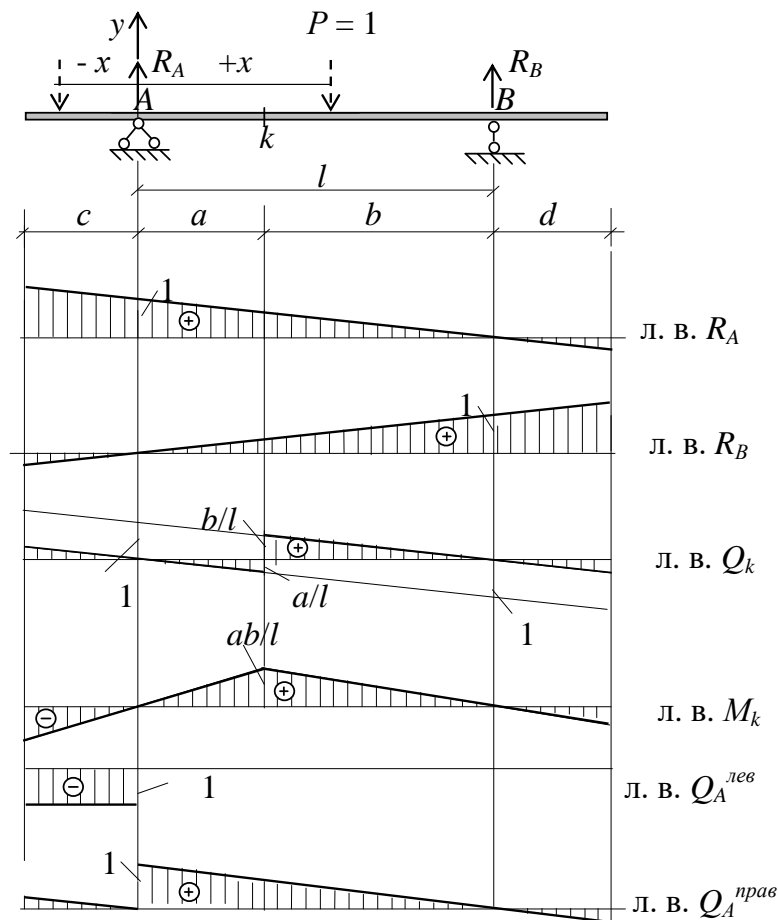


Рис. 1. 7

1.1.3 Построение линий влияния при узловой передаче нагрузки.

Часто нагрузка передается на конструкцию не непосредственно, а через систему статически определимых балок (настилов) (рис. 1.8). Когда единичный груз находится в начале (т. m) или в конце балки (т. n) то он полностью передается на основную конструкцию и вызывает усилия или y_m , или y_n .

При движении единичной силы внутри вспомогательной балки ее действие на конструкцию осуществляется через опорные реакции R_m и R_n . Общее влияние в этом случае можно записать как:

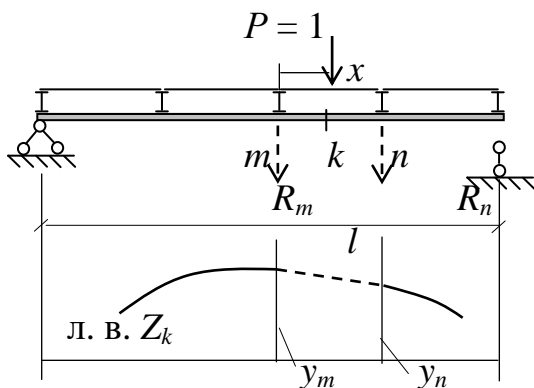


Рис. 1. 8

$$Z_k = R_m \cdot y_m + R_n \cdot y_n.$$

В свою очередь сами реакции равны (они определяются как в обычной балке)

$$R_m = \frac{d-x}{d}, \quad R_n = \frac{x}{d}. \quad \text{Тогда}$$

$$Z_k = \frac{d-x}{d} y_m + \frac{x}{d} y_n = \frac{1}{d} [(d-x) y_m + x \cdot y_n] -$$

получили уравнение прямой. При $x = 0$

$Z_k = y_m$, при $x = d$ $Z_k = y_n$. Прямая, соеди-

няющая ординаты y_m и y_n называется *передаточная прямая*.

В качестве примера на рис. 1.9 показаны линии влияния при узловой передаче нагрузки в пролетном строении моста.

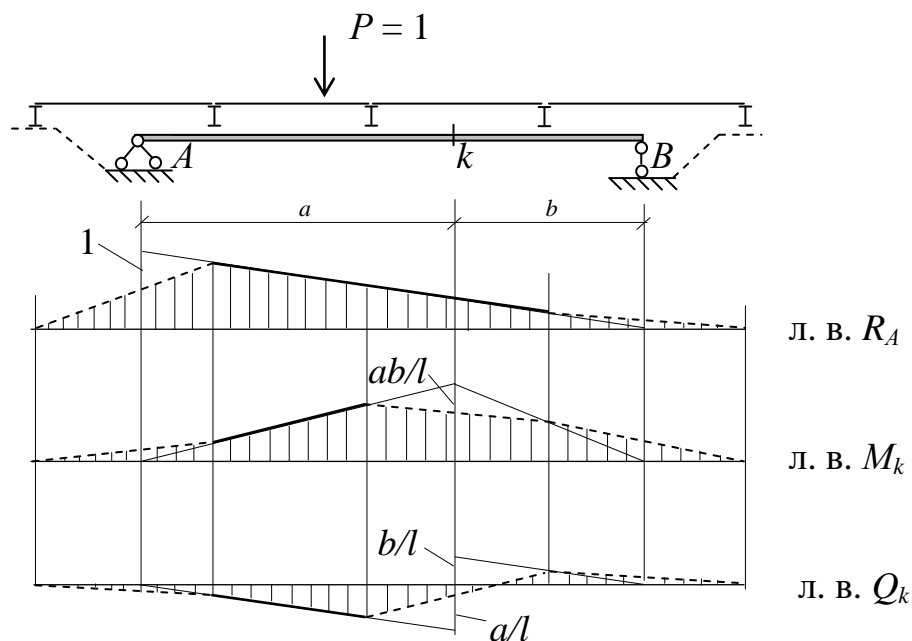


Рис. 1. 9

1.1.4 Кинематический метод построения линий влияния

При расчете многопролетных балок аналитический метод построения линий влияния достаточно громоздок. В таких случаях наиболее удобен *кинематический метод*, основанный на принципе возможных перемещений - *если система находится в состоянии равновесия, то сумма возможных работ всех внешних и внутренних сил на всяком возможном бесконечно малом изменении перемещений равна нулю*.

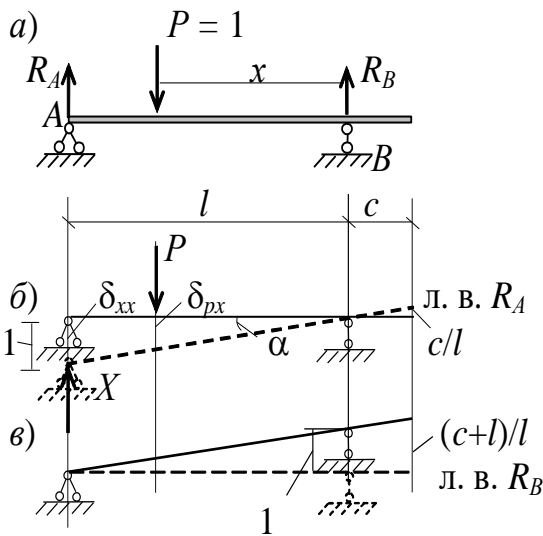


Рис. 1.10

На основании этого принципа можно записать (рис. 1.10, б)

$$-X \cdot \delta_{xx} + 1 \cdot \delta_{px} = 0, \quad X = \delta_{px} / \delta_{xx}.$$

δ_{xx} – постоянная величина,

δ_{px} – переменная, зависит от x ,

следовательно

$$\text{л. в. } X = (\text{л. в. } \delta_{px}) / \delta_{xx}.$$

$$\delta_{px} = x \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad \delta_{xx} = l \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{тогда}$$

$$X = \frac{x}{l}, \quad \text{т. е. линия влияния левой ре-$$

акции R_A повторяет эпюру перемеще-

ний балки при смещении левой опоры на единицу.

Аналогично получаем линию влияния R_B (рис. 1.10, в) путем вертикального смещения опоры B на единицу.

При построении линий влияния Q и M необходимо убрать связи, воспринимающие соответственно поперечную силу и изгибающий момент. Известно, что для соединения в неподвижную систему двух дисков (стержней) достаточно трех связей (рис. 1.11). Если убрать 2-ю связь, то данное сечение не будет воспринимать поперечную силу, а вертикальные кромки (торцы)

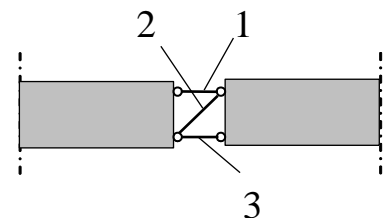


Рис. 1.11

левого и правого стержней будут смещаться параллельно друг другу.

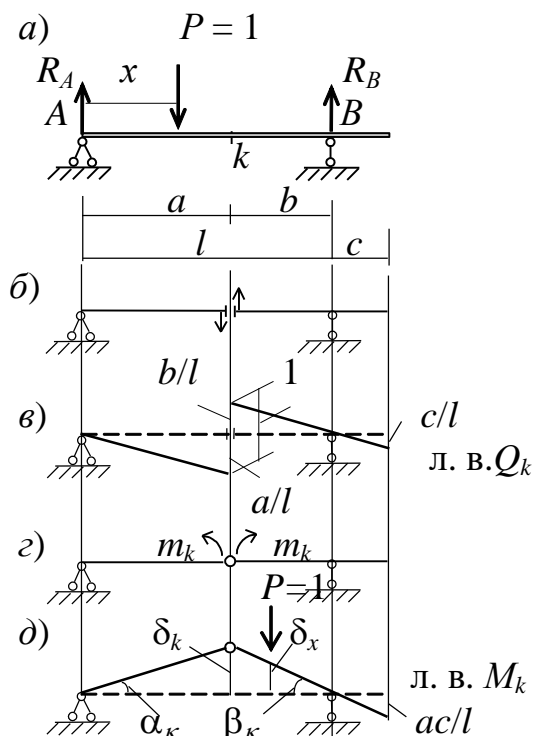


Рис. 1.12

Для построения линии влияния поперечной силы в сечении k Q_k двухопорной балки (рис. 1.12) убираем 2-ю связь и даем торцам взаимное вертикальное смещение на единицу, приложив в районе торцов малые положительные поперечные силы (рис. 1.12, б). Отметим, что если при взаимном смещении торцы стержней параллельны, то параллельны друг другу левый и правый стержни целиком. На рис. 1.12, в показан вид линии влияния Q_k .

Если убрать в рассматриваемом сечении (рис. 1.11) 1-ю или 3-ю связь, то жесткое соединение превратится в шарнирное, поскольку в этом случае торцы могут свободно поворачиваться относительно друг друга. Такое сечение не воспринимает изгибающий момент. Врезав в сечении k шарнир (рис. 1.12, г) и задав единичное угловое смещение, приложив малые положительные моменты, можем записать работу сил на возможных перемещениях

$$-P_x \delta_x + m_k(\alpha + \beta) = 0,$$

Так как α и β малы, можем записать:

$$\alpha = \tan \alpha = \frac{\delta_k}{a}, \quad \beta = \tan \beta = \frac{\delta_k}{b}.$$

$$m_k = \frac{\delta_x}{\alpha + \beta} = \frac{\delta_x ab}{\delta_k (a + b)}.$$

При $x = b$ $\delta_x = \delta_k$, $m_k = ab/l$.

Таким образом, эпюры возможных

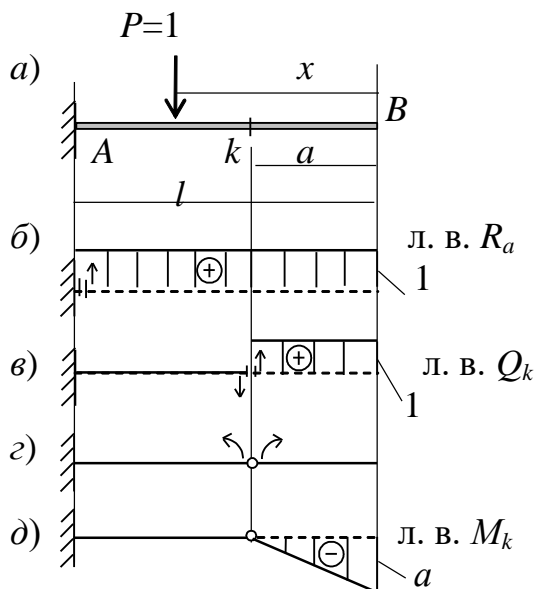


Рис. 1.13

перемещений, дают вид линии влияния M_k (рис. 1.12, д).

Для консольной балки линии влияния, полученные кинематическим способом, имеют вид, показанный на рис 1.13.

1.2 Расчет статически определимых многопролетных балок на неподвижную и подвижную нагрузки

Многопролетные статически определимые балки представляют собой протяженные балочные конструкции, перекрывающие несколько пролетов и состоящие из простых балок, соединенных между собой шарнирами (рис. 1.14).

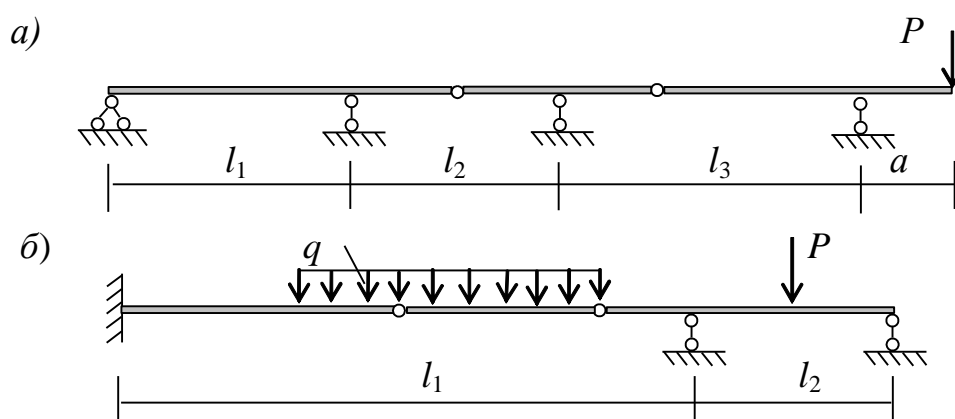


Рис. 1.14

Особенность расчета подобных стержневых конструкций заключается в расчленении многопролетной балки в шарнирных соединениях на отдельные простые балки, расчет которых осуществляется по методам сопротивления материалов.

В этом случае составляется **поэтажная схема балки**, в которой определяются основная (несущая) и вспомогательные балки, опирающиеся на несущую балку, имеющую три связи с землей.

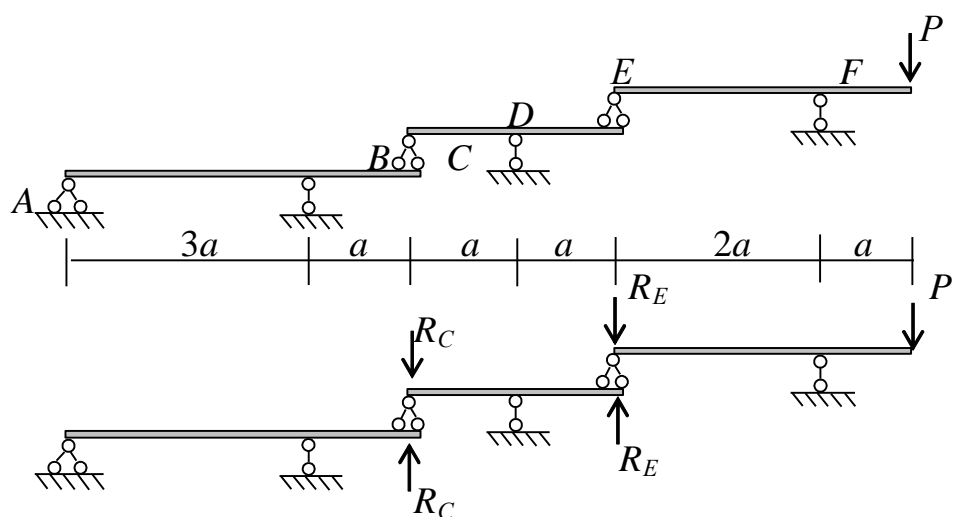


Рис. 1.15

На рис. 1.15, *a* показана поэтажная схема многопролетной балки, приведенной на рис. 1.14, *a*. Несущей балкой здесь является балка *AC*, которая остается неподвижной при удалении других вспомогательных балок *CE* и *EF*.

Статический расчет (расчет на неподвижную нагрузку) начинается с верхней балки. Следующая вспомогательная балка рассматривается под воздействием своей внешней нагрузки и реакции в опорном шарнире и т. д.

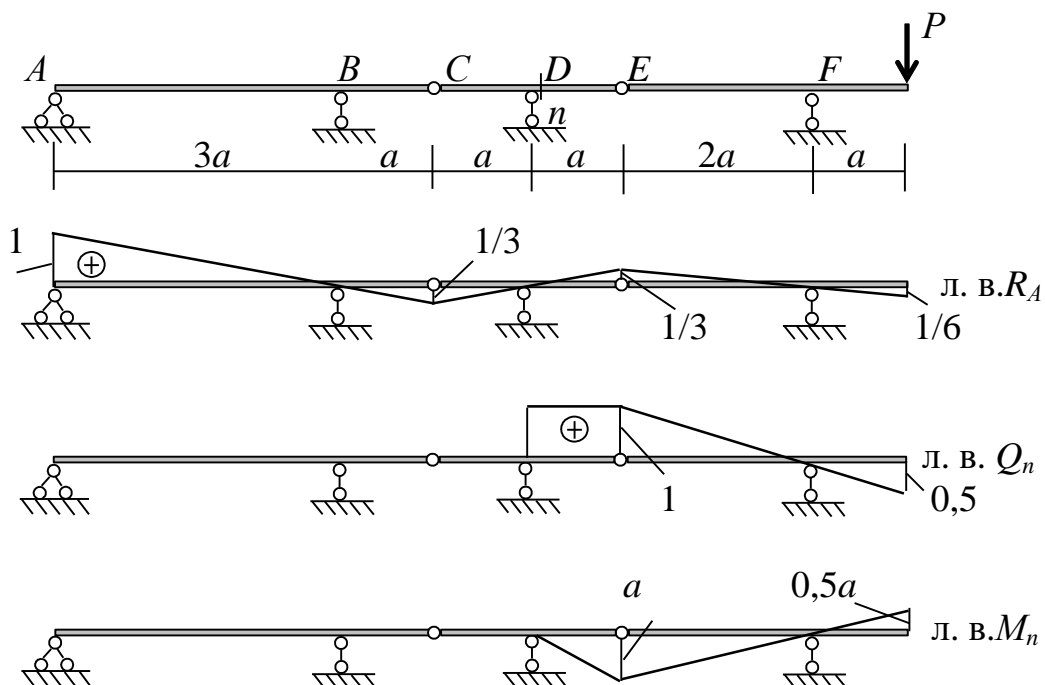


Рис. 1.16

Верхняя балка EF нагружена активной силой P , следующая балка CE нагружена только реакцией R_e , возникающей в шарнире E . Аналогично, балка AC будет нагружена только реакцией R_c .

При расчете на подвижную нагрузку наиболее удобным способом построения линий влияния в многопролетных балках является кинематический способ. В качестве иллюстрации на рис. 1.16 приведены линии влияния реакции R_A , поперечных сил и моментов в сечении « n » справа от опоры D .

Пример 1. 2. Для заданной статически определимой многопролетной балки (рис. 1.17, a) необходимо, используя поэтажную схему балки, построить эпюры внутренних усилий. Построить линии влияния реакций R_A и R_B , линии влияния M и Q в сечениях n (слева от опоры B) и в сечении m . Вычислить по ним внутренние усилия и сравнить со значениями, полученными при построении эпюр.

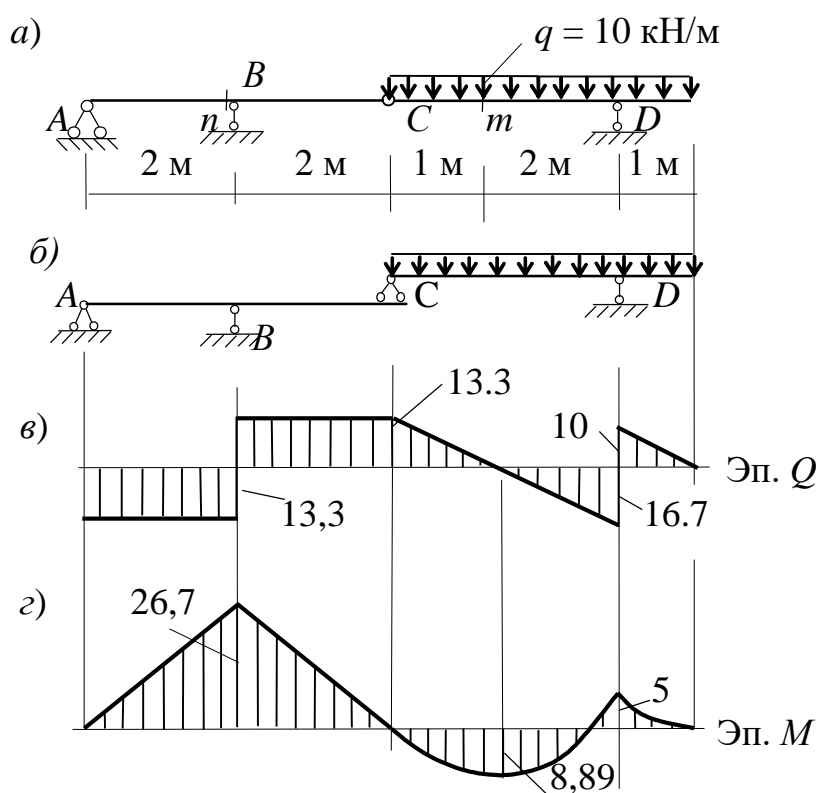


Рис. 1.17

Решение. 1. Для построения поэтажной схемы многопролетной балки проводим анализ заданной стержневой системы., которая состоит из двух простых балок AC и CD . Балка AC , имеющая три связи с землей, является основной (несущей), а балки CD – вспомогательная. В соответствии с этим и строим поэтажную схему (рис. 1.17, б).

2. Для статического расчета – построения эпюр внутренних усилий – рассмотрим каждую балку. Начинаем расчет с верхней вспомогательной балки CD (рис. 1.18). Определяем опорные реакции.

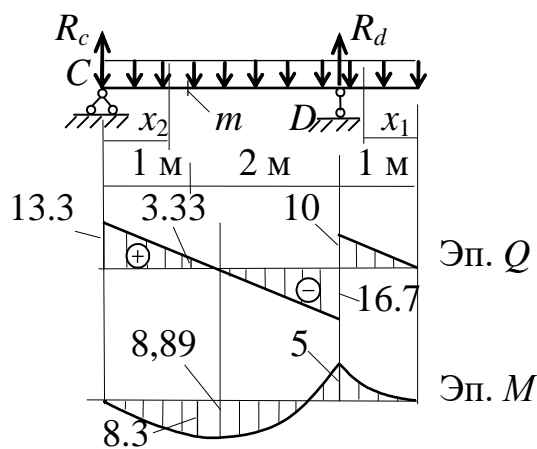


Рис. 1.18.

$$\Sigma m_D = 0, \quad -q \cdot 4 \cdot 1 - R_C \cdot 3 = 0,$$

$$R_C = 40/3 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_C = 0, \quad -R_D \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0.$$

$$R_D = 80/3 \text{ кН.}$$

$$\text{Проверка: } \Sigma y = 0.$$

$$R_D - q \cdot 4 + R_C = 80/3 - 40 + 40/3 = 0.$$

Вычисляем по участкам внутренние усилия.

$$\underline{1}\text{-й участок. } 0 < x_1 < 1 \text{ м.}$$

$$Q_1 = q \cdot x_1 \quad Q_{x=0} = 0, \quad Q_{x=1} = 10 \text{ кН.}$$

$$M_1 = -q \cdot x_1^2 / 2, \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=1} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м,}$$

$$M_{x=0.5} = 1.25 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

2-й участок. $0 < x_2 < 3 \text{ м.}$

$$Q_2 = R_C - q \cdot x_2, \quad Q_{x=0} = 13.3 \text{ кН, } Q_{x=3} = -16.7 \text{ кН, } Q_m = Q_{x=1} = 3.33 \text{ кН;}$$

$$M_2 = R_C \cdot x_2 - q \cdot x_2^2 / 2, \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=3} = -5 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

На участке CD поперечная сила Q меняет знак. $Q_2 = R_C - q \cdot x_0 = 0$,

$$x_0 = R_C / q = 1.33 \text{ м и}$$

$$M_{x=1.33} = 13.3 \cdot 1.33 - 10 \cdot 1.33 \cdot 0.67 = 8.89 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$M_m = M_{x=1} = 13.3 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 0.5 = 8.3 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

По полученным значениям строим эпюры M и Q для балки DE (рис. 1.18).

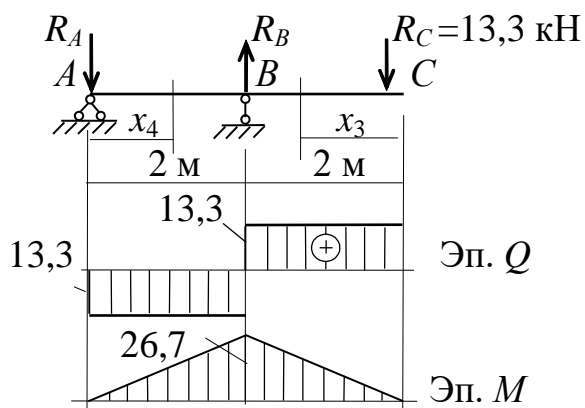


Рис. 1.19.

Рассмотрим теперь балку AC (рис. 1.19), которая находится под воздействием реакции со стороны балки CD R_C . Реакция R_C должна быть направлена в сторону, обратную направлению этой же реакции, приложенной к балке CD , поскольку при совмещении балок в шарнире C эти реакции должны быть взаимно уравновешены. Проводим

статический расчет балки AC .

Определяем опорные реакции.

$$\Sigma m_A = 0. \quad R_B \cdot 2 - R_C \cdot 4 = 0.$$

$$R_B = 80/3 = 26.7 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_B = 0. \quad -R_C \cdot 2 + R_A \cdot 2 = 0.$$

$$R_A = 13.3 \text{ кН.}$$

Проверка реакций. $\Sigma y = 0$.

$$-R_A + R_B - R_C = -13.3 + 26.7 - 13.3 = 0.$$

Вычисляем по участкам внутренние усилия.

3-й участок. $0 < x_3 < 2 \text{ м.}$

$$Q_3 = R_C \quad 13.3 \text{ кН.}$$

$$M_3 = -R_C x_3. \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=2} = -26.7 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

4-й участок. $0 < x_4 < 2 \text{ м.}$

$$Q_4 = -R_A = -13.3 \text{ кН.}$$

$$M_4 = -R_A x_4, \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=2} = -26.7 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

По полученным значениям строим эпюры Q и M в простой балке (рис. 1.19).

Совместим все построенные эпюры внутренних усилий вдоль многопролетной балки в едином масштабе (рис. 1.17, в, г) и проведем окончательную проверку на соответствие их заданной нагрузке.

3. Строим линии влияния двух реакций R_A и R_C и поперечной силы и изгибающего момента для сечений m и n . Построение линий влияния будем проводить кинематическим способом (рис. 1.20).

Так, при построении линии влияния реакции R_A убираем связь, препятствующую вертикальному смещению опоры, и даем единичное смещение этой опоры по направлению R_A . Это единичное перемещение приведет к повороту консольной балки AC вокруг опоры B . Шарнир C опустится вниз и повернет балку CD вокруг опоры D . Полученная в результате схема перемещений и даст вид линии влияния этой реакции. Аналогично получена линия влияния R_C путем вертикального смещения опоры C вверх на единицу.

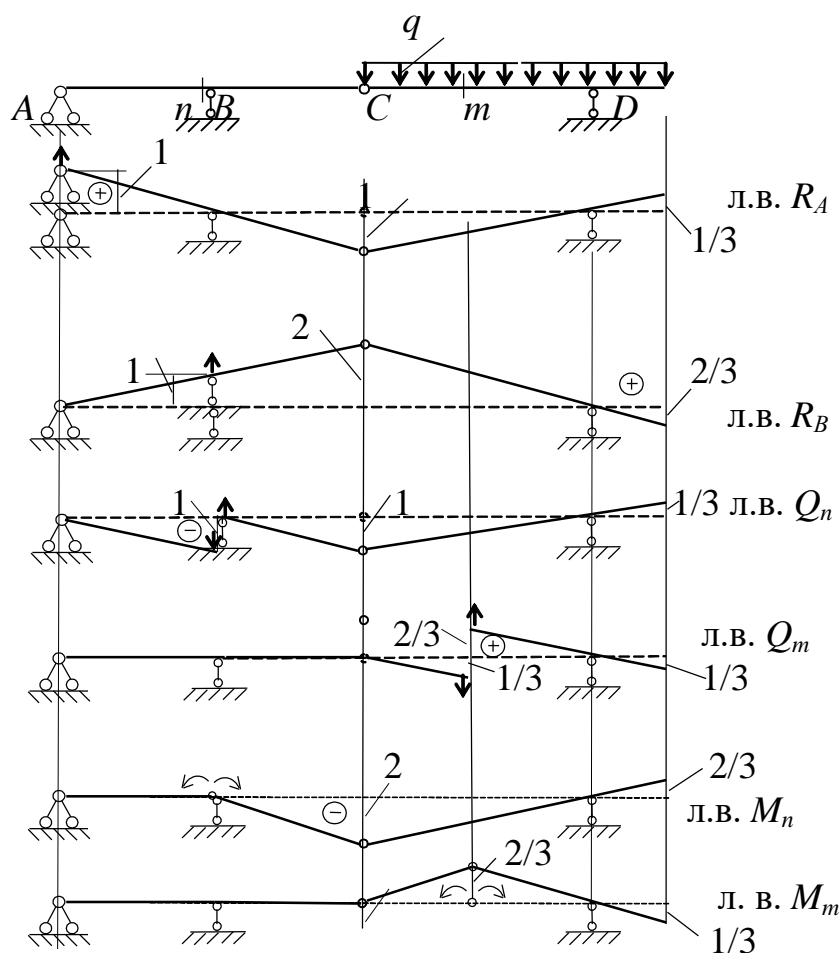


Рис. 1.20

При построении линий влияния Q и M необходимо убрать связи, воспринимающие поперечную силу и изгибающий момент. То есть, для построения линии влияния Q в сечении n нам необходимо в этом сечении дать торцам взаим-

ное вертикальное смещение на единицу. Отметим, что если торцы стержней параллельны, то параллельны друг другу левый и правый стержни целиком. Аналогично поступаем и с сечением m при построении линии влияния Q_m .

Врезав поочередно в сечениях n и m шарниры и задав единичное угловое смещение получаем эпюры возможных перемещений, дающих вид линий влияния M_m и M_n (рис. 1.20).

4. Подсчитаем значения внутренних усилий в заданных сечениях по линиям влияния. Для этого нам необходимо интенсивность распределенной нагрузки q умножить на площадь, очерченную линией влияния под нагрузкой. При перемножении используем следующие правила знаков: нагрузки, направленные вниз и ординаты линий влияния и площади, расположенные выше осевой линии – положительные.

$$Q_m = q \cdot (-0,5 \cdot 1 \cdot 1/3 + 0,5 \cdot 2 \cdot 2/3) = 10 \cdot (-1/6 + 2/3) = 3.33 \text{ кН},$$

$$M_n = q \cdot (-0,5 \cdot 2 \cdot 3 + 0,5 \cdot 1 \cdot 2/3) = 10 \cdot (-3 + 1/3) = -26.7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$Q_n = q \cdot (-0,5 \cdot 1 \cdot 3 + 0,5 \cdot 1 \cdot 1/3) = 10 \cdot (-3/2 + 1/6) = -13.3 \text{ кН},$$

$$M_m = q \cdot (0,5 \cdot 2/3 \cdot 3 - 0,5 \cdot 1 \cdot 1/3) = 10 \cdot (1 - 1/6) = 8.3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Значения внутренних усилий, полученные по линиям влияния, совпадают со значениями расчета на постоянную нагрузку.

Пример 1.3. Для заданной статически определимой многопролетной балки (рис. 1.21, *a*) необходимо, используя поэтажную схему балки, построить эпюры внутренних усилий. Построить линии влияния двух опорных реакций и линии влияния M и Q в сечениях m и n . Вычислить по ним внутренние усилия и сравнить со значениями, полученными при построении эпюр. В расчетах принять $d = 1,5 \text{ м}$, $P = 45 \text{ кН}$, $q = 6 \text{ кН/м}$.

Решение. 1. Для построения поэтажной схемы многопролетной балки проводим анализ заданной стержневой системы, которая состоит из трех простых балок AB , BD и DE . При этом видно, что консольная балка AB , имеющая три связи с землей, является основной (несущей), а балки BD и DE – вспомога-

ными. В соответствии с этим и строим поэтажную схему, представив балку AB как опорную (рис. 1.8, б).

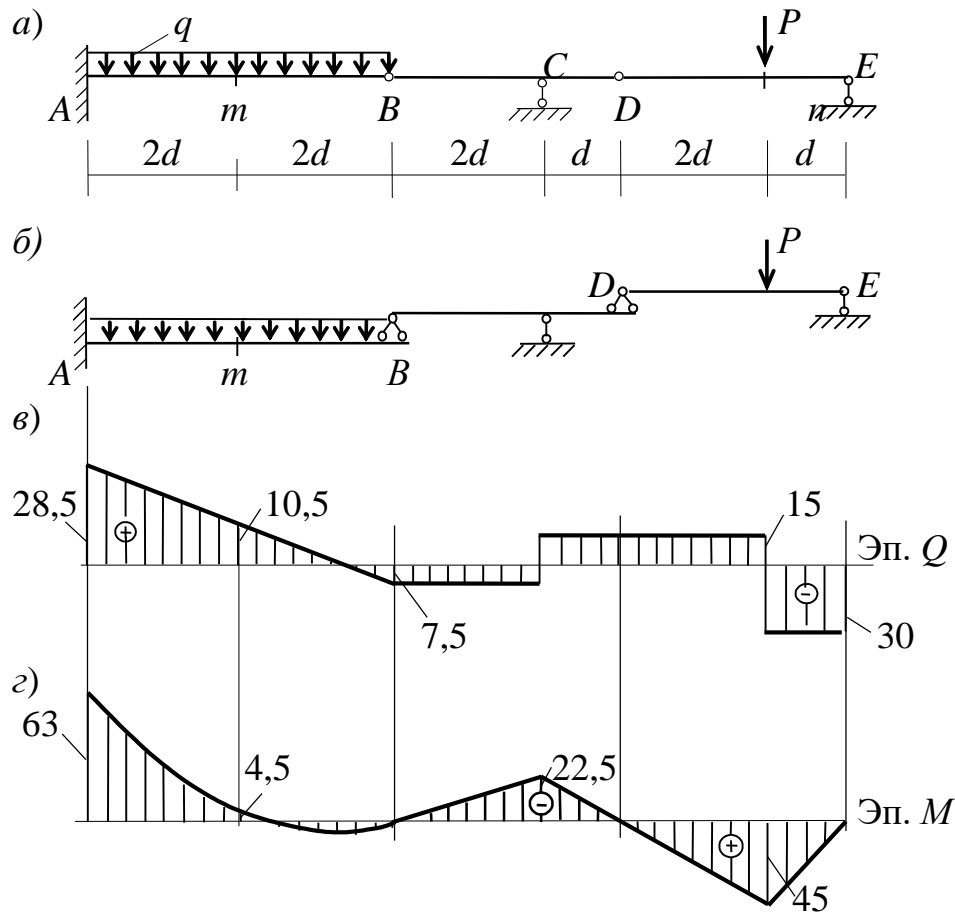
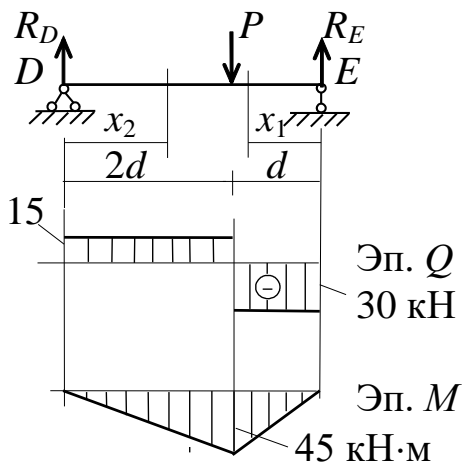


Рис. 1.21

2. Для статического расчета – построения эпюр внутренних усилий – рассмотрим каждую балку отдельно. Начинаем расчет с верхней вспомогательной балки DE (рис. 1.22). Определяем опорные реакции.



$$\Sigma m_D = 0, \quad -P \cdot 2d + R_E \cdot 3d = 0, \quad R_E = 30 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_E = 0, \quad -R_D \cdot 3d + P \cdot d = 0, \quad R_D = 15 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\Sigma y = 0. \quad R_D - P + R_E = 15 - 45 + 30 = 0.$$

Вычисляем по участкам внутренние усилия.

1-й участок. $0 < x_1 < 1,5 \text{ м.}$

$$Q_1 = -R_E, \quad Q_{x=0} = Q_{x=1,5} = -30 \text{ кН.}$$

$$M_1 = R_E x_1, \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=1,5} = 45 \text{ кН·м.}$$

Рис. 1.22

2-й участок. $0 < x_2 < 3$ м.

$$Q_2 = R_D, \quad Q_{x=0} = Q_{x=3} = 15 \text{ кН};$$

$$M_2 = R_D x_2, \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=3} = 45 \text{ кН·м}.$$

По полученным значениям строим эпюры M и Q для балки DE (рис. 1.22).

Рассмотрим теперь балку BD (рис. 1.23), которая находится под воздействием реакции со стороны балки DE R_D . Реакция R_D должна быть направлена в сторону, обратную направлению этой же реакции, приложенной к балке DE , поскольку при совмещении балок в шарнире D эти реакции должны быть взаимно уравновешены. Проводим статический расчет балки BD .

$$\Sigma m_B = 0. \quad R_C \cdot 2d - R_D \cdot 3d = 0.$$

$$R_C = 22,5 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m_C = 0. \quad -R_B \cdot 2d - R_D \cdot d = 0.$$

$$R_B = -7,5 \text{ кН}.$$

Знак минус у реакции R_B означает, что она направлена в обратную сторону. Направим ее вниз, зачеркнув первоначально выбранное направление и в дальнейших расчетах значение реакции R_B будем принимать положительным.

Проверка реакций. $\Sigma y = 0$.

$$-R_B + R_C - R_D = -7,5 + 22,5 - 15 = 0.$$

Вычисляем по участкам внутренние усилия.

3-й участок. $0 < x_3 < 1,5$ м.

$$Q_3 = R_D, \quad Q_{x=0} = Q_{x=1,5} = 15 \text{ кН}.$$

$$M_3 = -R_D x_3. \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=3} = -22,5 \text{ кН·м}.$$

4-й участок. $0 < x_4 < 3$ м.

$$Q_4 = -R_B, \quad Q_{x=0} = Q_{x=3} = -21,5 \text{ кН}.$$

$$M_4 = -R_B x_4, \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=3} = -22,5 \text{ кН·м}.$$

По полученным значениям строим эпюры Q и M во второй простой балке (рис. 1.23).

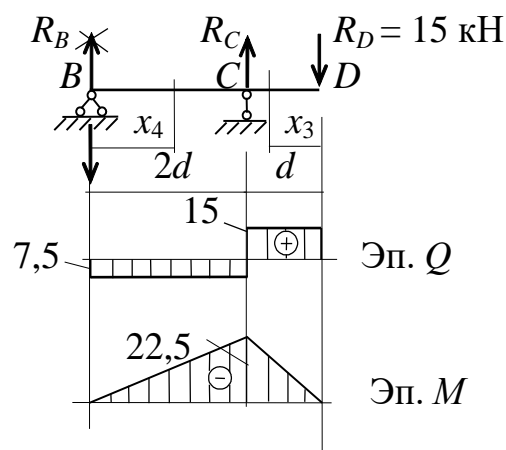


Рис. 1.23

Консольная балка AB нагружена распределенной нагрузкой и реакцией R_B со стороны балки BD , направленной вверх (рис. 1.24). В данном случае при вычислении внутренних усилий можно обойтись без определения реакций, рассматривая правую часть балки.

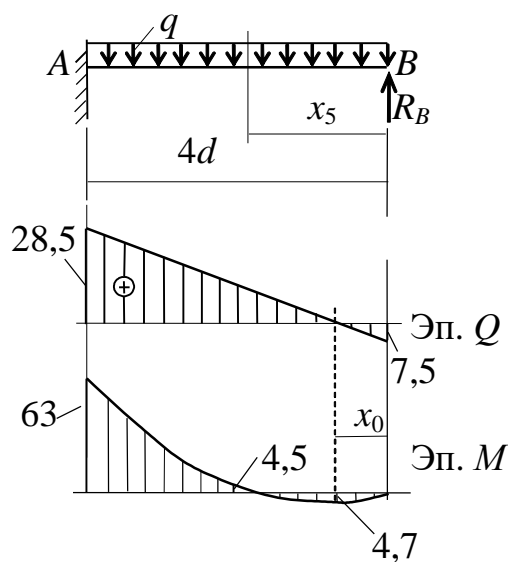


Рис. 1.24

5-й участок. $0 < x_5 < 6$ м.

$$Q_5 = q \cdot x_5 - R_B,$$

$$Q_{x=0} = -7,5 \text{ кН}, \quad Q_{x=6} = 28,5 \text{ кН},$$

$$M_5 = R_B \cdot x_5 - q \cdot x^2/2,$$

$$M_{x=0}=0, \quad M_{x=3}=-4,5 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{x=6}=-63 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Поскольку Q на 5-м участке меняет знак, найдем координату x_0 , при которой:

$$Q_5 = q \cdot x_0 - R_B = 0,$$

$$\text{тогда } x_0 = 7,5/6 = 1,25 \text{ м.}$$

$$M_{x=1,25} = 4,7 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры M и Q для основной балки показаны на рис. 1.24.

Совместим все построенные эпюры внутренних усилий вдоль многопролетной балки в едином масштабе (рис. 1.21, в, г) и проведем окончательную проверку на соответствие их заданной нагрузке.

3. Строим линии влияния двух реакций R_A и R_C и поперечной силы и изгибающего момента для сечений m и n (рис. 1.25). Построение линий влияния будем проводить кинематическим способом.

Так, при построении линии влияния реакции вертикальной R_A убираем связь, препятствующую вертикальному смещению опоры, и даем единичное смещение этой опоры по направлению R_A . Поскольку опора A – заделка, которая при воздействии малой поперечной силы не перемещается, то единичное перемещение приведет к перемещению консольной балки AB параллельно самой себе. Полученная в результате схема перемещений и дает вид линии влия-

ния этой реакции R_A . Аналогично получена линия влияния R_C путем вертикального смещения опоры C на единицу (рис. 1.25, в).

При построении линий влияния Q и M необходимо убрать связи, воспринимающие поперечную силу и изгибающий момент. То есть для построения линии влияния Q в сечении m нам необходимо в этом сечении дать торцам взаимное вертикальное смещение на единицу (рис. 1.25, г). Отметим, что если торцы стержней параллельны, то параллельны друг другу левый и правый стержни целиком. Аналогично поступаем и с сечением n при построении линии влияния Q_n (рис. 1.25, е)

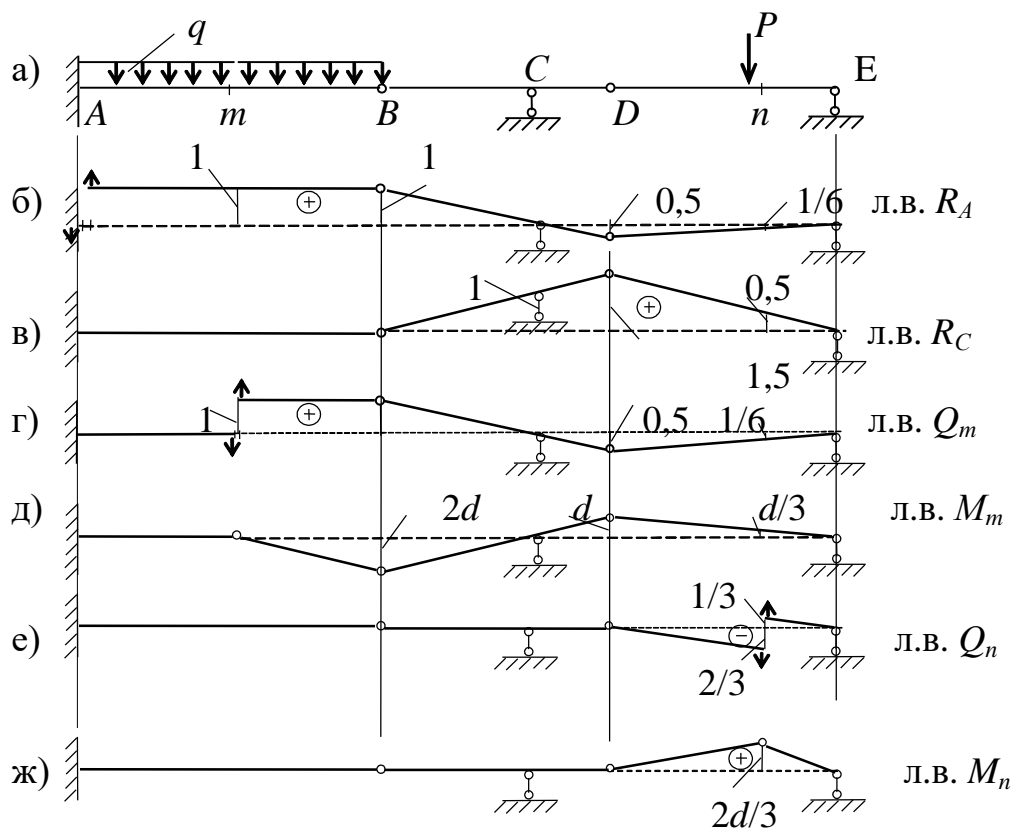


Рис. 1.25

Врезав поочередно в сечениях m и n шарниры и задав единичное угловое смещение получаем эпюры возможных перемещений, дающих вид линий влияния M_m и M_n (рис. 1.25, д, ж).

4□. Подсчитаем значения внутренних усилий в заданных сечениях по линиям влияния. Для этого нам необходимо силу P умножить на ординаты соответствующих линий влияния, а интенсивность распределенной нагрузки q на пло-

щадь, очерченную линией влияния под нагрузкой q . При перемножении используем следующие правила знаков: нагрузки, направленные вниз, ординаты линий влияния и площади, расположенные выше осевой линии – положительны.

$$Q_m = -P \cdot 0,167 + q \cdot 12d = -7,5 + 18 = 10,5 \text{ кН},$$

$$M_m = P \cdot d/3 - q(0,5 \cdot 2d \cdot 2d) = 22,5 - 27 = -4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$Q_n = -P \cdot 2/3 = -30 \text{ кН}$ (Сила P находится слева от сечения n , поэтому умножили ее на левую ординату л.в. Q_n).

$$M_n = P \cdot 2d/3 = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Значения внутренних усилий, полученные по линиям влияния, совпадают со значениями расчета на постоянную нагрузку.

2 Статически определимые фермы

Фермой называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены ее жестких узлов шарнирными. При этом нагрузка к ферме прилагается в узлах, а в стержнях возникают только продольные усилия N .

Ферма, как правило, состоит из нескольких однотипных элементов — панелей, при этом стержни фермы имеют свои названия (рис. 2.1):

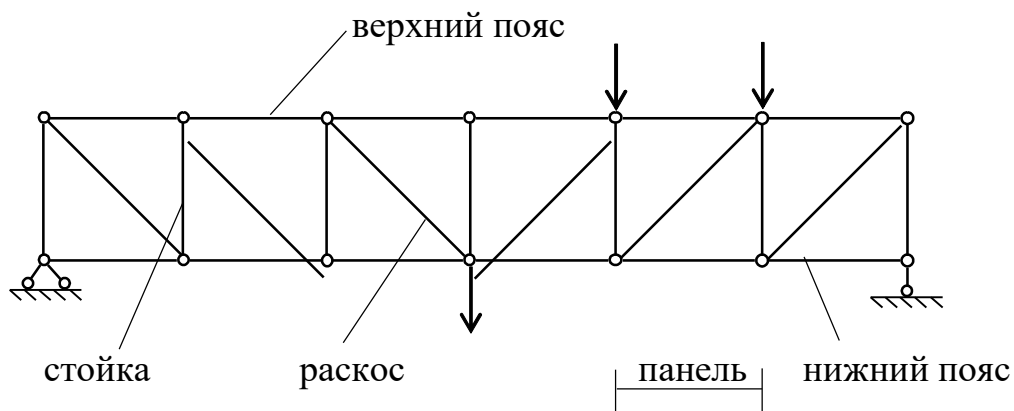
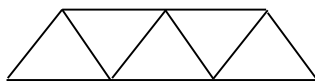


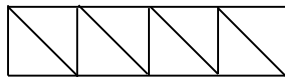
Рис. 2.1

Фермы классифицируются по следующим признакам:

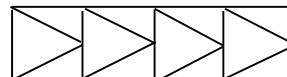
1.1. По типу решетки:



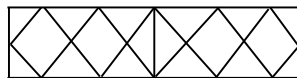
Треугольная



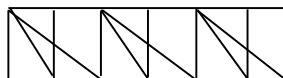
Раскосная



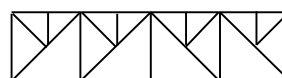
Полураскосная



Ромбическая

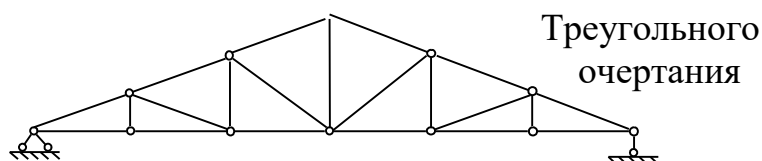
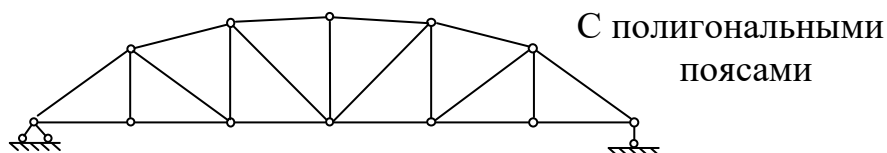
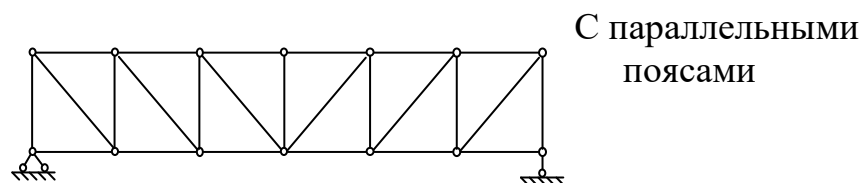


Двухрешетчатая



Сложная
(шпренгельная)

1.2. По очертанию:



1.3. По типу опирания: балочные, консольные, консольно-балочные;

1.4. По назначению: стропильные, башенные, крановые, мостовые с ездой понизу и поверху, и др.

2.1 Расчет простейших ферм на неподвижную нагрузку

Фермы, образованные из шарнирных треугольников последовательным присоединением узлов, называются *простейшими*. Они статически определимы и геометрически неизменяемы.

В задачах расчета статически определимых ферм в полной мере приходится использовать уравнения равновесия как сходящейся системы сил (при рассмотрении равновесия узла), так и произвольной системы сил. Необходимо отметить, что все методы определения усилий в стержнях фермы реализуют основной метод механики деформируемого твердого тела – *метод сечений*. Принято различать три основных способа определения усилий в стержнях ферм:

1) *метод моментной точки* используется, когда в поперечном сечении оказывается не более трех неизвестных усилий в стержнях; при этом два из них пересекаются в точке, положение которой легко определить. В сумму моментов

всех сил, приложенных к рассматриваемой части фермы относительно этой точки, которая называется моментной, войдет только одно неизвестное, которое из этого уравнения и будет найдено;

2) *метод проекций*. В этом случае записывают сумму проекций всех сил, приложенных к рассматриваемой части фермы на ось x или y или другую произвольно ориентированную ось. Ось проекции выбирается так, чтобы в уравнение равновесия входило одно неизвестное усилие;

3) *метод вырезания узлов* применяется для определения усилий, когда в узле сходится не более двух стержней с неизвестными усилиями.

Пример 2. 1. Определить нулевые стержни заданной консольной фермы (рис. 2.2).

Решение. Вырежем узел 9 и рассмотрим его равновесие (рис. 2.3). Узел не нагружен, и в нем сходятся два стержня.

Из уравнения равновесия

$\Sigma y = 0$ получим:

$$N_{97} \sin \alpha = 0, \text{ откуда } N_{97} = 0.$$

Запишем второе уравнение равновесия:

$$\Sigma x = 0, \quad -N_{97} \cos \alpha - N_{98} = 0, \quad \text{тогда } N_{98} = 0.$$

Таким образом, *оба усилия, сходящиеся в двухстержневом ненагруженном узле, нулевые.*

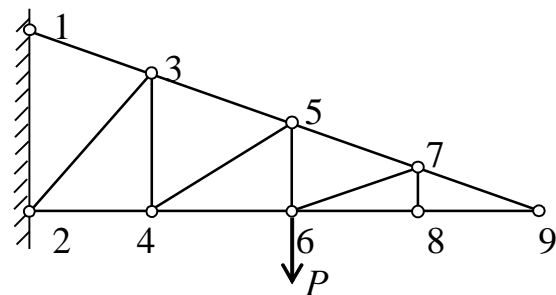


Рис. 2.2

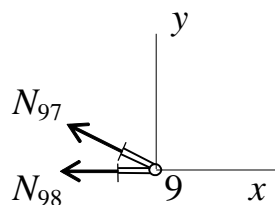


Рис. 2.3

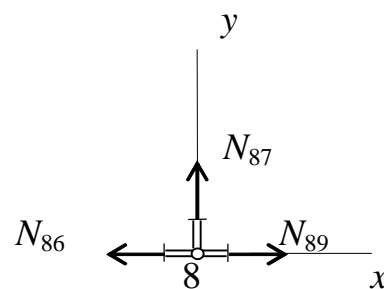


Рис. 2.4

Рассмотрим равновесие 8-го узла (рис. 2.4). Это так называемый *трех-стержневой узел с единственно выходящим стержнем*. Им является стержень 8–7. Записав сумму проекций $\Sigma y = 0$, нетрудно убедиться, что стержень 8–7 — нулевой, а из уравнения $\Sigma x = 0$ следует, что $N_{98} = N_{86}$.

Мысленно вырежем узел 7. С учетом того, что стержень 7–8 нулевой, 7-й узел можно рассматривать как трехстержневой с единственно выходящим стержнем 7–6, который тоже будет нулевым. Остальные узлы либо нагружены, либо не могут рассматриваться как трехстержневые, и в остальных стержнях решетки будут возникать продольные усилия.

Пример 2. 2 Вычислить усилия в отмеченных стержнях фермы (рис. 2.5).

Наметим путь *решения* задачи. Усилие в стержне 3–4 удобно искать, рассмотрев равновесие узла 3; усилие в стержне 5–6 проще найти методом вырезания узла 6, а усилие в раскосе 4–5 удобнее находить, используя метод проекций. Для этого необходимо найти реакции опор и провести сечение I–I.

$$\Sigma m_1 = 0. \quad P \cdot 6 - R_{\text{пр}} \cdot 12 = 0, \quad R_{\text{пр}} = R_{\text{л}} = P/2.$$

Для определения усилия в стержне 3–5 можно воспользоваться методом моментной точки, которая находится в месте пересечения двух других усилий, оказавшихся в сечении I–I. Моментной точкой для N_{35} служит узел 4 (рис. 2.5,б).

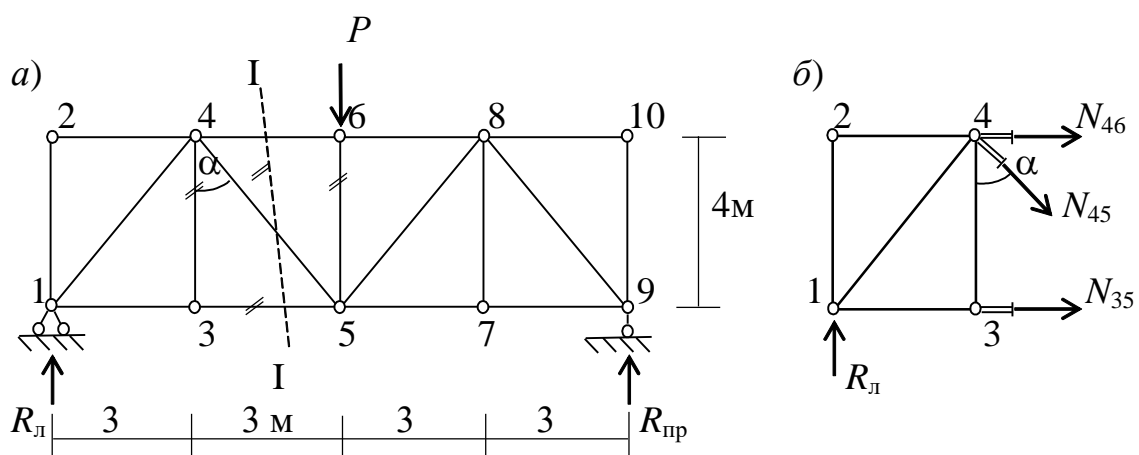


Рис. 2.5

Дальнейшее решение задачи предлагается провести студентам самостоятельно. Вырезав узел 3, получим $N_{34} = 0$; вырезав узел 6, нетрудно убедиться,

что стойка 5–6 сжата усилием P ($N_{56} = -P$), а спроектировав все силы, приложенные к левой или правой частям фермы на вертикальную ось, получим усилие в раскосе $N_{54} = R_L / \cos \alpha = 0,5P / 0,8 = 0,625P$. Записав уравнение моментов для левой части фермы относительно узла 4, найдем $N_{35} = R_L 3/4 = 0,375P$.

Пример 2. 3. Определить усилия в стержнях третьей панели заданной фермы (рис. 2.6, а). При расчетах принять:

$d = 3,6$ м, $h = 3$ м, $h_1 = 0,4h = 1,2$ м и $P = 80$ кН.

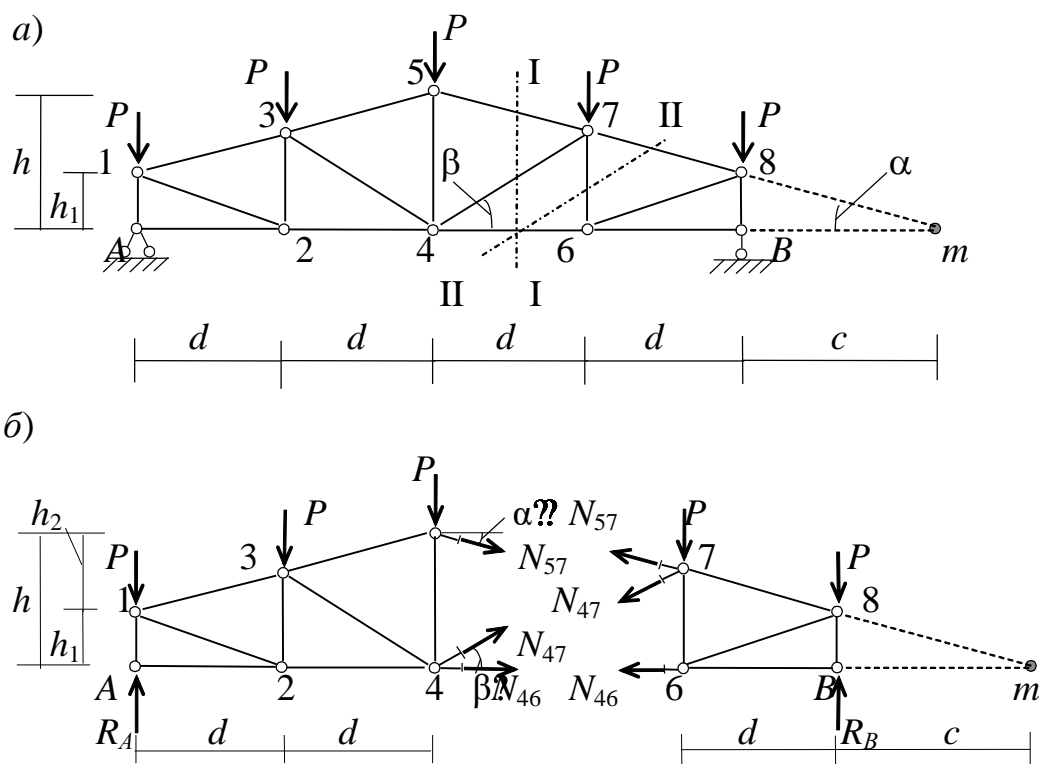


Рис 2.6

Решение. Итак, нам необходимо определить усилия в пяти стержнях фермы: в стержнях верхнего и нижнего пояса 5–7 и 4–6, в раскосе 4–7, в левой 4–5 и правой 6–7 стойках третьей панели.

Предварительно вычислим ряд геометрических параметров заданной фермы, обозначив размер $h - h_1 = h_2$.

$$l_{57} = \sqrt{d^2 + (h_2 / 2)^2} = \sqrt{3,6^2 + 0,9^2} = 3,71 \text{ м};$$

$$l_{47} = \sqrt{d^2 + (h_1 + h_2 / 2)} = \sqrt{3,6^2 + 2,1^2} = 4,17 \text{ м};$$

$$\cos \alpha = d/l_{57} = 3,6/3,71 = 0,97, \quad \sin \alpha = (h_2/2)/l_{57} = 0,9/3,71 = 0,242;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,9/3,6 = 0,25; \quad c = h_1/\operatorname{tg} \alpha = 1,2/0,25 = 4,8 \text{ м};$$

$$\cos \beta = d/l_{47} = 3,6/4,17 = 0,863;$$

$$\sin \beta = (h_1 + h_2/2)/l_{47} = 2,1/4,17 = 0,504.$$

1. Определяем опорные реакции.

$$\Sigma m_A = 0. - P \cdot d - P \cdot 2d - P \cdot 3d - P \cdot 4d + R_B \cdot 4d = 0; \quad R_B = 200 \text{ кН.}$$

В силу симметрии $R_A = R_B = 200 \text{ кН.}$

2. Для определения усилий в стержнях 4–6, 4–7 и 5–7 разрежем третью панель сечением I–I и рассмотрим равновесие одной из частей фермы под действием внешних и внутренних сил (рис. 2.6, б). Рассматривая правую часть фермы, видим, что для определения N_{46} удобно записать уравнение моментов относительно *моментной точки 7* (узла 7), в которой пересекаются два других неизвестных усилия N_{47} и N_{57} .

$$\Sigma m_7 = 0. - P \cdot d + R_B \cdot d - N_{46}(h_1 + h_2/2) = 0.$$

$$N_{46} = (-80 \cdot 3,6 + 200 \cdot 3,6)/2,1 = 206 \text{ кН.}$$

Усилие N_{46} направлено на чертеже от узла и получилось положительным, следовательно, стержень 4–6 растянут.

Для определения усилия N_{57} также удобно использовать метод моментной точки (узел 4). Рассмотрим равновесие левой части фермы.

$$\Sigma m_4 = 0. - R_A \cdot 2d + P \cdot 2d + P \cdot d - (N_{57} \cos \alpha)h = 0.$$

$$N_{57} = (-200 \cdot 7,2 + 80 \cdot 7,2 + 80 \cdot 3,6)/(0,97 \cdot 3) = -198 \text{ кН.}$$

Знак «–» у усилия N_{57} говорит, что стержень 5–7 сжат.

Усилие N_{47} можно найти либо методом проекций на ось y всех сил, приложенных к одной из частей фермы, либо методом моментной точки. В данном

случае это будет точка m , лежащая справа от опоры B (рис. 2.6). Воспользуемся *методом проекций*, рассмотрев равновесие левой части фермы (рис. 2.6, б).

$$\Sigma y = 0. \quad R_A - P - P - P - N_{57} \sin \alpha + N_{47} \sin \beta = 0.$$

$$N_{47} = [-200 + 80 + 80 + 80 + (-198) \cdot 0,242] / 0,504 = -15,7 \text{ кН}$$

(стержень сжат).

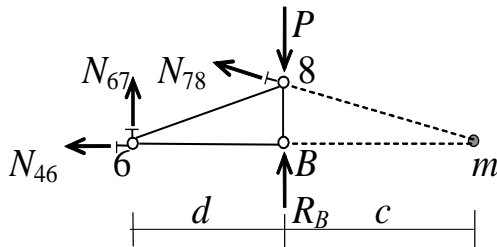


Рис. 2.7

Для вычисления усилия в стержне 6–7 проведем сечение II–II (рис. 3.32, а) и рассмотрим равновесие правой части фермы (рис. 2.7). Воспользуемся методом моментной точки: для усилия N_{67} моментной точкой будет точка m , в которой пересека-

ются два других усилия N_{46} и N_{78} .

$$\Sigma m_m = 0, \quad -N_{67}(d + c) + Pc - R_B c = 0.$$

$$N_{67} = (80 \cdot 4,8 - 200 \cdot 4,8) / 8,4 = -69 \text{ кН},$$

(стержень 6–7 сжат).

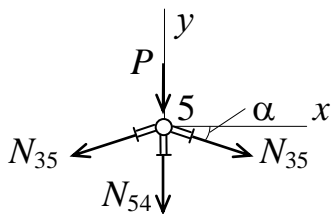


Рис. 2.8

В стойке 5–6 усилие будем определять *методом вырезания узлов*, вырезав узел 5 (рис. 2.8). Спроецируем все усилия, сходящиеся в узле, на ось y . В силу симметрии фермы и внешней нагрузки усилие в стержне 3–5 примем равным усилию в стержне 5–7.

$$\Sigma y = 0. \quad -P - N_{45} - N_{57} \sin \alpha - N_{35} \sin \alpha = 0;$$

$$N_{45} = -80 - 2(-198) \cdot 0,242 = 15,8 \text{ кН, стойка 4 - 5 растянута.}$$

Для проверки полученных усилий можно записать уравнение проекций всех сил, приложенных к левой или правой частям фермы (рис. 2.6, б) на ось x .

$$\Sigma x = 0. \quad N_{57} \cos \alpha + N_{47} \cos \beta + N_{46} = 0;$$

$$(-198) \cdot 0,97 + (-15,7) \cdot 0,863 + 206 = -205,6 + 206 = 0.$$

Погрешность δ , полученная в результате проверки, равна:

$$\delta = (206 - 205,6) \cdot 100\% / 205,6 = 0,2\%,$$

при допустимой (разрешенной) для данного типа задач 3–5%.

2.2 Расчет ферм на подвижную нагрузку

Расчет ферм на подвижную нагрузку сводится к построению линий влияния при действии на ферму подвижной единичной силы, перемещающейся по одному из поясов.

Порядок построения линий влияния в фермах рассмотрим на примере. Рассмотрим построение линий влияния усилий N_{35} , N_{34} , N_{45} , и N_{67} для фермы, показанной на рис. 2. 9.

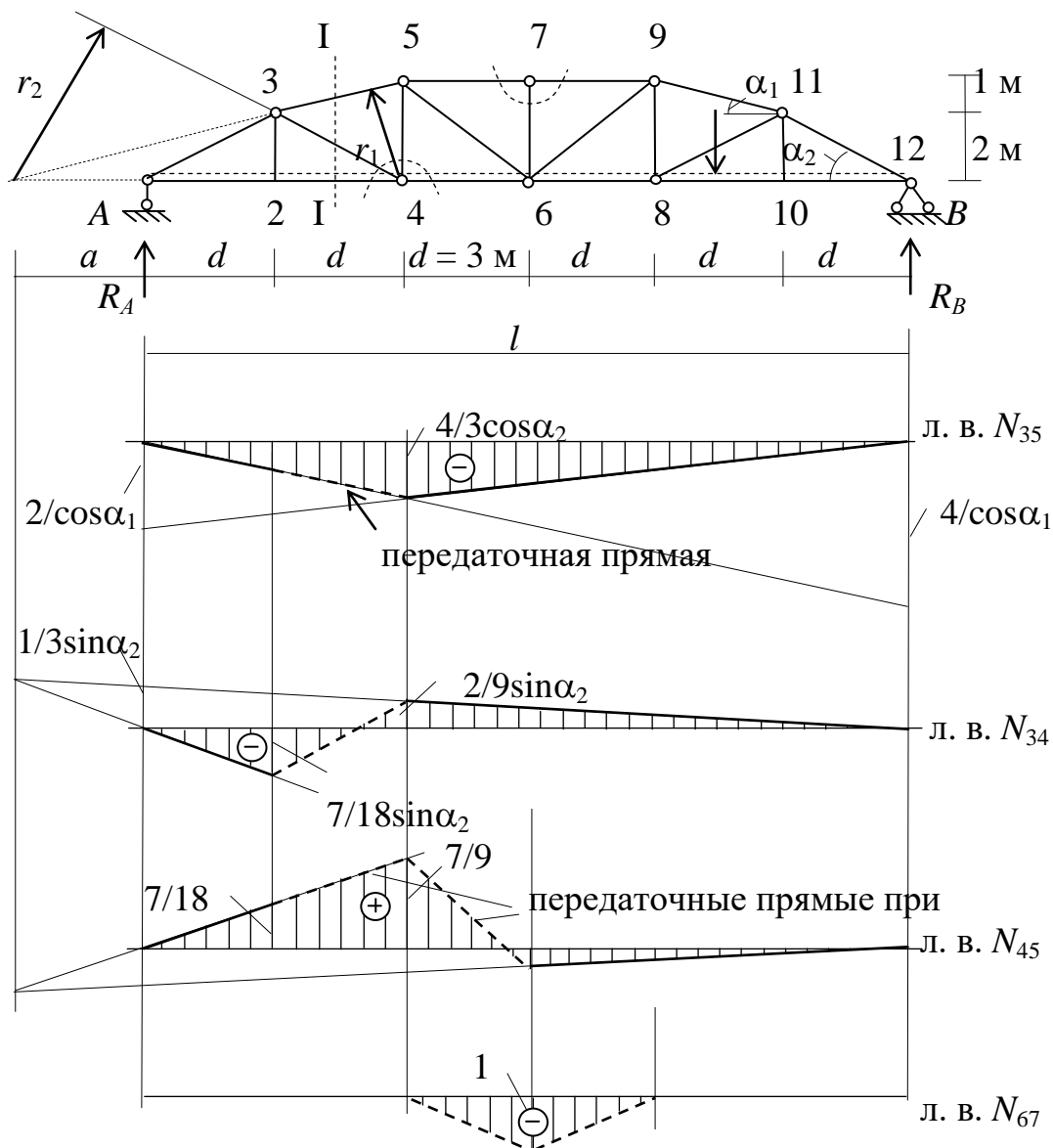


Рис. 2.9

Для построения линии влияния (а это график) усилия в стержне 3-5 необходимо получить выражение для этого усилия в зависимости от положения единичной силы. В свою очередь, единичная сила $P = 1$ перемещается по нижнему поясу – это отмечено на ферме пунктирной линией. Для определения усилия N_{35} разрежем вторую панель сечением I-I и воспользуемся методом моментной точки. Моментной точкой является узел 4.

Пусть единичная сила перемещается справа от разрезанной панели между 4 и 12 узлами. Рассмотрим равновесие левой части фермы.

$$\Sigma m_4 = 0, \quad R_A \cdot 2d + N_{35} \cdot r_1 = 0. \quad (r_1 = h \cos \alpha_1)$$

$$N_{35} = -\frac{2d}{r_1} R_A, \quad \text{тогда уравнение правой ветви примет вид линии влияния реакции } R_A,$$

умноженной на множитель $2d/r_1$:

$$\text{л. в. } N_{35} = -\frac{2d}{r_1} (\text{л. в. } R_A) = -\frac{6}{3 \cdot \cos \alpha_1} (\text{л. в. } R_A) = -\frac{2}{\cos \alpha_1} (\text{л. в. } R_A).$$

Для построения правой ветви линии влияния N_{35} отложим на левой опорной вертикали ординату $1 \cdot 2 / \cos \alpha_1$. Поскольку линия влияния имеет знак минус, указанную ординату откладываем вниз. Правая ветвь будет проходить от 12 до 4 узла.

$P = 1$ находится слева от разрезанной панели между 1 и 2 узлами. Рассмотрим равновесие правой части фермы.

$$\Sigma m_4 = 0, \quad R_B \cdot 4d + N_{35} \cdot r_1 = 0.$$

По аналогии

$$\text{л. в. } N_{35} = -\frac{4d}{r_1} (\text{л. в. } R_B) = -\frac{12}{3 \cdot \cos \alpha_1} (\text{л. в. } R_A) = -\frac{4}{\cos \alpha_1} (\text{л. в. } R_A).$$

Откладывая на правой опорной вертикали ординату $1 \cdot 4 / \cos \alpha_2$, строим левую ветвь линии влияния N_{35} от 1 до 2 узла.

Движение единичной силы между 2 и 4 узлами можно осуществить по настилу. В этом случае будет иметь место узловая передача нагрузки, а линия влияния будет очерчена *передаточной прямой* (пунктирной линией), соединяющей левую и правую ветви. Отметим, что *левая и правая ветви пересекаются*

под моментной точкой. Это свойство линий влияния можно использовать для проверки.

Построим, используя приведенную выше методику, линию влияния усилия N_{34} . Моментная точка для этого усилия находится в точке «к», в точке пересечения продолжения стержней 2-4 и 3-5. Из подобия треугольников находим, что $a = d = 3$ м, плечо у усилия N_{34} относительно моментной точки составит $r_2 = 3d \cdot \sin \alpha_2$.

$P = 1$ справа от разрезанной панели.

$$\Sigma m_k = 0, \quad R_A \cdot a - N_{34} \cdot r_2 = 0.$$

$$\text{л. в. } N_{34} = \frac{a}{r_2} (\text{л. в. } R_A) = \frac{3}{9 \cdot \sin \alpha_2} (\text{л. в. } R_A) = \frac{1}{3 \sin \alpha_2} (\text{л. в. } R_A).$$

Строим правую ветвь, отложив на левой опорной вертикали $1/3 \sin \alpha_2$. Ординату под 4 узлом ($2/9 \sin \alpha_2$) находим из подобия треугольников.

$P = 1$ слева от разрезанной панели.

$$\Sigma m_k = 0, \quad R_B \cdot 7d + N_{34} \cdot r_2 = 0.$$

$$\text{л. в. } N_{34} = -\frac{7d}{r_2} (\text{л. в. } R_B) = -\frac{7}{3 \cdot \sin \alpha_2} (\text{л. в. } R_B).$$

Строим левую ветвь, отложив вниз на правой опорной вертикали $7/3 \sin \alpha_2$. В районе второго узла ордината составит $1/6$ от $7/3 \sin \alpha_2$.

Передаточной прямой соединяем левую и правую ветви. Не трудно убедиться, что они пересекаются под моментной точкой.

Для определения усилия N_{45} и построения его линии влияния можно так же воспользоваться методом моментной точки (точка «к») или методом вырезания узлов. Действительно, вырезав узел 4 (рис. 2.10) можно увидеть что в уравнение $\Sigma y = 0$ входит одно неизвестное N_{45} . Линия влияния усилия N_{34} нами получена. Рассмотрим равновесие 4 узла.

$$\Sigma y = 0. \quad N_{34} \sin \alpha_2 + N_{45} = 0. \quad N_{45} = -N_{34} \sin \alpha_2, \text{ или}$$

$$\text{л. в. } N_{45} = -(\text{л. в. } N_{34}) \cdot \sin \alpha_2$$

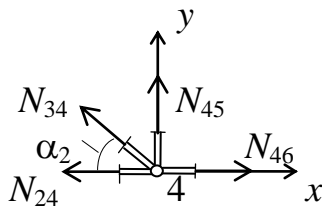


Рис. 2.10

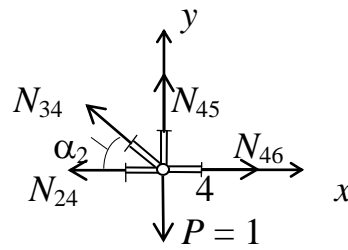


Рис. 2.11

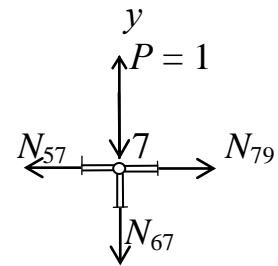


Рис. 2.12

Вырезая узел 4, нам пришлось разрезать вторую и четвертую панели, т. е. левая ветвь линии влияния проходит от 1 до 2 узла, а правая от 6 до 12 узла. Строим эти ветви.

В качестве промежуточного будет положение единичной силы в 4 узле (рис. 2.11). В этом случае

$$\sum y = 0. \quad N_{34} \sin \alpha_2 + N_{45} - P = 0. \quad N_{45} = -N_{34} \sin \alpha_2 + 1 = -\frac{2}{9 \sin \alpha_2} \sin \alpha_2 + 1 = \frac{7}{9}.$$

Откладываем в районе 4 узла $7/9$ и проводим две передаточные прямые. Получили линию влияния N_{45} . Необходимо обратить внимание где пересекаются левая и правая ветви линии влияния N_{45} .

При езде понизу усилие в стержне 6-7 равно нулю – стержень 6-7 нулевой. В то же время, при езде поверху при движении единичной силы между 5 и 9 узлами в стойке 6-7 будет возникать нагрузка. При движении по остальной части верхнего пояса стержень 6-7 остается нулевым, следовательно левая (от 1 до 5 узла) и правая (от 9 до 12 узла) ветви линии влияния усилия N_{67} тоже нулевые. Воспользуемся методом вырезания узлов, когда сила $P = 1$ находится в 7 узле (рис. 2. 12).

$$\sum y = 0. \quad -N_{67} - P = 0. \quad N_{67} = -1.$$

Откладываем ординату «- 1» от проекции 7 узла, проводим передаточные прямые и получаем линию влияния N_{67} (см. рис. 2.9).

3 Трехшарнирные арки

Арочными называются системы криволинейного или ломаного очертания, в опорах которых от вертикальной нагрузки возникают наклонные реакции, направленные, как правило, внутрь пролета. Горизонтальная составляющая такой наклонной реакции называется *распором*. Арочные системы в сравнении с балочными оказываются экономически более выгодными за счет меньших, чем в балках, изгибающих моментов.

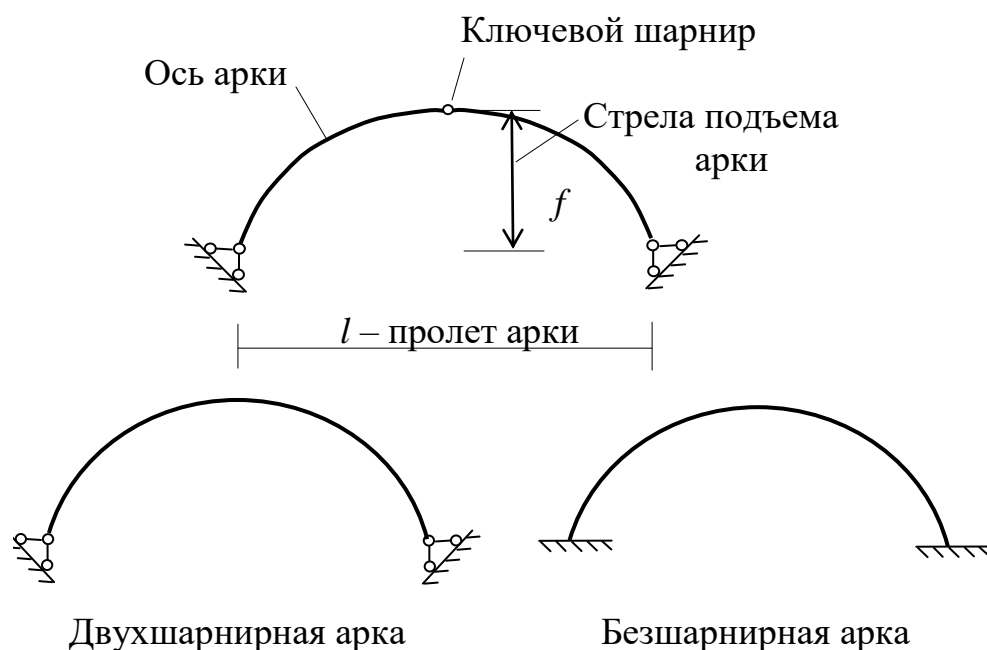


Рис. 3.1

Двухшарнирные и безшарнирные арки являются статически неопределимыми и будут рассматриваться в соответствующем разделе.

Трехшарнирная арка является системой геометрически неизменяемой и статически определимой. Принятые обозначения в арках показаны на рис. 3.1.

В практике встречаются различные по форме и виду арки. В том случае, когда каждая половина трехшарнирной арки представляет собой сплошной брус криволинейного очертания, ее называют *аркой со сплошной стенкой* (рис. 3.1). При ломаном очертании оси сооружения обычно называют *трехшарнирной рамой* (рис. 3.2, а, б). Система, изображенная на рис. 3.2, в, носит название *трехшарнирной арки с затяжкой*.

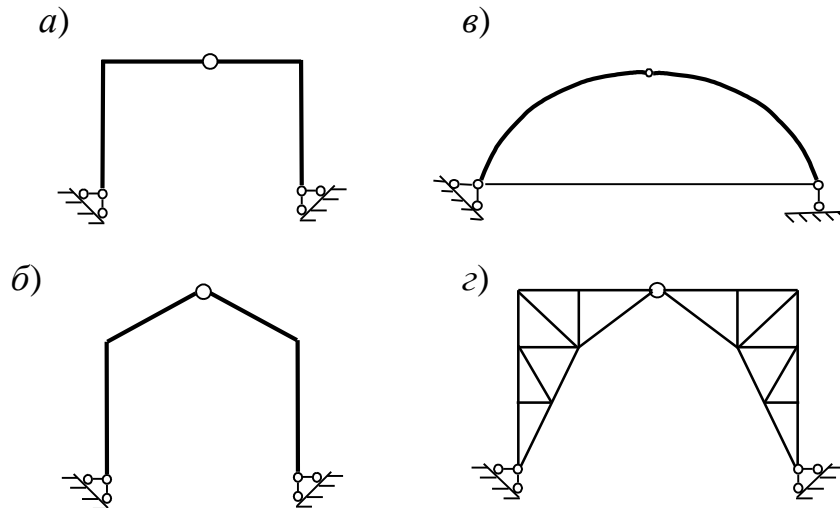


Рис. 3.2

В практике встречаются арки, образованные из двух ферм, соединенных между собой общим шарниром (рис. 3.2,г). Такие системы называются *трехшарнирными фермами*.

3.1 Аналитический расчет трехшарнирной арки

Определение опорных реакций

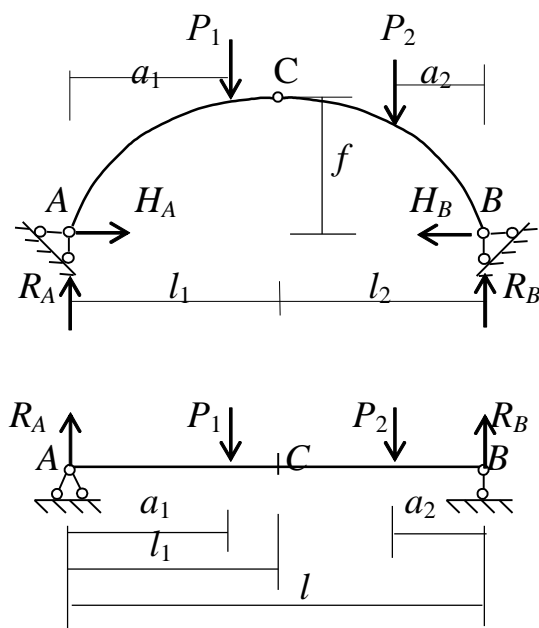


Рис. 3.3

При действии внешней нагрузки на трехшарнирную арку (рис. 3.3) в каждой ее опоре возникает по две реакции. Всего, таким образом, имеется четыре неизвестные реакции – две вертикальные R_A , R_B и две горизонтальные H_A и H_B . Для расчета трехшарнирной арки кроме трех уравнений равновесия, которые дает статика для системы сил, расположенной в од-

ной плоскости, можно составить четвертое уравнение, основанное на том, что сумма моментов всех сил, приложенных по одну сторону от ключевого шарнира C , равна нулю. Действительно, это уравнение для изгибающего момента в поперечном сечении, а в шарнире момент отсутствует.

Для трехшарнирной арки (рис. 3.3) при определении реакций будут записаны следующие уравнения:

$$\Sigma m_B = 0, \quad -R_A l + P_1(l - a_1) + P_2 a_2 = 0, \quad (a)$$

$$R_A = [P_1(l - a_1) + P_2 a_2] / l.$$

$$\Sigma m_A = 0, \quad R_B l - P_1 a_1 - P_2(l - a_2) = 0, \quad (б)$$

$$R_B = [P_1 a_1 + P_2(l - a_2)] / l.$$

Уравнения (а) и (б) для вычисления вертикальных реакций имеют тот же вид, что и уравнения в балочной системе. Для вычисления распора запишем следующие уравнения:

$$\Sigma x = 0, \quad H_A - H_B = 0, \quad H_A = H_B = H.$$

$$\Sigma m_C^{\text{пр}} = 0, \quad R_B l_2 - P_2(l_2 - a_2) - H_B f = 0, \quad (в)$$

$$H_B = H = [R_B l_2 - P_2(l_2 - a_2)] / f, \quad \text{или:}$$

$$H = \frac{M_C^{\text{бал}}}{f} \quad (3.1)$$

В выражении (3.1) $M_C^{\text{бал}}$ представляет собой изгибающий момент в сечении C в балке, перекрывающей тот же пролет и воспринимающей заданную на трехшарнирную арку вертикальную нагрузку (рис. 3.3). Из формулы (3.1) следует, что величина распора H обратно пропорциональна стреле подъема арки f .

Определение внутренних усилий в арке от вертикальной нагрузки

При действии на арку только вертикальных нагрузок (рис. 3.4, а) изгибающий момент в сечении с абсциссой x равен:

$$M_x = R_A x - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - H y,$$

или:

$$M_x = M_x^{\text{бал}} - H \cdot y, \quad (3.2)$$

где $M_x^{\text{бал}}$ — изгибающий момент в балке (рис. 3.4, б) от той же нагрузки в сечении с абсциссой x (так называемый балочный момент). Формулой (3.2) удобно пользоваться при построении эпюры моментов в арке. Значения $M_x^{\text{бал}}$ непосредственно берут из эпюры моментов, построенной для балки. Величину распора находят по формуле (3.1).

Полученная формула для M_x наглядно показывает уменьшение изгибающего момента в арке по сравнению с балкой, что подтверждает экономичность арочной конструкции по сравнению с балочной. Это видно из построений на рис. 3.4, в, где показано совмещение балочной эпюры моментов и кривой, соответствующей слагаемому $H \cdot y$ в формуле (3.1). На рис. 3.4, д показан вид эпюры моментов M_x в арке.

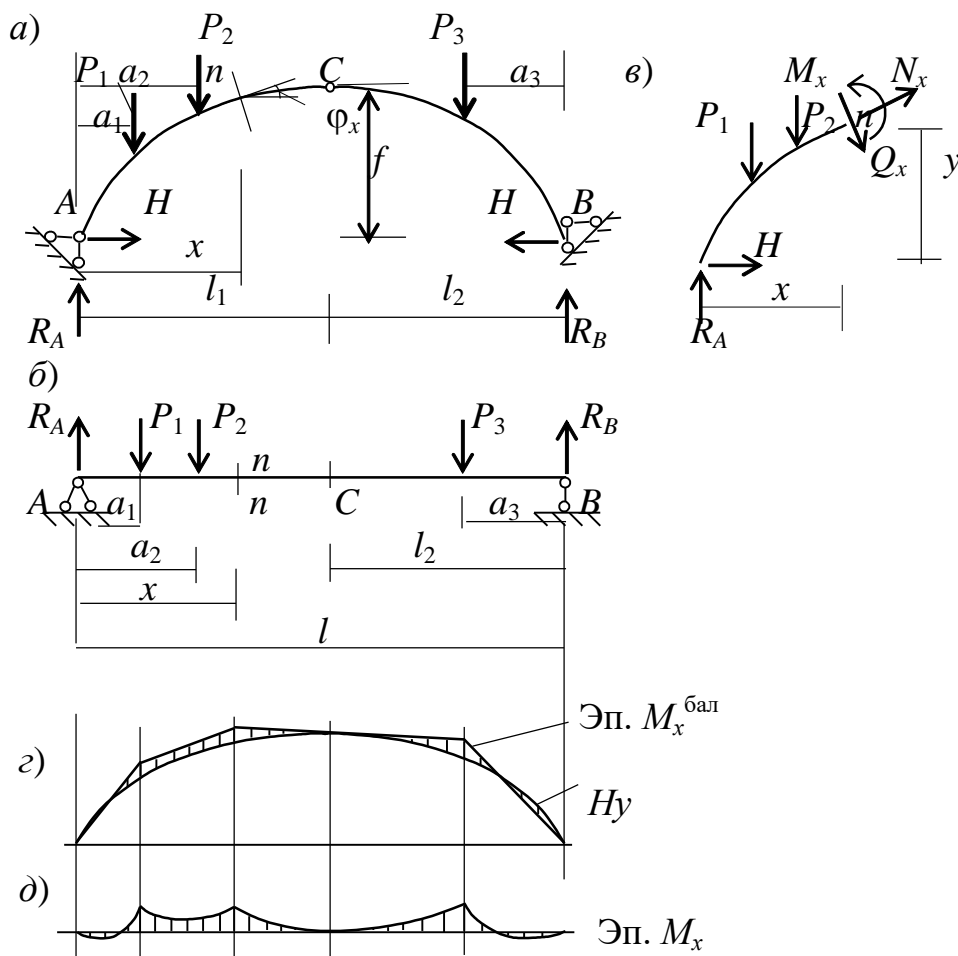


Рис. 3. 4

Аналогичные формулы можно получить для поперечной Q_x и продольной N_x сил. Для этого спроецируем все приложенные слева от сечения $n - n$ силы (рис. 3. 4, в) сначала на нормаль к оси арки в сечении с абсциссой x , а затем на касательную к ней:

$$Q_x = (R_A - P_1 - P_2) \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x,$$

$$N_x = + (R_A - P_1 - P_2) \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x.$$

Нетрудно убедиться, что величина, стоящая в круглых скобках в записанных выше выражениях, представляет собой величину поперечной силы в балке в сечении с той же абсциссой x ; тогда эти формулы примут вид:

$$Q_x = Q_x^{\text{бал}} \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x, \quad (3.3)$$

$$N_x = Q_x^{\text{бал}} \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x. \quad (3.4)$$

Отметим, что в арке принято считать $N > 0$ при сжатии.

Рациональная ось арки

Из формулы (3.2) следует, что в том случае, когда очертание оси арки совпадает с очертаниями балочной эпюры моментов $M^{\text{бал}}$, называемой кривой давления, т. е. если

$$y(x) = \frac{M^{\text{бал}}}{H}, \quad (3.5)$$

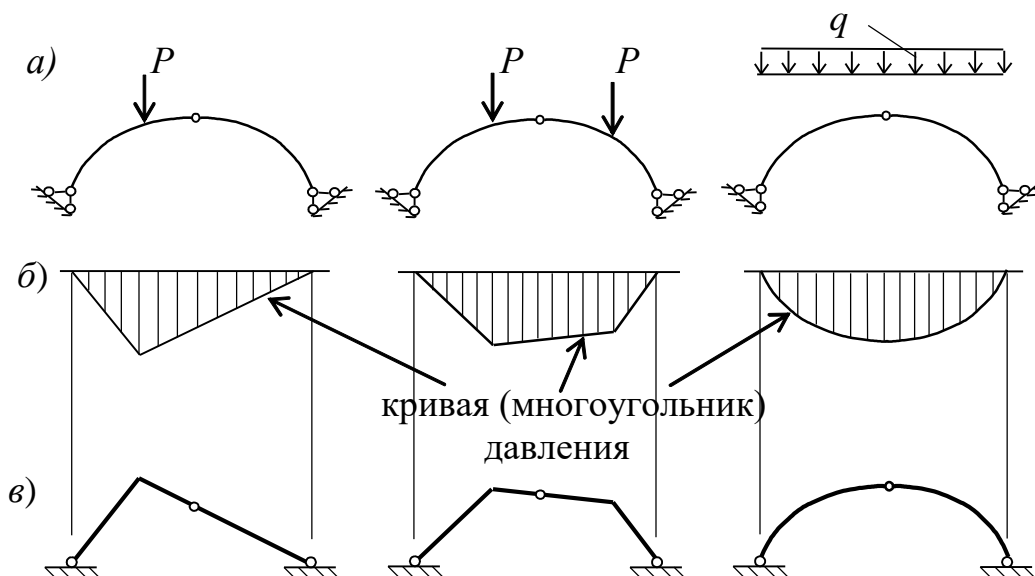


Рис. 3.5

то в такой арке изгибающий момент $M_x = 0$.

Уравнение (3.5) называют уравнением *рациональной оси* арки. На рис. 3. 5, в приведены очертания арок с рациональной осью для различных случаев нагружения.

Пример 3.1 Для заданной трехшарнирной арки с размерами, показанными на рис. 3. 6, вычислить значения внутренних усилий в сечениях m и n . Построить эпюры внутренних усилий. Уравнение оси арки – квадратная парабола с началом координат в точке A :

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x, \text{ где } l = 12 \text{ м, } f = 4 \text{ м.}$$

Решение.

1. Определяем опорные реакции:

$$\Sigma m_A = q \cdot 6 \cdot 3 + P \cdot 9 - R_B \cdot 12 = 0. \quad R_B = 6 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_B = q \cdot 6 \cdot 9 + P \cdot 3 - R_A \cdot 12 = 0. \quad R_A = 10 \text{ кН.}$$

$$H = M_C^{\text{бал}}/f = (R_B \cdot 6 - P \cdot 3)/4 = 6 \text{ кН.}$$

2. Строим эпюры $Q_x^{\text{бал}}$ и $M_x^{\text{бал}}$.

3. По формуле (3.2) вычисляем значения M_x , получив предварительно ординаты заданных сечений m и n :

$$y_m = \frac{4 \cdot 4}{12^2}(12-3)3 = 3 \text{ м} = y_n$$

$$M_m = M_m^{\text{бал}} - Hy_m = 21 - 6 \cdot 3 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$M_n = M_n^{\text{бал}} - Hy_n = 18 - 6 \cdot 3 = 0.$$

4. Вычисляем Q_m и Q_n , используя формулу (3.3)

$$Q_m = Q_m^{\text{бал}} \cos \varphi_m - H \sin \varphi_m$$

Для вычисления тригонометрических функций воспользуемся следующими математическими соотношениями:

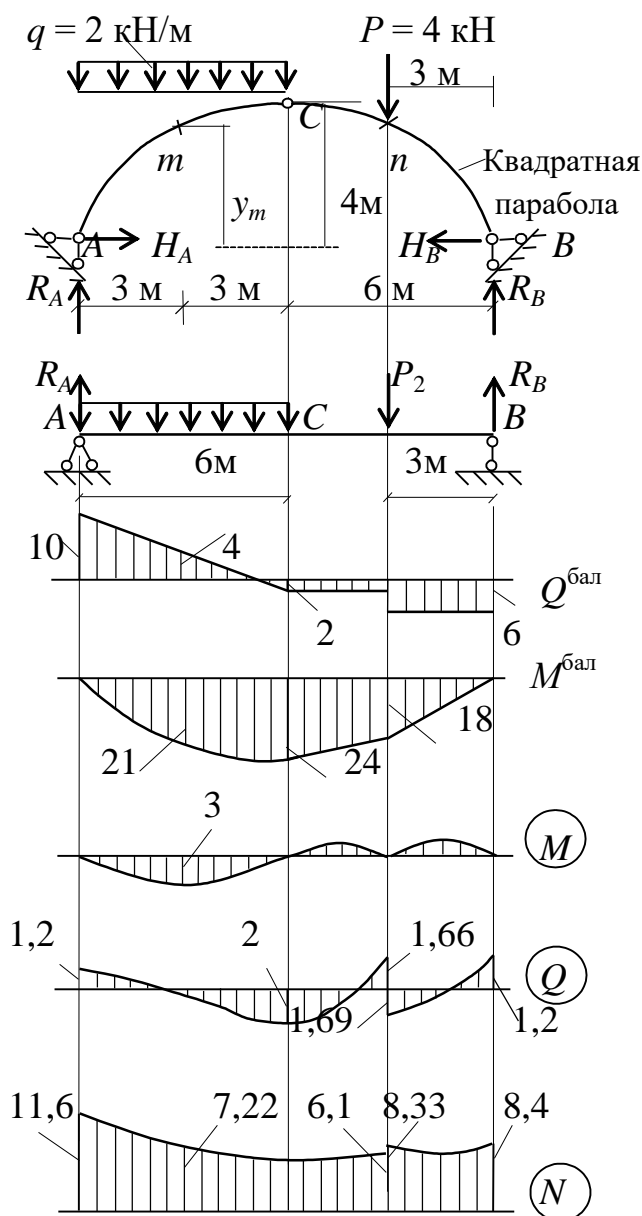


Рис. 3.6

В сечении n эпюра $Q^{\text{бал}}$ имеет разрыв, аналогично будет разрыв и в эпюре поперечных сил арки. Поэтому необходимо подсчитать поперечную силу слева и справа от сечения:

$$Q_n^{\text{л}} = (-2) \cdot 0,832 - 6 \cdot (-0,555) = 1,658 \text{ кН},$$

$$Q_n^{\text{пр}} = (-6) \cdot 0,832 - 6 \cdot (-0,555) = -1,686 \text{ кН}.$$

Одновременно найдем поперечные силы в опорных сечениях A и B .

$$\sin \varphi = \frac{\text{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}}$$

$$\text{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x),$$

тогда

$$\text{tg} \varphi_m = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12 - 2 \cdot 3) = 0,667,$$

$$\text{tg} \varphi_n = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12 - 2 \cdot 9) = -0,667,$$

$$\sin \varphi_m = \frac{0,667}{\sqrt{1 + 0,667^2}} = \frac{0,667}{3,6} = 0,555,$$

$$\cos \varphi_m = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,667^2}} = \frac{1}{3,6} = 0,832.$$

Аналогично:

$$\sin \varphi_n = -0,555, \quad \cos \varphi_n = 0,832.$$

Подсчитаем значения Q в заданных сечениях:

$$Q_m = Q_m^{\text{бал}} \cos \varphi_m - H \sin \varphi_m = 4 \cdot 0,832 - 6 \cdot 0,555 = 0.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_A = -\operatorname{tg} \varphi_B = \frac{4 \cdot 4}{12^2} 12 = 1,333;$$

$$\sin \varphi_A = -\sin \varphi_B = \frac{1,333}{\sqrt{1+1,333^2}} = 0,8;$$

$$\cos \varphi_A = \cos \varphi_B = \frac{1}{\sqrt{1+1,333^2}} = 0,6.$$

$$Q_A = 10 \cdot 0,6 - 6 \cdot 0,8 = 1,2 \text{ кН}; \quad Q_B = -6 \cdot 0,6 - 6(-0,8) = 1,2 \text{ кН}.$$

$$Q_C = -2 \cdot 1 = -2 \text{ кН}.$$

5. Вычисляем продольные усилия по формуле (3.4):

$$N_m = Q_m^{\text{бал}} \sin \varphi_m + H \cos \varphi_m = 4 \cdot 0,555 + 6 \cdot 0,832 = 7,218 \text{ кН},$$

$$N_n^{\text{л}} = (-2) \cdot (-0,555) + 6 \cdot 0,832 = 6,108 \text{ кН},$$

$$N_n^{\text{пр}} = (-6) \cdot (-0,555) + 6 \cdot 0,832 = 8,328 \text{ кН},$$

В опорных сечениях:

$$N_A = 10 \cdot 0,8 + 6 \cdot 0,6 = 11,6 \text{ кН},$$

$$N_B = (-6) \cdot (-0,8) + 6 \cdot 0,6 = 8,4 \text{ кН}.$$

Таблица 1.

№ сеч.	x (м)	y (м)	tg φ	sin φ	cos φ	M ^б	H	M	Q ^б	Q ^б . cos φ	H · sin φ	Q	Q ^б . sin φ	H · cos φ	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	15	11	14	16
A	0	0	1.333	0.8	0.6	0	6	0	10	6	4.8	1.2	8	3.6	11.6
m	3	3	0.667	0.555	0.83	21	6	3	4	3.33	3.33	0	2.22	4.99	7.22
C	6	4	0	0	1	24	6	0	-2	-2	0	-2	0	6	6
n(л)	9	3	-0.667	-0.555	0.83	18	6	0	-2	-1.66	-3.33	1.66	-1.11	4.99	6.11
n(пр)	9	3	-0.667	-0.555	0.83	18	6	0	-6	-4.99	-3.33	-1.69	-3.33	4.99	8.33
B	12	0	-1.333	-0.8	0.6	0	6	0	-6	-3.6	-4.8	1.2	4.8	3.6	8.4

6. Сводим полученные значения в таблицу 1 и строим эпюры внутренних усилий в арке (рис. 3. 6).

Пример 3.2

Для заданной трехшарнирной рамы с размерами и нагрузкой, показанными на рис. 3. 7,а, построить эпюры внутренних усилий.

Решение.

1. Определяем опорные реакции:

$$\Sigma m_A = -q \cdot 12 \cdot 18 - P \cdot 3 + R_B \cdot 24 = 0. \quad R_B = 10,25 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_B = q \cdot 12 \cdot 6 + P \cdot 21 - R_A \cdot 24 = 0. \quad R_A = 11,75 \text{ кН.}$$

$$H = M_C^{\text{бал}}/f = (R_A \cdot 12 - P \cdot 9)/6 = 8.5 \text{ кН.}$$

2. Строим эпюры $Q_x^{\text{бал}}$ и $M_x^{\text{бал}}$ (рис. 3. 7, б).

3. По формулам (3.2), (3.3), (3.4) вычисляем значения внутренних усилий, используя табличную форму.

$$M_k = M_k^{\text{бал}} - H \cdot y_k. \quad (3.2)$$

$$Q_k = Q_k^{\text{бал}} \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k \quad (3.3)$$

$$N_k = Q_k^{\text{бал}} \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k \quad (3.4)$$

В таблицу 2 заносим опорные точки А и В, точки приложения сосредоточенной силы, начала и конца распределенной нагрузки и узлы рамы m и n . В точках приложения сосредоточенных сил в узлах необходимо находить по два усилия (слева и справа от сечения), поскольку в точках приложения сосредоточенных сил скачкообразно меняется поперечная сила, а в узлах слева и справа различный угол наклона поперечного сечения.

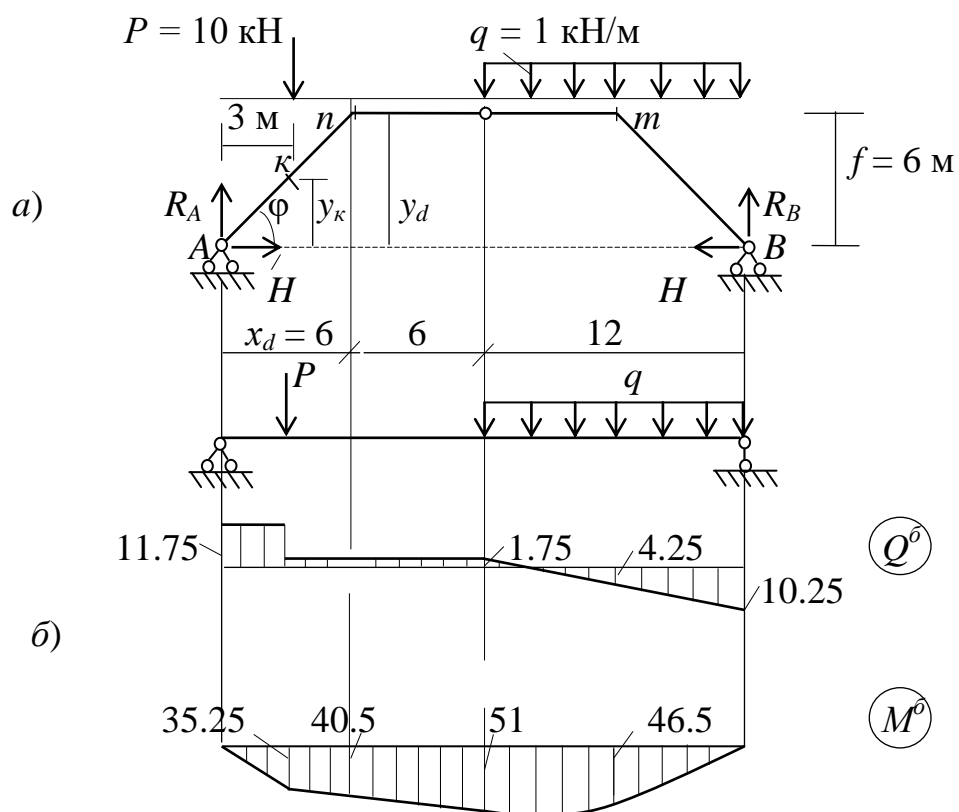


Рис. 3.7

Таблица 2.

№ сеч.	x (м)	y (м)	sin φ	cos φ	M^{ϕ}	H	M	Q^{ϕ}	Q^{ϕ} cosφ	H sinφ	Q	Q^{ϕ} sinφ	H cos φ	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	0	0	0.707	0.707	0	8.5	0	11.75	8.31	6.01	2.3	8.31	6.01	14.32
k(л)	3	3	0.707	0.707	31.25	8.5	5.7	11.75	8.31	6.01	2.3	8.31	6.01	14.32
k(пр)	3	3	0.707	0.707	31.25	8.5	5.7	1.75	1.24	6.01	-4.77	1.24	6.01	7.25
n(л)	6	6	0.707	0.707	40.5	8.5	-10.5	1.75	1.75	6.01	-4.77	1.24	6.01	7.25
n(пр)	6	6	0	1	40.5	8.5	-10.5	1.75	1.75	0	1.75	0	8.5	8.5
C	12	6	0	1	51	8.5	0	1.75	1.75	0	1.75	0	8.5	8.5
m(л)	18	6	0	1	46.5	8.5	-4.5	-4.25	-4.25	-3.33	-0.92	0	8.5	8.5
m(пр)	18	6	-0.707	0.707	46.5	8.5	-4.5	-4.25	-3.0	-6.01	3.01	3.0	6.01	9.01
B	24	0	-0.707	0.707	0	8.5	0	-10.2	-7.25	-6.01	-1.24	7.25	6.01	13.3

Используя данные 8, 12 и 15 столбцов таблицы 2 строим эпюры внутренних усилий в трехшарнирной раме (рис. 3.8).

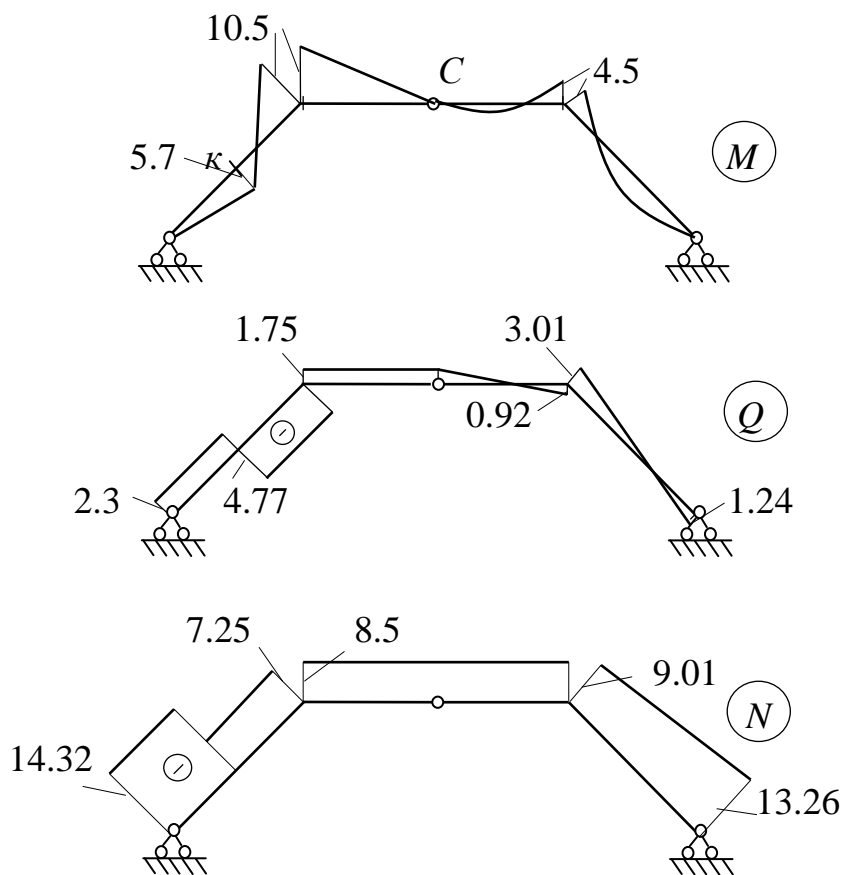


Рис. 3.8

3.2 Расчет арок на подвижную нагрузку

Линии влияния опорных реакций

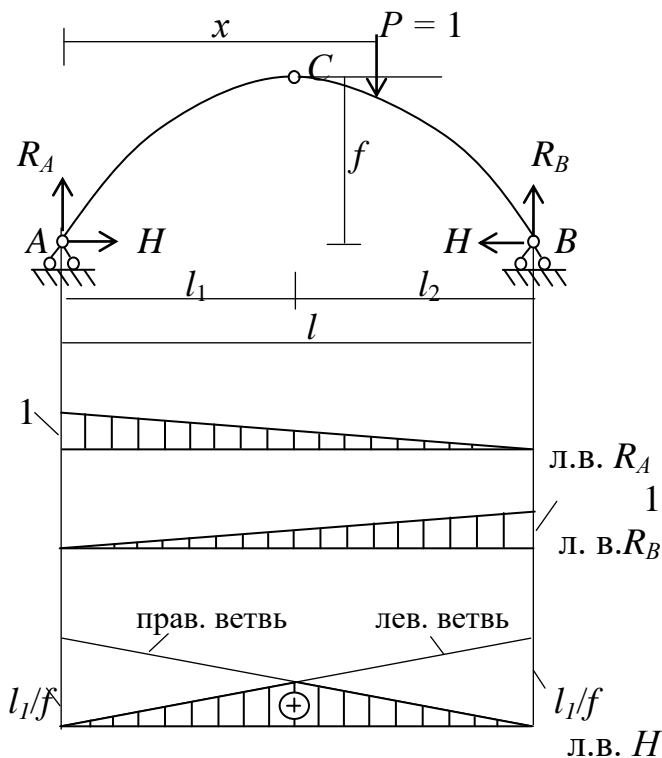


Рис. 3.8

Для определения вида линии влияния реакции R_A составим следующее уравнение равновесия $\Sigma m_B = 0$,

$$R_A \cdot l - P(l - x) = 0.$$

Тогда линия влияния левой реакции

$$\text{л. в. } R_A = \frac{l - x}{l}. \quad (3.6)$$

Выражение для линии влияния реакцию R_B определим из уравнения $\Sigma m_A = 0$,

$$R_B \cdot l - P \cdot x = 0.$$

В результате:

$$\text{л. в. } R_B = \frac{x}{l}. \quad (3.7)$$

Линии влияния реакций R_A и R_B показаны на рис. 3.8.

Отметим, что линии влияния вертикальных реакций в арке те же, что и в однопролетной балке и в ферме.

Поскольку выражение горизонтальной реакции (распора) связано со значением балочного изгибающего момента в точке С $H = \frac{M_C^0}{f}$, его линия влияния будет иметь две ветви.

Сила $P = 1$ справа от точки С. Рассмотрим равновесие левой части арки.

$$\Sigma m_C^l = 0, \quad R_A \cdot l_1 - H \cdot f = 0. \quad \text{Откуда}$$

$$\text{л. в. } H = \frac{l_1}{f} \text{ л. в. } R_A. \quad (3.8)$$

Получили уравнение правой ветви линии влияния H .

Аналогично получим уравнение левой ветви - сила $P = 1$ слева от точки C .
 $\sum m_C^{np} = 0$, $R_B \cdot l_2 - H \cdot f = 0$. Тогда

$$\text{л.в.} H = \frac{l_2}{f} \text{л.в.} R_B. \quad (3.8)'$$

Линия влияния H показана на рис. (3.8).

Построение линии влияния изгибающего момента

Воспользуемся выражением для изгибающего момента в арке

$$M_k = M_k^{\bar{0}} - H \cdot y_k.$$

Очевидно, что справедливо следующее утверждение

$$\text{л.в.} M_k = \text{л.в.} M_k^{\bar{0}} - (\text{л.в.} H) y_k,$$

то есть линию влияния момента в арке можно построить **методом наложения** двух линий влияния - $M_k^{\bar{0}}$ и $H \cdot y_k$. Поступаем следующим образом.

1. Вверх от оси строим линию влияния $M_k^{\bar{0}}$ (на рис. 3.9 показана сплошной линией).

2. На той же оси откладываем ординаты линии влияния H , умноженные на координату точки «к» y_k (пунктирная линия). Для этого достаточно построить левую ветвь линии влияния H , умножив ее ординаты на y_k , Правая ветвь будет представлена прямой, соединяющей конец левой ветви (проекция т. С) с нулевой точкой на правой опорной вертикали (проекция т. В).

3. В результате получаем разность ординат линий влияния $M_k^{\bar{0}}$ и $H \cdot y_k$ (заштрихованная область на рис. 3.9 и представляет собой линию влияния M_k).

Точка F' – нулевая точка линии влияния M_k .

Положение нулевой точки F' можно найти графическим построением на чертеже арки (графически). Нулевое значение M_k получается при положении единичной силы в интервале между сечением к и ключевым шарниром С. Так как единичная сила приложена к левому диску арка, линия действия правой ре-

акции B должна проходить через центр ключевого шарнира, поскольку $\sum m_C^{np} = 0$.

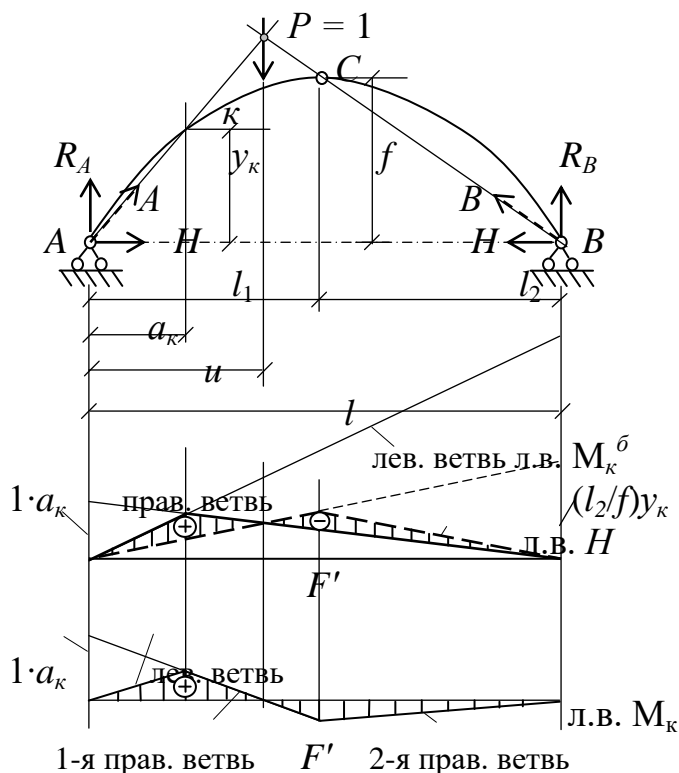


Рис. 3.9

Поскольку единичная сила правее сечения « k », то для выполнения условия, что $M_k = 0$, реакция A должна действовать по линии Ak . Проводим линии Ak и BC , под точкой пересечения которых и находится нулевая точка F' .

Для построения линии влияния M_k **способом нулевой точки** откладываем на левой опорной вертикали ординату $1 \cdot a_k$, далее соединяем ее с нулевой точкой F' - получаем 1-ю правую ветвь.

Проводя вертикаль через шарнир

C получаем границу 1-й и 2-й правых ветвей (то есть правая ветвь представляет собой ломаную линию).

Левую ветвь находим по 1-й правой ветви, соединяя ее начало с левой опорной точкой.

Ординату нулевой точки можно определить аналитически. Она равна (без вывода)

$$u = fl \frac{a_k}{y_k l_2 + f a_k}. \quad (3.9)$$

Построение линии влияния поперечной силы.

Воспользуемся выражением (3.3) для поперечной силы в арке

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k. \quad (3.3)$$

Поскольку для заданного сечения величины $\cos\varphi_K$ и $\sin\varphi_K$ постоянны, справедливо следующее утверждение

$$\text{Л.В. } Q_K = (\text{Л.В. } Q_K^{\bar{0}}) \cos\varphi_K - (\text{Л.В. } H) \sin\varphi_K.$$

То есть для построения линии влияния поперечной силы в арке можно воспользоваться методом наложения линий влияния $Q_K^{\bar{0}}$ и H , умноженных на значения соответствующих тригонометрических функций. Поступаем следующим образом (рис. 3.10).

1. Строим линию влияния $Q_K^{\bar{0}} \cos\varphi_K$ для сечения «к».
2. Вверх от оси откладываем ординаты линии влияния $H \sin\varphi_K$, которые получаем по левой ветви, ордината которой на правой опоре равна $(l_2/f) \sin\varphi_K$.
3. Отмечаем (штрихуем) ординаты, соответствующие выражению (3.3).

Отметим, что в пересечении левой ветви л. в. $H \sin\varphi_K$ с правой ветвью л. в. $Q_K^{\bar{0}} \cos\varphi_K$ находится нулевая точка F_1' , положение которой можно установить графически по чертежу арки. Действительно, если сила $P = 1$ находится между точками к и С, то слева от точки «к» будет действовать только реакция A и для

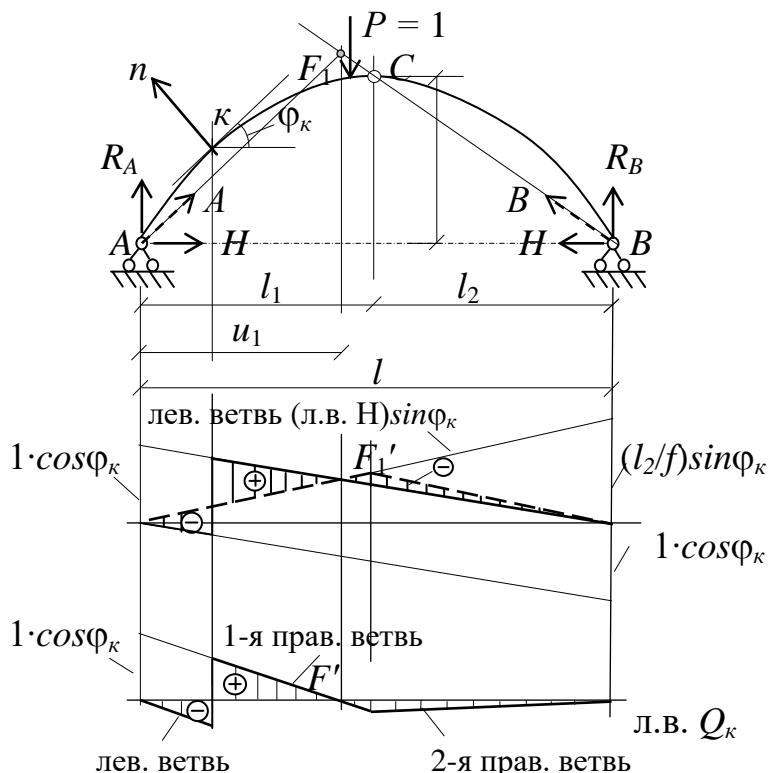


Рис. 3.10

того, чтобы в сечении «к» выполнялось условие $\sum n = 0$, реакция должна быть параллельна касательной к оси арки в сечении «к».

В то же время, линия действия реакции B будет направлена вдоль прямой BC . На пересечении этих прямых находится нулевая точка F_1 .

Для построения линии влияния поперечной силы в арке методом нулевой точки достаточно в сечении «к»

провести касательную к оси арки направить реакцию A по этой касательной до пересечения с прямой, соединяющей шарниры C и B и получить положение нулевой точки. Далее, отложить на левой опорной вертикали ординату $\cos\varphi_k$ и провести 1-ю правую ветвь через точку F_1' . Проводя вертикаль через шарнир C получаем границу 1-й и 2-й правых ветвей. Затем проводим левую ветвь, которая параллельна 1-й правой ветви (рис. 3.10).

Положение нулевой точки F_1 можно определить аналитически

$$u_1 = \frac{f \cdot l}{f + l_2 \operatorname{tg} \varphi_k}. \quad (3.10)$$

Построение линии влияния продольной силы.

По аналогии с построением линии влияния поперечной силы, для построения линии влияния продольной силы можно применить метод наложения и метод нулевой точки.

Для метода наложения необходимо воспользоваться выражением для продольной силы в арке

$$N_k = -Q_k^{\delta} \sin\varphi_k - H \cos\varphi_k, \quad (3.4)$$

тогда:

$$\text{л.в. } N_k = (\text{л.в. } Q_k^{\delta}) \sin\varphi_k + (\text{л.в. } H) \cos\varphi_k.$$

Здесь мы учли, что сжимающая сила в арке считается положительной.

Воспользуемся методом наложения (рис. 3.11).

1. Строим линию влияния $Q_k^{\delta} \sin\varphi_k$.
2. От оси вниз строим линию влияния $H \cos\varphi_k$ по левой ветви (пунктирная линия).
3. Складываем ординаты построенных линий влияния.

Если продолжить правую ветвь (л.в. $H \cos\varphi_k$) и левую ветвь (л.в. $Q_k^{\delta} \sin\varphi_k$) получим точку F_2' . Если предположить наличие консоли – ответвления от участка

арки κC , по которой перемещается единичная сила, то слева отсечения « κ » действует только реакция A . Если она направлена вдоль оси n , то $N_\kappa = 0$, т. е.

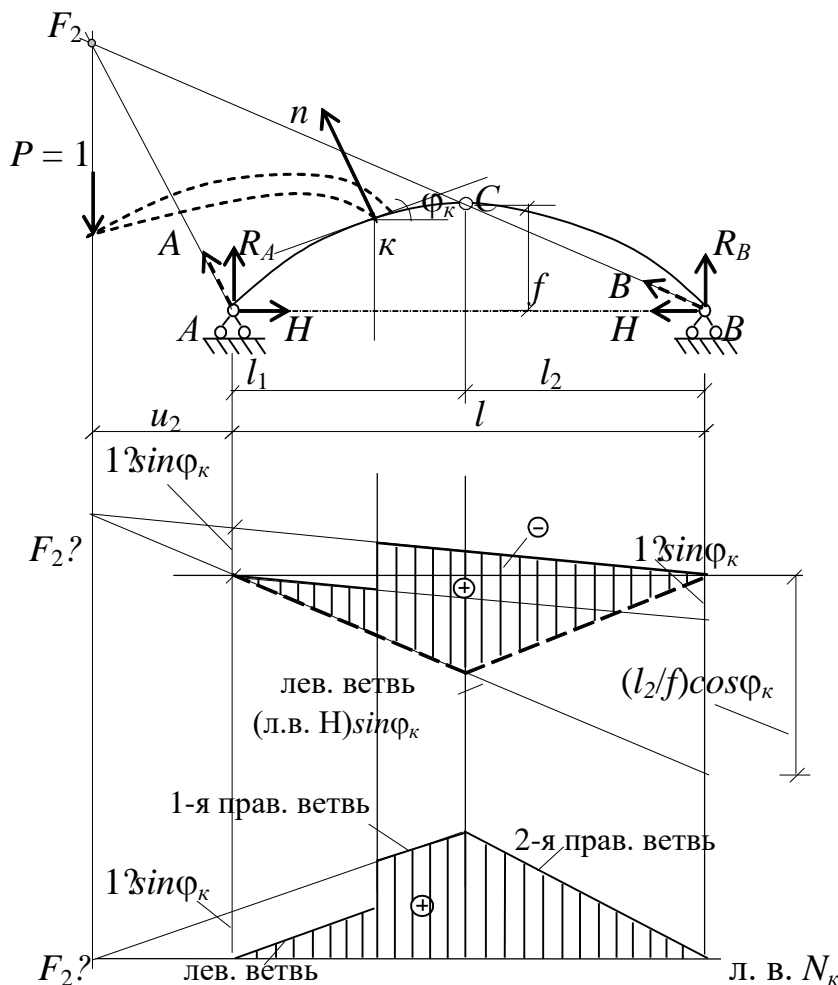


Рис. 3.11

нулевая точка находится на пересечении прямых BC и линии действия реакции A .

Для построения линии влияния N_κ методом нулевой точки достаточно найти положение т. F_2' , затем отложить от левой опоры ординату $\sin\varphi_\kappa$ и соединить полученные точки до координаты шарнира C – получим 1-ю правую ветвь. Далее строим 2-ю правую ветвь, проводя прямую от конца 1-й правой ветви до правой опоры. Левая ветвь параллельна 1-й правой ветви.

Координата нулевой точки равна

$$u_2 = \frac{f \cdot l}{l_2 \operatorname{ctg} \varphi_\kappa - f}. \quad (3.11)$$

Пример 3.3. Построить линии влияния опорных реакций и внутренних усилий в сечении «к» для арки параболического очертания. Размеры арки указаны на чертеже.

Решение. Построение линий влияния опорных реакций R_A , R_B и распора H однотипно для трехшарнирных систем, так как не зависит от очертания арки (рис. 3.12).

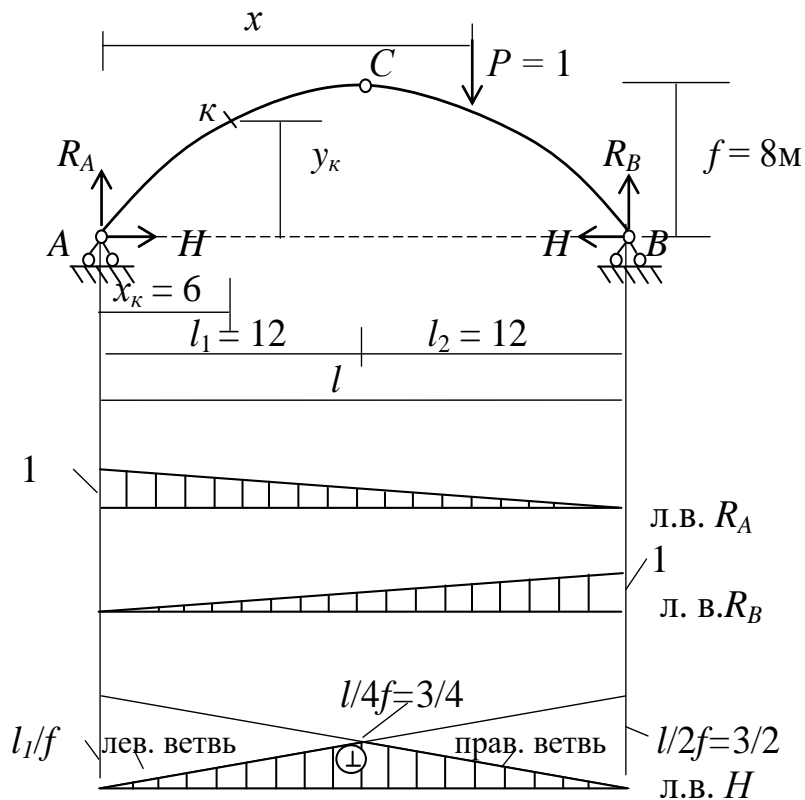


Рис. 3.12

Для построения линий влияния внутренних усилий вычислим координаты сечения «к» и тригонометрические функции угла φ_k .

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x = \frac{4 \cdot 8}{24 \cdot 24}x(24-x) = \frac{4}{24 \cdot 3}x(l-x).$$

$$y_k = y_k = \frac{4}{24 \cdot 3}6(24-6) = 6 \text{ м},$$

$$\varphi_k = 33,6^\circ, \sin \varphi_k = 0.554, \cos \varphi_k = 0.836.$$

Построение указанных линий влияния проведем *методом нулевой точки* (рис. 3.13).

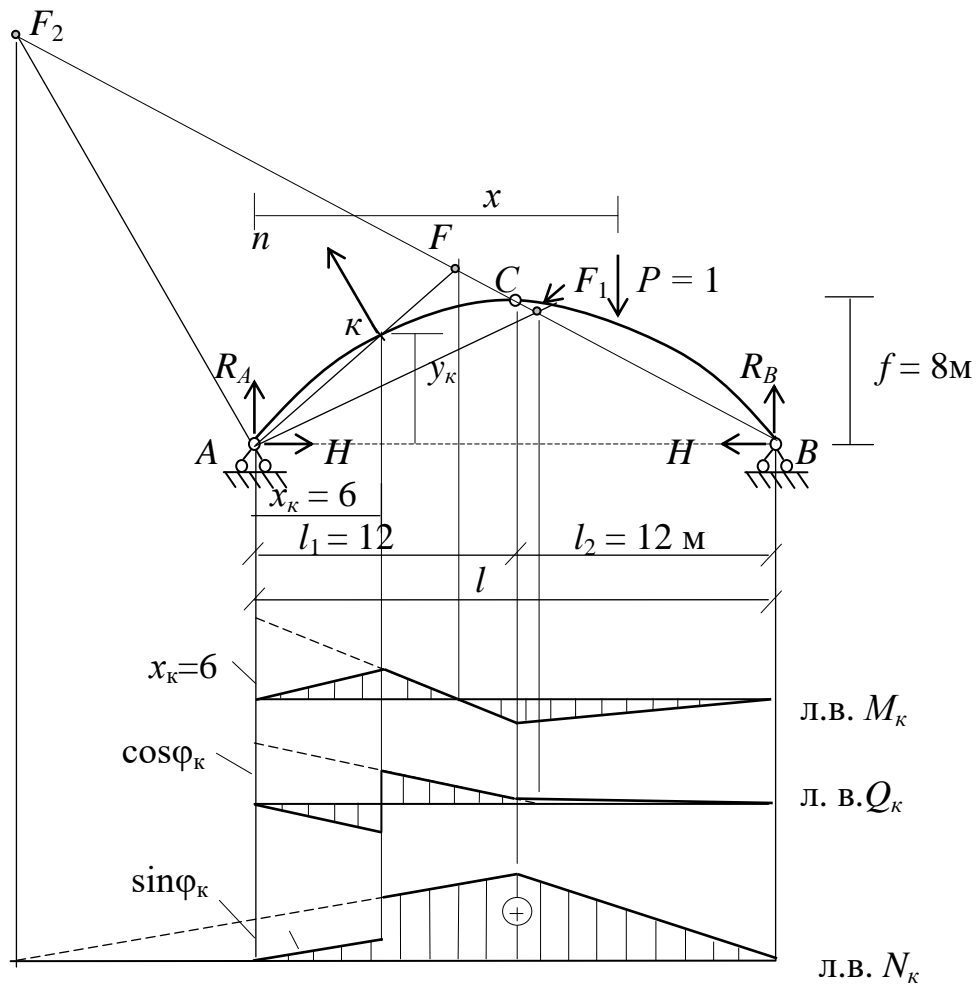


Рис. 3.13

Пример 3.4. Построить линии влияния внутренних усилий в сечениях «к» и «д» в трехшарнирной раме. Размеры рамы указаны на чертеже (рис. 3.14).

Решение. Для построения линий влияния внутренних усилий вычислим координаты сечений «к» и «д» и тригонометрические функции углов φ_k и φ_d .

$$x_k = 3 \text{ м}, \quad x_d = 6 \text{ м}.$$

$$\varphi_k = 45^\circ, \quad \sin \varphi_k = 0.707, \quad \cos \varphi_k = 0.707,.$$

$$\varphi_d = 0^\circ, \quad \sin \varphi_d = 0, \quad \cos \varphi_d = 1.$$

Построение указанных линий влияния проводим *методом нулевой точки* (рис. 3.14, 3.15).

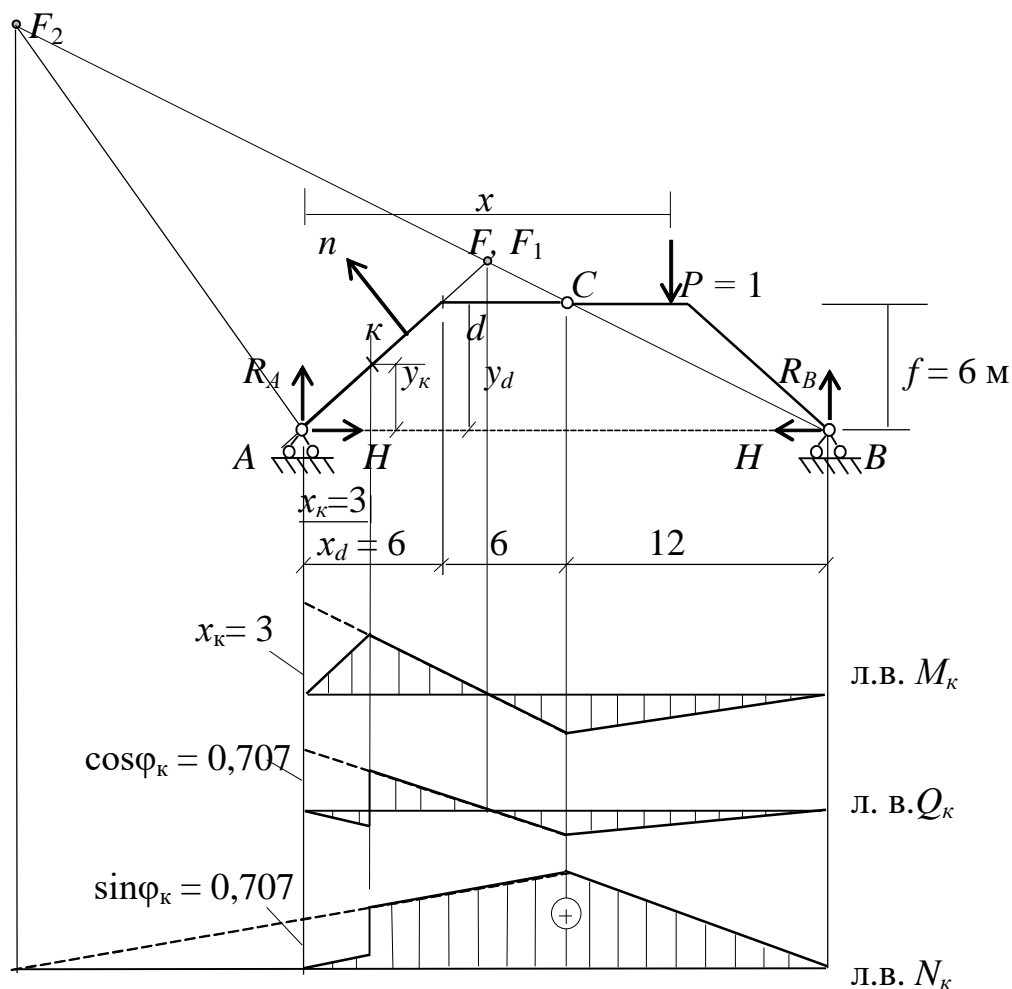


Рис. 3.14

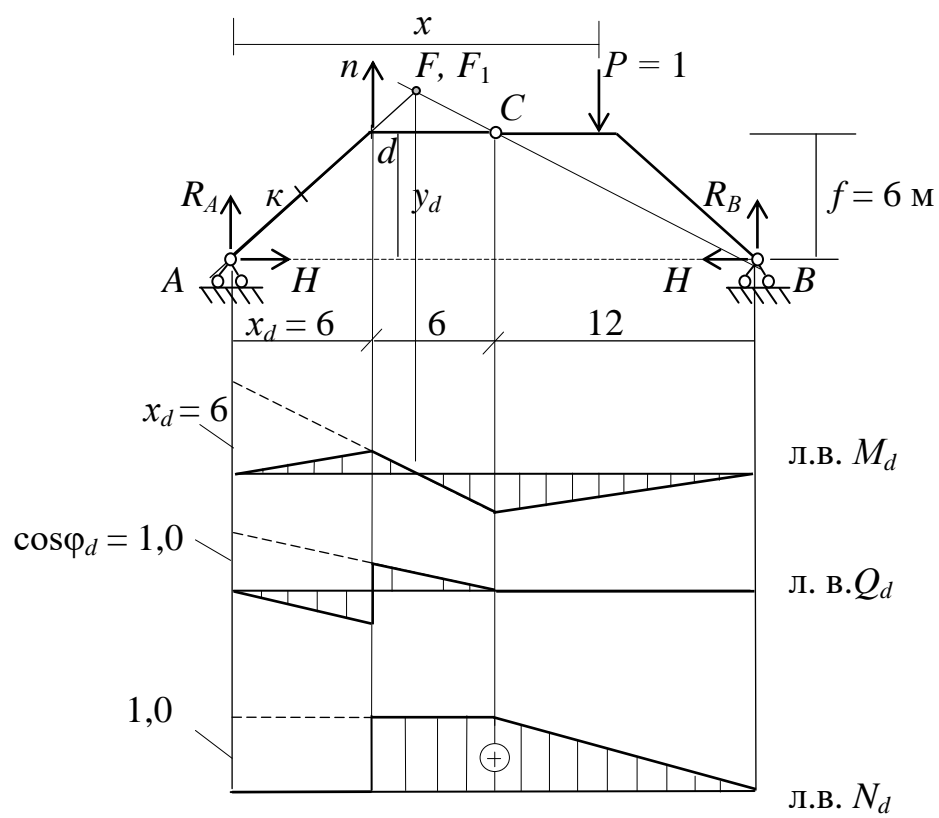


Рис. 3.15

4. Расчет на прочность и жесткость ломаных стержней

4.1 Построение эпюр внутренних усилий в раме.

Рамой называется ломаный стержень, состоящий стоек и ригелей, соединенных жесткими или шарнирными узлами (рис. 4.1).

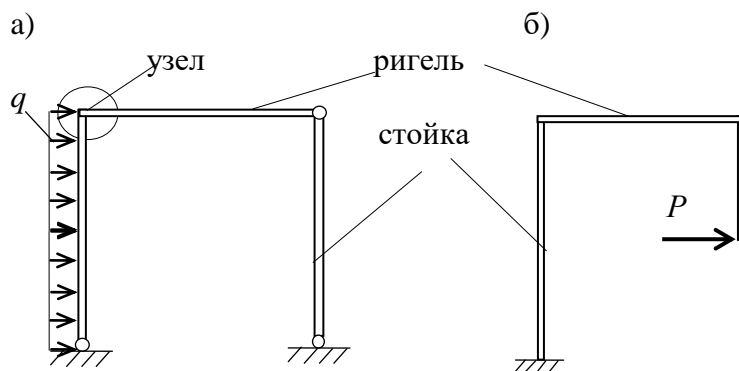


Рис. 4.1

В плоских рамах, в отличие от балок, возникают три внутренних усилия: M – изгибающий момент, Q – поперечная сила и N – продольная сила, которые определяются методом сечений. Напомним, что изгибающий момент в сечении равен сумме моментов всех сил, приложенных к оставшейся части, относительно центра тяжести рассматриваемого сечения. Поперечная сила равна сумме проекций тех же сил на поперечную ось стержня, а продольная сила равна сумме проекций этих же сил на продольную ось стержня.

Порядок построения эпюр:

1. Определяются опорные реакции (для консольных стержней (рис. 4.1,б) можно обойтись без определения реакций).
2. Рама разбивается на участки. Границами участков служат точки приложения сосредоточенных сил или моментов, начало и конец распределенной нагрузки, узлы рамы.
3. Для каждого участка записываются выражения для внутренних усилий, производится вычисление этих усилий в пределах участка.
4. Выбирается масштаб эпюр таким образом, чтобы наибольшая ордината не превышала $1/3 \div 1/4$ габарита рамы, и строятся эпюры M , Q , N . Эпюры Q , N строятся в одном масштабе.

5. Делается проверка построенных эпюр на соответствие приложенной нагрузки и по равновесию узлов рамы, рамы в целом.

Пример 4.1 Построить эпюры внутренних усилий в трехшарнирной раме (рис. 4.2).

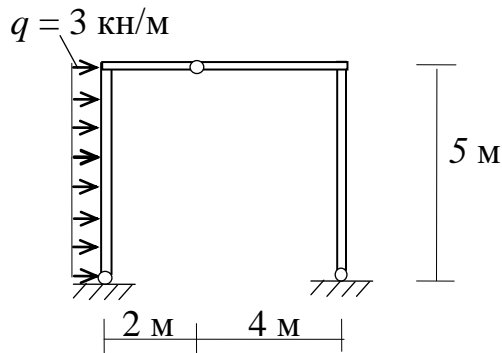


Рис. 4.2

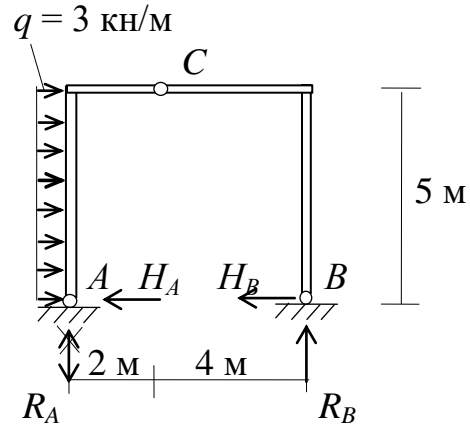


Рис. 4.3

1. Обозначим в соответствии с видом опор опорные реакции (рис. 4.3) и определяем их значение, используя уравнения равновесия.

$$\Sigma m_A = 0, \quad -q \cdot 5 \cdot 2.5 + R_B \cdot 6 = 0. \quad R_B = 6.25 \text{ кН.}$$

$\Sigma m_B = 0, \quad -q \cdot 5 \cdot 2.5 - R_A \cdot 6 = 0. \quad R_A = -6.25 \text{ кН.}$ Меняем направление реакции R_A и считаем ее положительной ($R_A = 6,25 \text{ кН}$) и направленной в низ.

Учитывая, что в шарнире C изгибающий момент отсутствует, можно записать:

$$\Sigma m_C^{np} = 0. \quad R_B \cdot 4 - H_B \cdot 5 = 0, \quad H_B = 5 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_C^{лев} = 0. \quad R_A \cdot 2 + q \cdot 5 \cdot 2.5 - H_A \cdot 5 = 0, \quad H_A = 10 \text{ кН.}$$

Проверка.

$$\Sigma x = 0. \quad q \cdot 5 - H_A - H_B = 0.$$

$$\Sigma y = 0. \quad -R_A + R_B = 0.$$

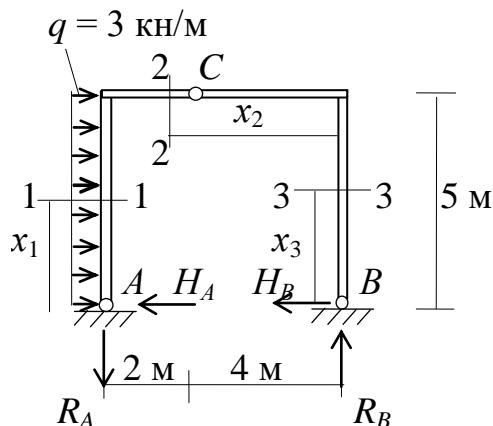


Рис. 4.4

2. Обозначаем участки (рис. 4.4). В качестве «оставшейся части» оставляем ту часть рамы, к которой приложено меньше усилий.

Правила знаков, применяемые при построении эпюр внутренних усилий:

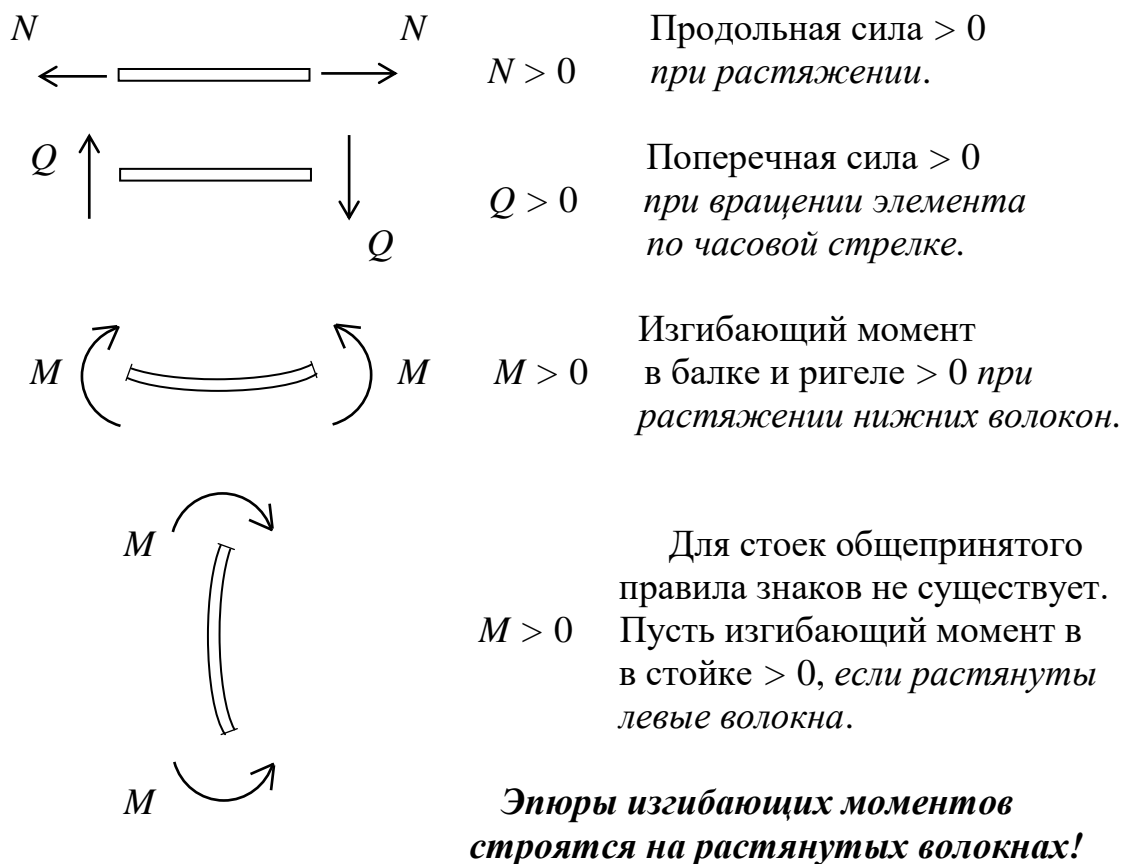


Рис. 4 5

3. Записываем выражения для внутренних усилий.

1-й участок, $0 < x_1 < 5$ м.

$$N_1 = R_A = 6.25 \text{ кН.}$$

$$Q_1 = H_A - q \cdot x_1, \quad Q_{x=0} = H_A = 10 \text{ кН}, \quad Q_{x=5} = H_A = 10 - 3 \cdot 5 = -5 \text{ кН.}$$

$M_1 = -H_A \cdot x_1 + q \cdot x_1 \cdot x_1 / 2$. Получили уравнение квадратной параболы. Для ее построения необходимо вычислить три значения момента.

$$M_{x=0} = 0, \quad M_{x=5} = -10 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 / 2 = -12.5 \text{ кНм,}$$

$$M_{x=2.5} = -10 \cdot 2.5 + 3 \cdot (2.5)^2 / 2 = -15.6 \text{ кНм.}$$

2-й участок, $0 < x_2 < 6$ м.

$$N_1 = -H_B = -5 \text{ кН.}$$

$$Q_1 = -R_B = -6.25 \text{ кН.}$$

$$M_1 = -H_B \cdot 5 + R_B \cdot x_2. \quad M_{x=0} = -25 \text{ кНм}, \quad M_{x=6} = -25 + 6.25 \cdot 6 = 12.5 \text{ кНм,}$$

2-й участок, $0 < x_3 < 5$ м.

$$N_1 = -R_B = -6.25 \text{ кН.}$$

$$Q_1 = H_B = 5 \text{ кН.}$$

$$M_1 = -H_B \cdot x_3. \quad M_{x=0} = 0, \quad M_{x=5} = -25 \text{ кНм,}$$

4. Строим эпюры (рис. 4.6)

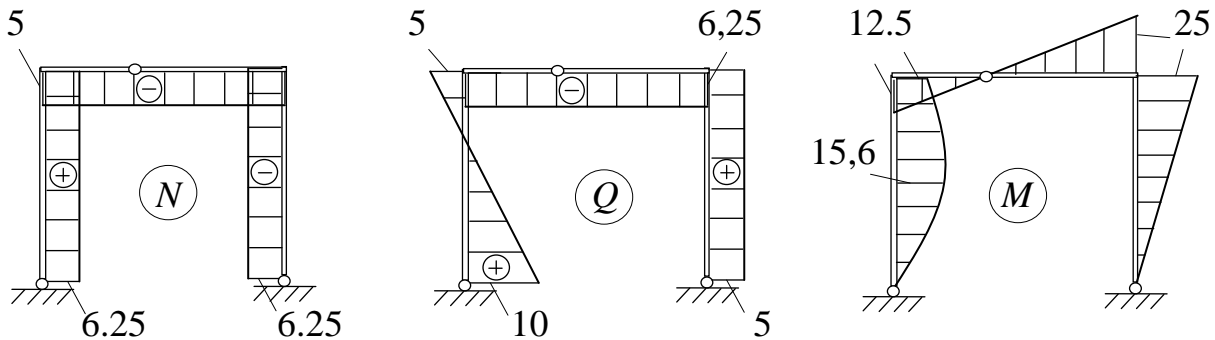


Рис. 4.6

5. Проверяем равновесие узлов. Вырежем поочередно узлы рамы с действующими в их элементах внутренними усилиями, и запишем для них уравнения равновесия (рис. 4.7). При проверке моментов пунктиром отмечены растянутые волокна.

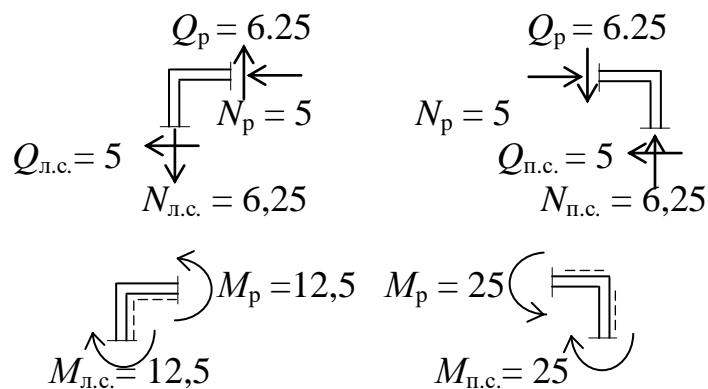


Рис. 4.6

На рисунке 4.7 видно, что все уравнения равновесия ($\Sigma x = 0$, $\Sigma y = 0$, $\Sigma m = 0$) для узлов выполняются.

Осуществим проверку равновесия рамы в целом (рис. 4.8). Для этого восстановим значения реакций, используя эпюры внутренних усилий.

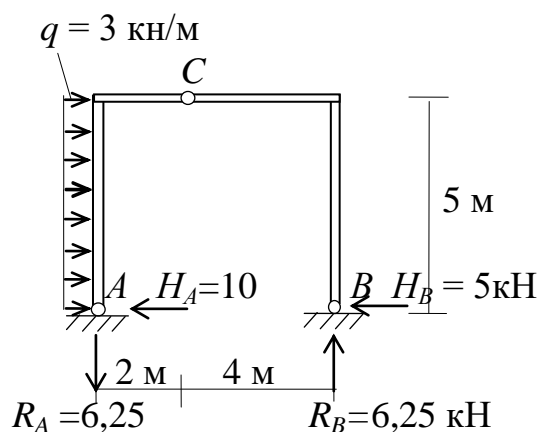


Рис. 4.8

В точке A вертикальная реакция будет направлена вниз, поскольку левая стойка растянута, а правая реакция (т. B) направлена вверх, т. к. правая стойка сжата.

Обе горизонтальные реакции в опорах A и B будут направлены влево, поскольку по знаку эпюры Q (знак «+») они должны вращать элемент по часовой стрелке.

Записываем уравнения равновесия:

$$\Sigma x = 0. \quad q \cdot 5 - H_A - H_B = 3 \cdot 5 - 10 - 5 = 0.$$

$$\Sigma y = 0. \quad -R_A + R_B = -6,25 + 6,25 = 0.$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_A = 0, & \quad -q \cdot 5 \cdot 2,5 + R_B \cdot 6 = 3 \cdot 5 \cdot 2,5 - 6,25 \cdot 6 = \\ & = -37,5 + 37,5 = 0. \end{aligned}$$

4.2 Определение перемещений в стержневых системах методом Мора

Это универсальный метод, который заключается в использовании известной теоремы Мора о равенстве возможной работы внешних и внутренних сил и используется для определения линейных перемещений и углов поворота в любой стержневой системе от произвольной нагрузки. Метод широко применяется и при расчете статически неопределимых систем.

Пусть 1-е (грузовое) состояние представляет собой нагруженную стержневую систему заданной нагрузкой, а 2-е (единичное) состояние вызвано единичной нагрузкой $P = 1$, действующей в направлении искомого перемещения. Тогда в соответствии с указанной выше теоремой получаем выражение, которое называют интегралом Мора (13)

$$1 \cdot \Delta = \sum \int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{N_p N_1}{EA} dx + \sum \mu \int_0^l \frac{Q_p Q_1}{GA} dx, \quad (4.1)$$

где: Δ — искомое перемещение; M_p, Q_p, N_p — внутренние усилия в стержневой системе, вызванные заданной внешней нагрузкой; M_1, Q_1, N_1 — внутренние усилия в стержневой системе, вызванные единичной нагрузкой, приложенной по направлению искомого перемещения в той точке (сечении), где определяется перемещение (при нахождении линейного перемещения прикладывается единичная сила $P = 1$, при вычислении угла поворота прикладывается единичный момент $m = 1$); EI, EA, GA — жесткости при изгибе, растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно; μ — поправочный коэффициент, учитывающий распределение касательных напряжений в поперечном сечении; l — длина участка.

Суммирование производится по всем участкам стержневой конструкции.

При расчете балок средней и большой длины и рамных конструкций влиянием продольной и поперечной сил (вторым и третьим членами формулы (4,1)) можно пренебречь в силу их малого влияния на деформации изгиба. В этом случае интеграл Мора примет вид:

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} dx \quad (4.2)$$

При расчете стержней, работающих только на растяжение (сжатие), и ферм в (4,1) останется только второй интеграл.

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{N_p N_1}{EA} dx \quad (4.3)$$

В конструкциях, испытывающих значительные поперечные силы (например, в коротких балках), необходимо учитывать влияние поперечных сил.

Пример 4.2. Вычислить прогиб и угол поворота свободного конца консоли (т. В) (рис. 4.9) от действия распределенной нагрузки.

Решение. 1. В данной задаче один участок. Запишем для него выражение изгибающего момента в грузовом состоянии (рис. 4.9, а):

$$M_p = -\frac{qx_1^2}{2}.$$

2. Для вычисления прогиба свободного конца (т. В) прикладываем в этой точке единичную силу $P = 1$, т. е. создаем 1-е единичное состояние (рис. 4.9, б) и записываем выражение для единичного момента

$$M_1 = -1 \cdot x_1.$$

3. Записываем и вычисляем интеграл Мора, используя выражение (4.2):

$$\Delta = y_B = \int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} dx = \int_0^l \frac{\left(-qx_1^2/2\right)(-1 \cdot x_1)}{EI} dx = \frac{qx^4}{8EI} \Big|_0^l = \frac{ql^4}{8EI}.$$

Знак «+» у Δ говорит о том, что перемещение происходит по направлению единичной силы $P=1$.

4. Для вычисления угла поворота прикладываем в заданном сечении (т. В) единичный момент (рис. 4.9, в) и записываем выражение для единичного момента M_2 на данном участке:

$$M_2 = m = 1.$$

5. Вычисляем интеграл Мора при 2-м единичном нагружении:

$$\Delta = \varphi_B = \int_0^l \frac{M_p M_2}{EI} dx = \int_0^l \frac{\left(-qx_1^2/2\right) \cdot 1}{EI} dx = -\frac{qx^3}{6EI} = -\frac{ql^3}{6EI}.$$

Знак «минус» говорит о том, что перемещение (поворот сечения С) происходит против направления единичного момента $m = 1$, т. е. по часовой стрелке.

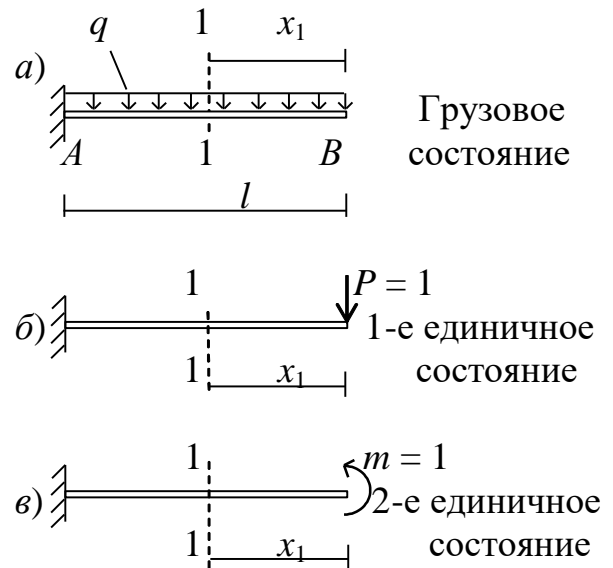


Рис. 4.9

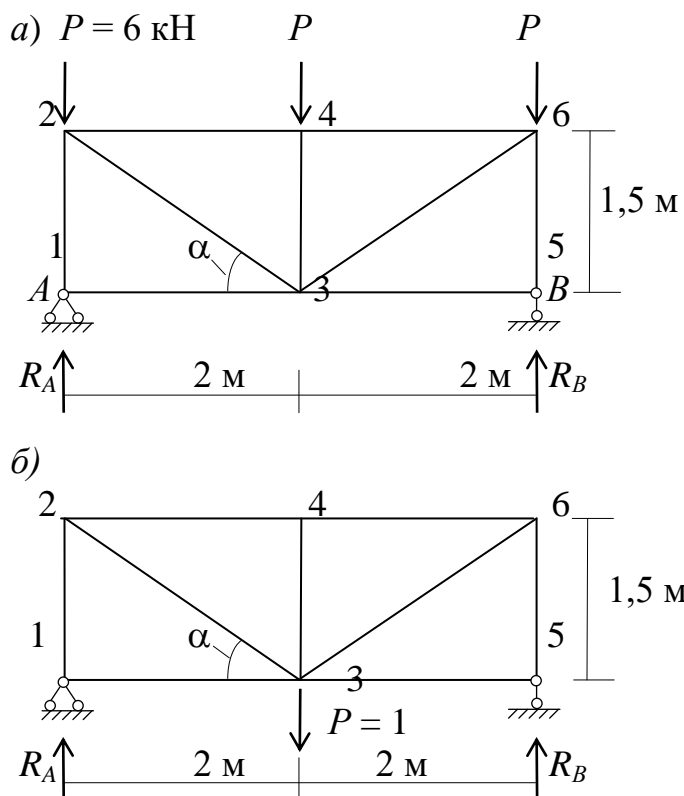


Рис. 4.10

Пример 4.3. Определить

вертикальное перемещение 3 узла фермы от заданной нагрузки (рис. 4.10). Жесткость стержней $EA = const$.

Решение. Для определения перемещений в данной стержневой системе необходимо воспользоваться формулой Мора в виде:

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{N_p N_1}{EA} dx \quad (5.3)$$

1. Определяем усилия в стержнях фермы N_p от заданной нагрузки. (рис. 4.10,a). Вначале определим реакции.

В силу симметрии:

$$R_A = R_B = 1.5 P = 9 \text{ кН.}$$

Вырезая узел 1 и узел 5 можно увидеть, что

$$N_{12} = N_{56} = -1.5 P = -9 \text{ кН,}$$

$$N_{13} = N_{35} = 0.$$

Вырезая узел 4 получим $N_{34} = P$.

Далее, вырежем узел 2 (рис. 5.3).

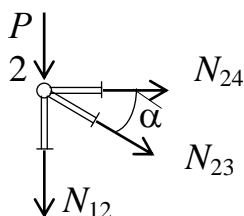


Рис. 4.11

$$(\sin \alpha = 0.6, \cos \alpha = 0.8)$$

$$\sum y = 0,$$

$$-P - N_{12} - N_{23} \sin \alpha = 0.$$

$$N_{23} = \frac{-P - 1.5P}{\sin \alpha} = 5 \text{ кН} \quad \sum x = 0$$

$$N_{24} + N_{23} \cos \alpha = 0. \quad N_{24} = -5 \cdot 0.8 = -4 \text{ кН.}$$

В силу симметрии $N_{36} = N_{23} = 5 \text{ кН}$, $N_{46} = N_{24} = -4 \text{ кН}$.

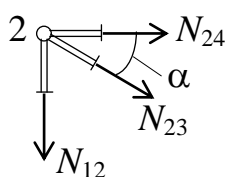
2. Определяем усилия в стержнях фермы \bar{N}_i от единичной нагрузки, действующей в направлении искомого перемещения (рис 4.10,б). Определяем реакции.

$$R_A = R_B = 0.5 \quad P = 0.5.$$

Вырезая узел 1 и узел 5 получим

$$N_{12} = N_{56} = 0.5, \quad N_{13} = N_{35} = 0.$$

Вырезая узел 4 получим $N_{34} = 0$.



Рассмотрим равновесие узла 2 (рис. 5.4).

$$\Sigma y = 0, \quad -N_{12} - N_{23} \sin \alpha = 0.$$

$$N_{23} = \frac{-0.5}{\sin \alpha} = -\frac{5}{6}, \quad \Sigma x = 0, \quad N_{24} + N_{23} \cos \alpha = 0.$$

Рис. 4.12

$$N_{24} = -\frac{5}{6} \cdot 0.8 = -\frac{4}{6}.$$

В силу симметрии $N_{36} = N_{23} = 5$ кН, $N_{46} = N_{24} = -4$ кН.

Для вычисления по формуле (4.3) удобно полученные значения усилий свести в таблицу.

№ стержня	N_p (кН)	\bar{N}_i	l_i	$N_p \cdot \bar{N}_i \cdot l_i$
1-2	- 9	- 0,5	1.5	6,75
1-3	0	0	2	0
2-3	5	5/6	2.5	10.42
2-4	- 4	- 4/6	2	5.33
3-4	- 6	0	1.5	0
3-5	0	0	2	0
3-6	5	5/6	2.5	10.42
4-6	- 4	- 4/6	2	5.33
5-6	- 9	- 0,5	1.5	6,75
Σ				45.01

Таким образом, узел 3 опускается вниз на величину $\Delta_3 = 45.01/Ea$.

Обычно, в зависимости от нагрузки и условий опирания, стержневую систему приходится разбивать на несколько участков, и интегрирование по формуле (4.2) необходимо проводить на каждом участке, что становится весьма трудоемким. В этом случае удобно использовать **правило Верещагина** для вычисления интеграла Мора (4.4).

$$\frac{1}{EI} \int_0^l M_p M_1 dx = \frac{1}{EI} \omega_p y_c. \quad (4,4)$$

Оно заключается в следующем: если построить грузовую и единичную эпюры M_p и M_1 (рис. 4,13), то результат их «перемножения» (вычисления интеграла) на отдельном участке равен произведению площади грузовой эпюры ω_p на ординату единичной эпюры y_c , взятую под центром тяжести площади грузовой эпюры. При выводе этой формулы было учтено, что единичная эпюра всегда линейна.

Действительно, при $EI = \text{const}$ интеграл S можно представить как (рис. 4.13)

$$S = \int_0^l M_p M_1 dx = \int_0^l y_1 y_2 dx.$$

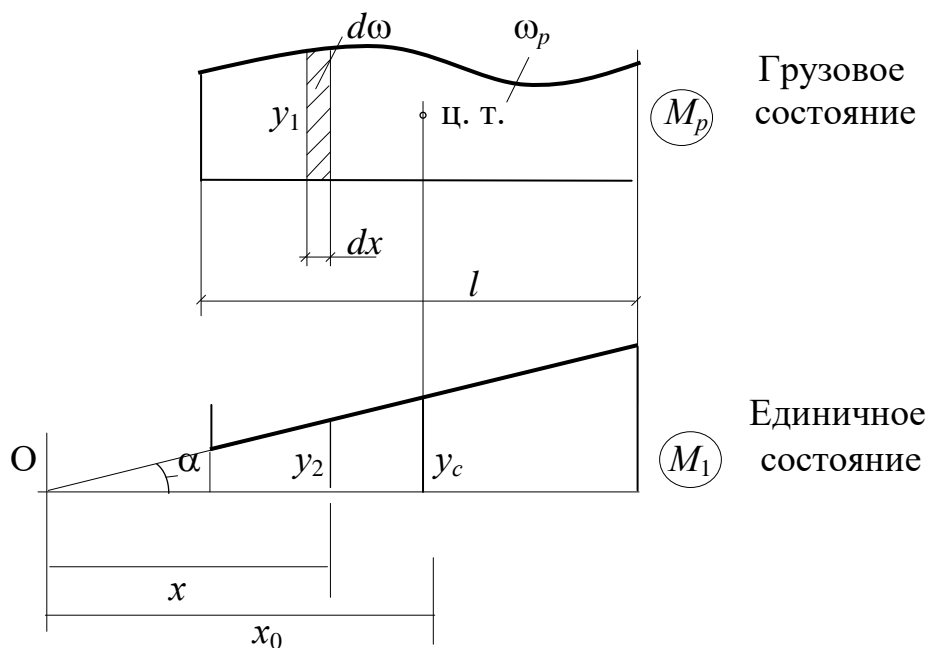


Рис. 4.13

Ординату y_2 можно выразить через абсциссу x : $y_2 = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$,

тогда

$$S = \int_0^l \operatorname{tg} \alpha \cdot x(y_1 dx) \dots$$

Учитывая, что $y_1 dx = d\omega$, можно записать

$$S = \operatorname{tg} \int_0^l x d\omega.$$

Интеграл $\int_0^l x d\omega$ - статический момент площади эпюры M_p относительно

точки О и равен площади этой эпюры, умноженной на координату x_0 , т. е.

$S = \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega_p \cdot x_0$. В свою очередь, $x_0 \operatorname{tg} \alpha = y_c$. Следовательно, интеграл S равен

$$S = \omega \cdot y_c$$

Рассмотренное выше правило перемножения эпюр было дано **А. Верецагиным** в 1925 г.

В том случае, когда обе эпюры прямолинейны (рис. 4.14) формулу (4.2) можно представить в виде

$$\frac{1}{EI} \int_0^l M_p M_1 dx = \frac{l}{6EI} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (4.5)$$

Формула (4.5) получена еще в 1905 г. **Мюллером-Бреслау**.

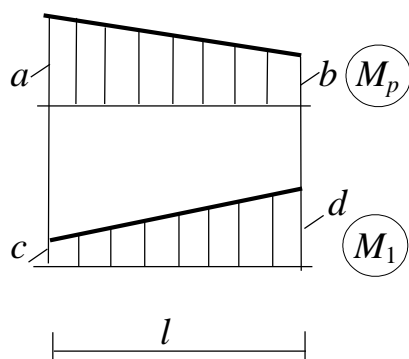


Рис. 4.14

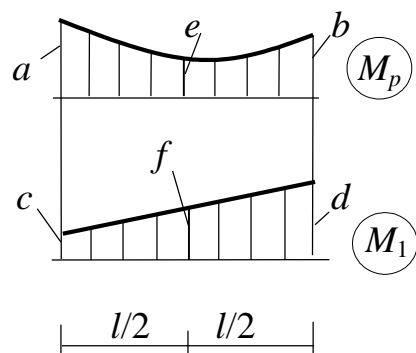


Рис. 4.15

В тех случаях, когда определение положения центра тяжести и площади грузовой эпюры приводит к громоздким вычислениям, проще для «перемножения» эпюр воспользоваться **формулой Симпсона** (4.6):

$$\frac{1}{EI} \int_0^l M_p M_1 dx = \frac{l}{6EI} (ac + 4ef + bd), \quad (4.6)$$

здесь a, b, c, d — ординаты на грузовой и единичной эпюрах в начале и конце участка длиной l (рис. 4,15); e, f — ординаты в середине участка.

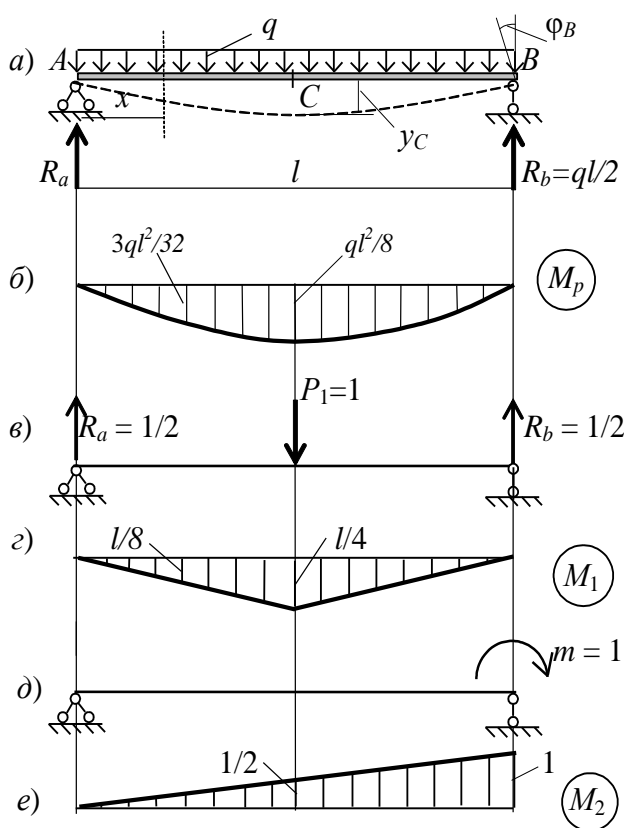


Рис. 4.16

Пример 4.4 Для заданной балки (рис. 4.16,а) вычислить прогиб в сечении C и угол поворота сечения B . При определении деформаций воспользоваться методом Мора.

Решение. Для вычисления заданных деформаций необходимо построить эпюры изгибающих моментов в грузовом M_p и единичных M_1 и M_2 состояниях.

1. Грузовое состояние. Запишем выражение для M_p

$$M = R_a x - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}.$$

$$M_{x=0} = 0, \quad M_{x=l/2} = \frac{ql^2}{8}, \quad M_{x=l/4} = \frac{3ql^2}{32}.$$

Эпюра M_p показана на рис. 4.16, б.

2. Создаем 1-е единичное состояние - прикладываем в сечении C единичную силу (рис. 4.16,в) и строим первую единичную эпюру M_1 (рис. 4.16,г).

3. Для определения прогиба в сечении C перемножаем эпюры M_p и M_1 по правилу Симпсона (4,6). Поскольку единичная эпюра имеет два участка перемножение эпюр производим на каждом участке (в силу симметрии эпюр результат умножаем на 2).

$$y_C = \frac{M_p M_1}{EI} = \frac{l/2}{6} \left(0 + 4 \frac{3ql^2}{32} \frac{l}{8} + \frac{ql^2}{8} \frac{l}{4} \right) \cdot 2 = \frac{5ql^4}{384EI}.$$

4. Создаем 2-е единичное состояние - прикладываем в сечении B единичный момент (рис. 4.16,д) и строим вторую единичную эпюру M_2 (рис. 4.16,е).

5. Перемножаем эпюры M_p и M_2

$$\varphi_B = \frac{M_p M_2}{EI} = -\frac{l}{6} \left(0 + 4 \frac{ql^2}{8} \frac{1}{2} + 0 \right) = -\frac{ql^3}{24EI}.$$

При перемножении поставлен знак минус, поскольку ординаты грузовой и второй единичной эпюр отложены в разные стороны. Минус у перемещения означает, что поворот сечения B происходит в направлении, обратном направлению единичного момента, т. е. против часовой стрелки.

Пример 4.5 Для заданной балки (рис. 4.17,а) вычислить прогибы в сечениях C и D , показать вид изогнутой линии. При определении деформаций воспользоваться методом Мора.

Решение. Для определения деформаций в заданных сечениях необходимо построить грузовую эпюру M от заданной нагрузки P и q , а также единичные эпюры M_i , полученные от воздействия на балку соответствующих единичных нагрузок P_i .

Не останавливаясь на порядке построения грузовых эпюр M и Q , покажем их в окончательном виде (рис. 4.17,б). Для построения единичных эпюр создаем единичные состояния (заданная балка нагружается только соответствующей единичной силой, приложенной в том сечении, в котором определяется перемещение). В соответствии с правилами строим эпюры M_1 от силы $P_1=1$, приложенной в точке C , и M_2 от силы $P_2=1$, приложенной в точке D . На рисунке еди-

нические состояния и соответствующие единичные эпюры совмещены (рис. 4.17, в и з).

Перемножение эпюр производим по правилу Симпсона:

$$y_c = \frac{1}{EI} \left[\frac{4}{6} (0 \cdot 10 - 4 \cdot 1.5 \cdot 1 + 3 \cdot 2) + \frac{4}{6} (3 \cdot 2 + 4 \cdot 3.5 \cdot 1 + 0) \right] = \frac{80}{6EI}.$$

При вычислении y_d перемножение эпюр на участке DA производим по правилу Верещагина (4.4), на участке AB — по формуле Симпсона (4.6).

$$y_d = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 10 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 2 + \frac{8}{6} (10 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 + 0) \right] = \frac{144}{6EI}.$$

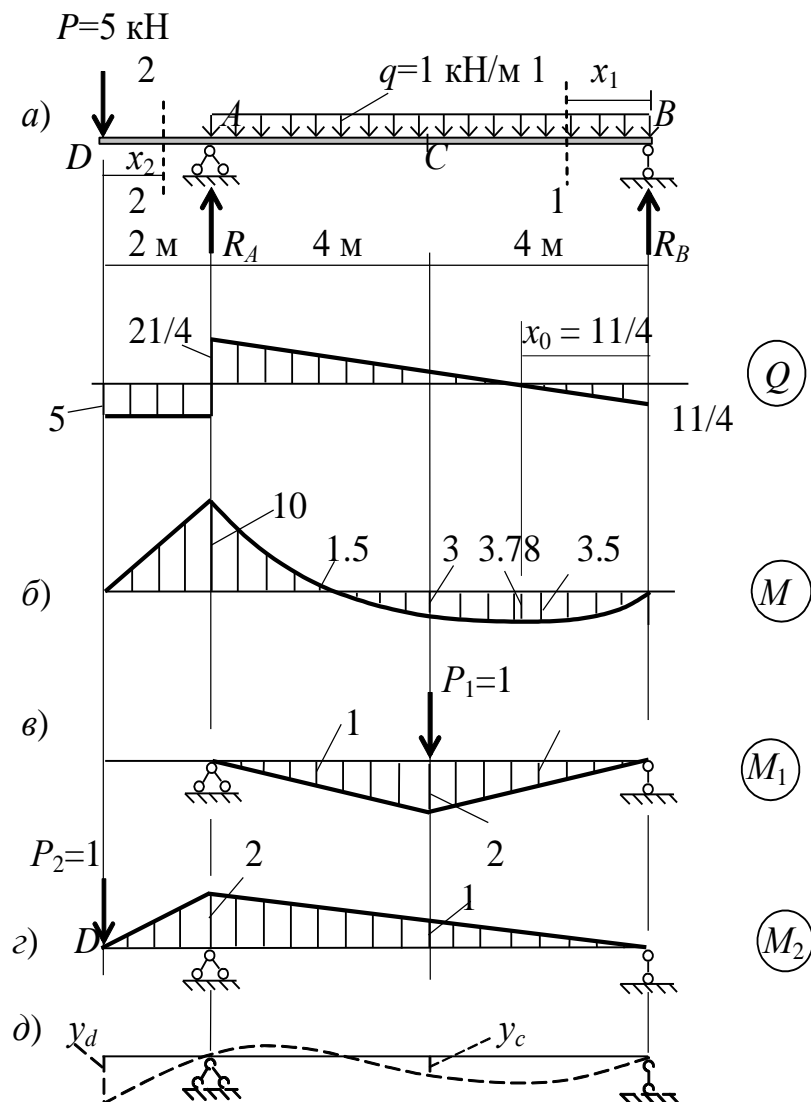


Рис. 4.17

На рисунке рис. 4.17,д показана изогнутая ось балки, соответствующая вычисленным перемещениям и эпюре M_p .

Пример 4.6 Вычислить горизонтальное перемещение узла D в трехшарнирной раме постоянной жесткости (рис. 4.18,а). Воспользуемся методом Мора.

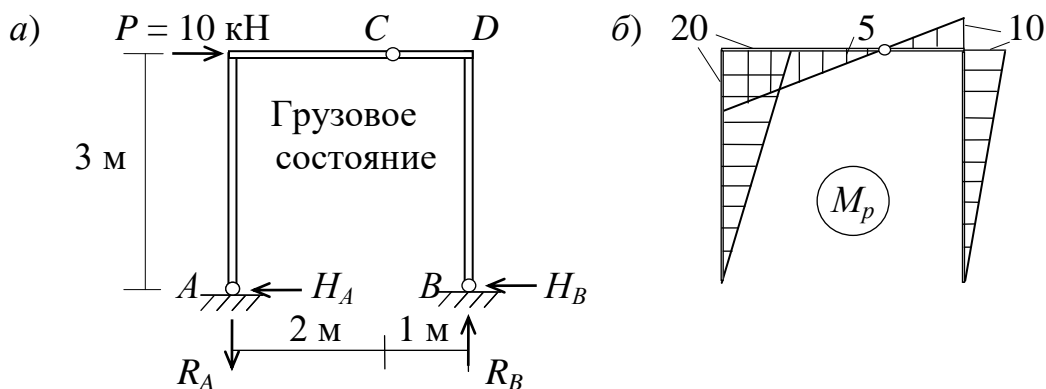


Рис. 4.18

Решение. 1. Строим грузовую эпюру M_p для грузового состояния (рис. 4.18,б). Вначале необходимо определить опорные реакции, для чего записываем соответствующие уравнения равновесия.

$$\Sigma m_A = 0, \quad -P \cdot 3 + R_B \cdot 3 = 0, \quad R_B = 10 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_C^{\text{пр}} = 0, \quad -H_B \cdot 3 + R_B \cdot 1 = 0, \quad H_B = 10/3 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_B = 0, \quad -P \cdot 3 + R_A \cdot 3 = 0, \quad R_A = 10 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_C^{\text{лев}} = 0, \quad -H_A \cdot 3 + R_A \cdot 2 = 0, \quad H_A = 20/3 \text{ кН.}$$

Проверка: $\Sigma x = 0$.

При построении эпюры M_p используем методику построения эпюр в ломаном стержне

2. Строим единичную эпюру моментов M_1 от действия горизонтальной единичной силы, приложенной в узле D (рис. 4.19,а).

$$\Sigma m_A = 0, \quad -P \cdot 3 + R_B \cdot 3 = 0, \quad R_B = 1.$$

$$\Sigma m_C^{\text{пр}} = 0, \quad -H_B \cdot 3 + R_B \cdot 1 = 0, \quad H_B = 1/3 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_B = 0, \quad -P \cdot 3 + R_A \cdot 3 = 0, \quad R_A = 1 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m_C^{\text{лев}} = 0, \quad -H_A \cdot 3 + R_A \cdot 2 = 0, \quad H_A = 2/3 \text{ кН.}$$

Эпюра M_1 показана на рис. 5.11,б.

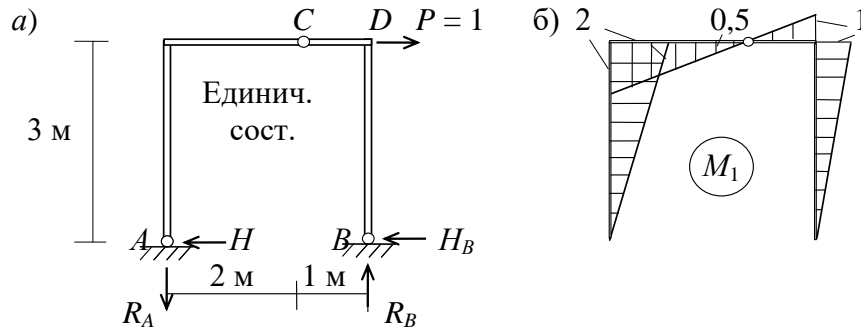


Рис. 4.19

В связи с простым очертанием эпюр M_p и M_1 перемножение эпюр на стойках производим по правилу Верещагина, а в ригеле по правилу Симпсона

$$x_D = \frac{M_p M_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 20 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 2 + \frac{3}{6} (20 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \cdot 0.5 + 10 \cdot 1) + \frac{1}{2} 10 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 1 \right] = \frac{80}{EI} \text{ кНм}^3.$$

Если принять, что жесткость ригеля больше жесткости стоек

(пусть $EI_p = 4EI_{ст}$), то:

$$x_D = \frac{1}{EI_c} \left(\frac{1}{2} 20 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 2 \right) + \frac{3}{6(4EI_c)} (20 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \cdot 0.5 + 10 \cdot 1) + \frac{1}{EI_c} \left(\frac{1}{2} 10 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 1 \right) = \frac{57.5}{EI_c}.$$

Увеличение жесткости ригеля в 4 раза привело к уменьшению перемещения узла D на 28,3%.

Представленные выше примеры показывают, что метод Мора достаточно прост для определения перемещений в заданных сечениях в любых стержневых системах.

5. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саргсян А. Е. и др. Строительная механика. М.: Высш. шк., 2000. 416 с.
2. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика. М.: Высш. шк., 1986. 607 с.
3. Смирнов А. В., Иванов С. А., Тихонов М. А. Строительная механика. М.: Стройиздат, 1984. 210 с.
4. Снитко Н. К. Строительная механика. М. Высш. шк. 1972. 488 с.
5. Киселев В. А. Строительная механика. Общий курс. М.: Стройиздат, 1986. 520 с.
6. Леонтьев Н. Н., Соболев Д. Н., Амосов А. А. Основы строительной механики стержневых систем. М.: Изд. АСВ, 1996. 541 с.
7. Варданян Г. С. и др. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. М.: Изд. АСВ, 1995. 572 с.
8. Сесюнин Н. А. и др. Примеры решения типовых задач по строительной механике. Методические указания. М., Изд. МГОУ, 1993, 116 с.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О ПОРЯДКЕ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Перечень расчетно-графических работ и контрольная работа по расчету рам установлены рабочей программой курса «Строительная механика».

Исходные данные для выполнения работ выбираются студентом из таблиц в соответствии с его личным шифром (номером зачетной книжки). Шифром считаются три последние цифры, например, если номер зачетной книжки 2071256, то шифр для выбора варианта 256. Работы, выполненные не по шифру и не в соответствии с таблицами, не защищаются и возвращаются без рассмотрения.

Каждая работа должна выполняться на одной стороне листа формата А4 (210x297), с размещением на них всех чертежей и необходимых расчетов с указанием порядка выполнения задания.

Перед решением каждой задачи необходимо вычертить расчетную схему и указать на ней все размеры и нагрузки в числах. ***Все расчетные схемы, эпюры и линии влияния должны быть выполнены в масштабе с указанием всех характерных ординат и размерностей.***

Перед сдачей работы оформляется титульный лист в соответствии с принятыми требованиями, на котором указывается название вуза, кафедры, работы, Ф. И. О. студента, шифр учебной группы и фамилия принимающего преподавателя.

РГР № 1

Статически определимая многопролетная балка

В заданной многопролетной балке (рис. 1) необходимо:

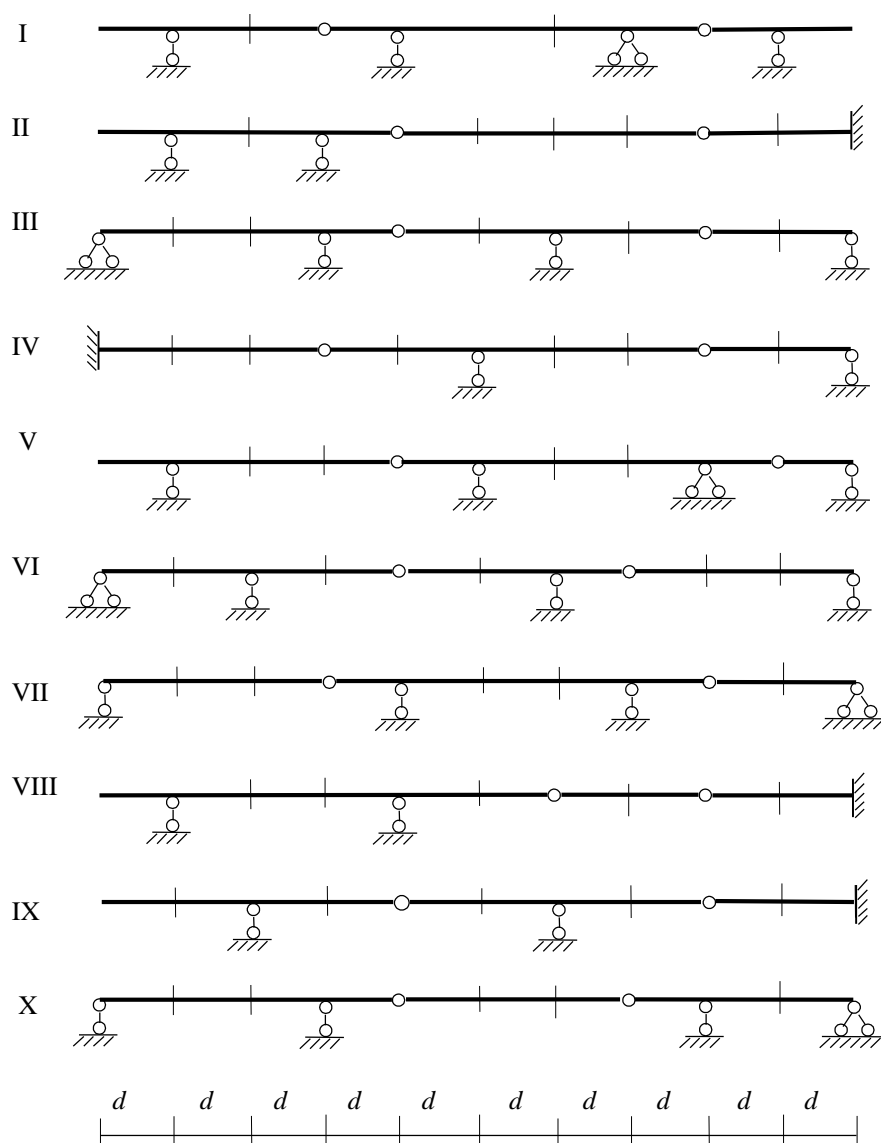


Рис. 1

1) используя поэтажную схему, построить эпюры Q и M . Нагрузки, действующие на многопролетную балку, принять в соответствии с рис. 2 (силы, приходящиеся на опоры балки, исключить).

2) Построить линии влияния для двух опорных реакций (по выбору студента) и для M и Q в заданном преподавателем сечении «к».

3) По линиям влияния вычислить M_k и Q_k от заданной нагрузки и сравнить со значениями, полученными при построении эпюр.

Исходные данные для задачи взять по таблице 1 по последним трем цифрам зачетной книжки.

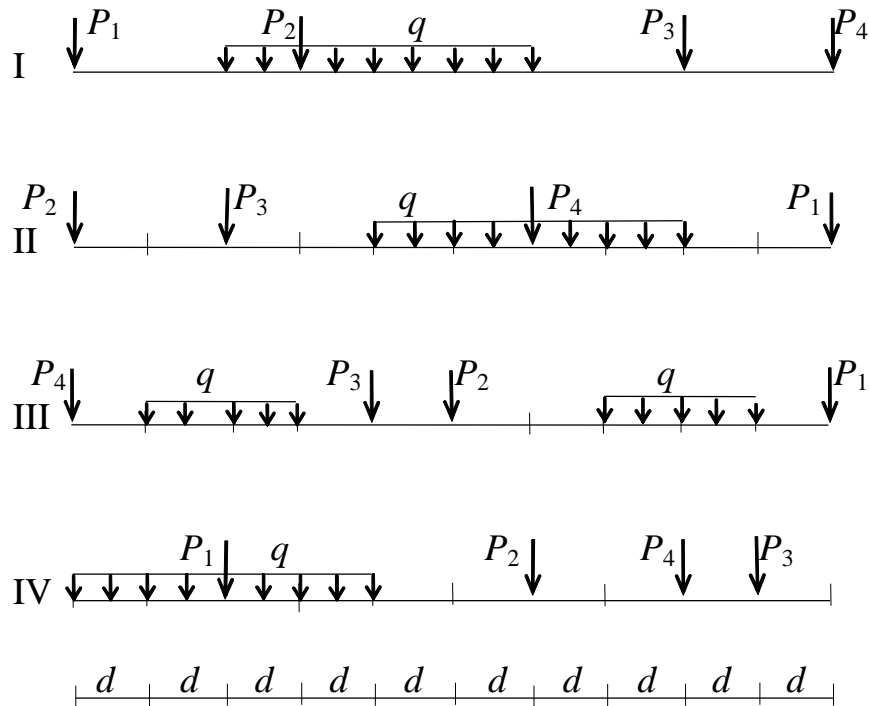


Рис. 2

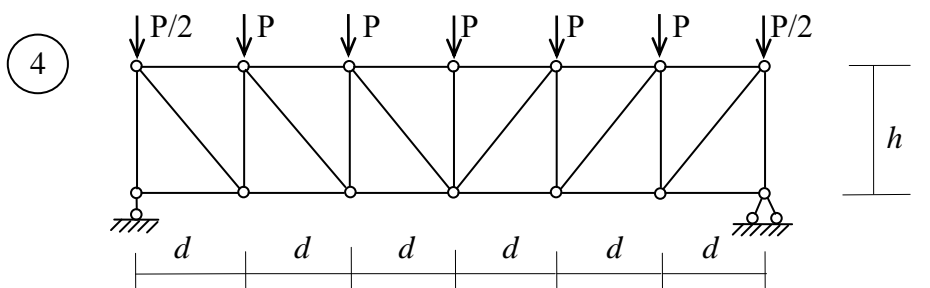
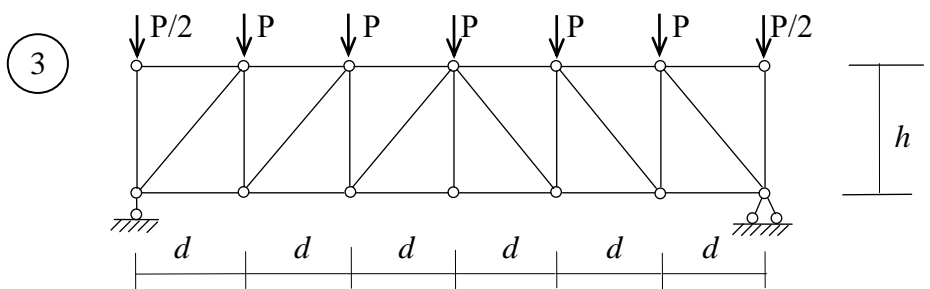
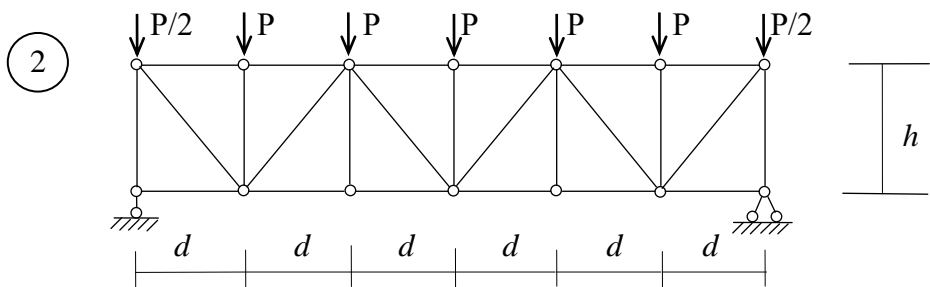
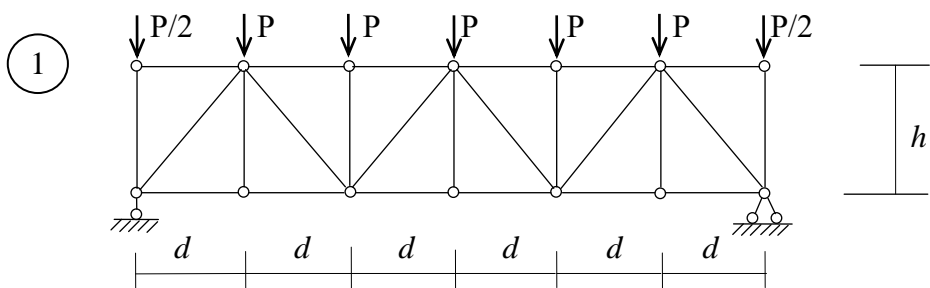
Таблица 1

номер варианта	номер схемы	номер нагрузки	P_i (кН)	q (кН/м)
1	I	I	60	8
2	II	II	50	5
3	III	III	40	6
4	IV	IV	30	8
5	V	I	32	5
6	VI	II	36	6
7	VII	III	46	4
8	VIII	IV	40	6
9	IX	I	50	5
0	X	II	56	8
цифра шифра	Последняя цифра шифра		Вторая цифра шифра	Первая цифра шифра

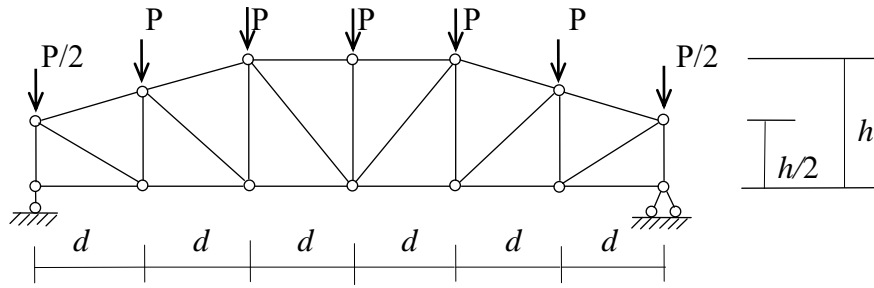
РГР №2.

Расчет простой плоской статически определимой фермы.

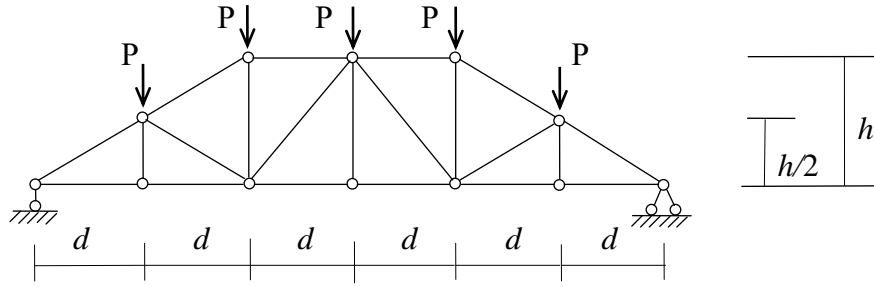
Задание. Для фермы (рис. 1) с выбранными по шифру из таблицы 1 размерами и нагрузкой требуется:



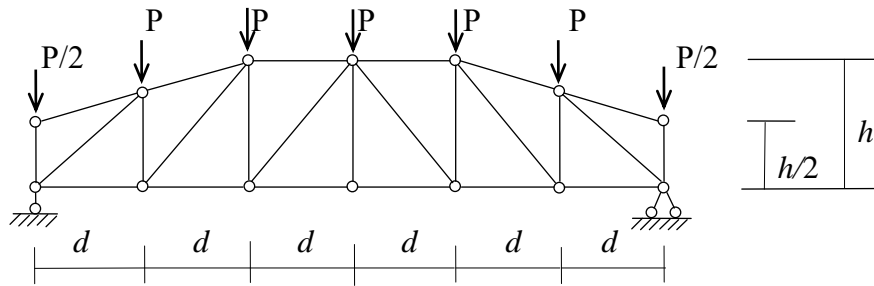
5



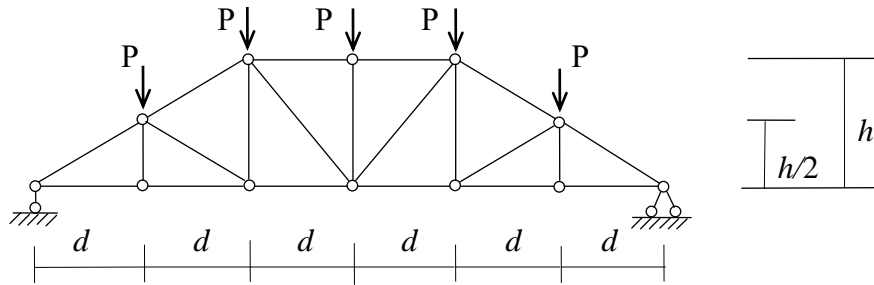
6



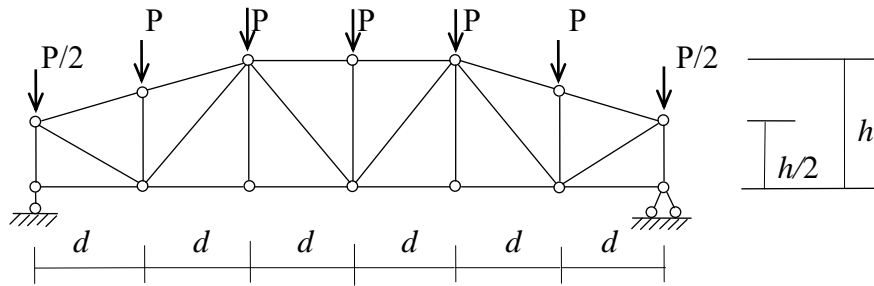
7



8



9



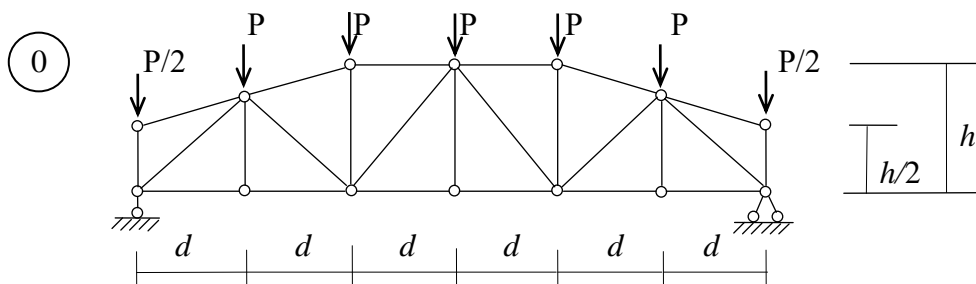


Рис. 1

- а) определить (аналитически) усилия в стержнях заданной панели, включая правую и левую стойки (5 стержней);
- б) построить линии влияния в тех же стержнях;
- в) по линиям влияния подсчитать значения усилий от заданной нагрузки и сравнить их со значениями, полученными аналитически.

Таблица 1

Последняя цифра шифра	№ схемы	$l = 6d$ (м)	P (кН)	Вторая цифра шифра	№ панели (считая слева)	h (м)
1	1	30	1,8	1	2	3,0
2	2	28	1,5	2	3	3,2
3	3	27	1,2	3	4	3,4
4	4	24	1,9	4	5	3,6
5	5	21	1,0	5	2	3,8
6	6	18	2,0	6	3	4,0
7	7	32	1,1	7	4	4,2
8	8	30	1,3	8	5	4,4
9	9	28	1,4	9	2	4,6
0	0	24	1,6	0	3	4,8

Методические указания к выполнению РГР №2.

Усилие в каждом стержне следует определить непосредственно через нагрузку и опорные реакции, а не одно через другое. Т.е. для каждого усилия надо найти свой способ из трех известных (моментной точки, проекций, вырезания узлов).

При определении усилий необходимо показывать используемые сечения, приводить соответствующие уравнения, а все величины, входящие в них, должны быть указаны на чертеже. Необходимые геометрические характеристики и размеры надо определять аналитически, а не брать по масштабу.

Построение линий влияния должно сопровождаться необходимыми расчетными формулами. Линии влияния строятся под схемой фермы; на них должны быть проставлены числовые значения ординат под всеми узлами. Найденные значения усилий по линиям влияния надо сравнить с результатами аналитического определения.

РГР № 3

Расчет 3-х шарнирной арки

Для трехшарнирной арки (рамы) заданного типа ___ с размерами, определяемыми по строке ___ таблицы 1 и нагрузкой, определяемой строкой ___ таблицы 2 необходимо:

1. Составить таблицу исходных данных по форме

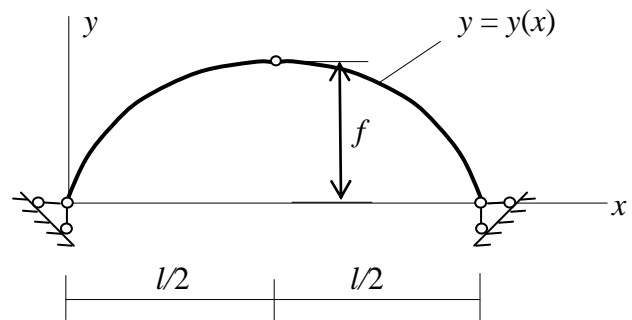
Тип арки	l	f	a	b	c	d	q	P_1	P_2

2. Построить эпюры M , Q , N ;

3. Определить напряжения в «опасном» сечении, считая, что поперечное сечение – прямоугольник с высотой h и шириной $b = 0,5h$. Высоту h принять в пределах $h = \frac{l}{30} \div \frac{l}{40}$. Сравнить их с напряжениями, возникающими в балке того же сечения

Тип арки (рамы)

1. Парабола $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$,



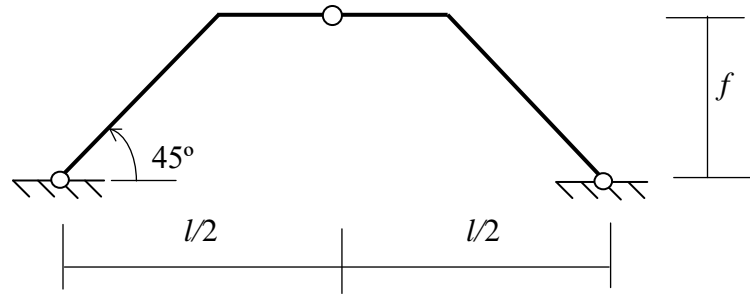
2. Синусоида $y = f \sin \frac{\pi x}{l}$,

3. Круговая $y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} + f - R$,

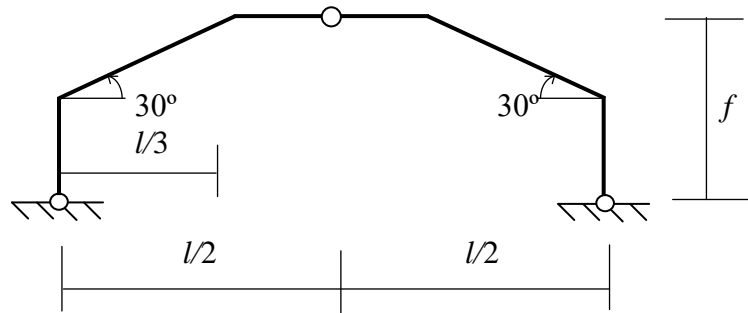
где: $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$, $\sin \varphi = \frac{l-2x}{2R}$, $\cos \varphi = \frac{y+R-f}{R}$.

4. Эллиптическая $y = 2f \sqrt{\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}$.

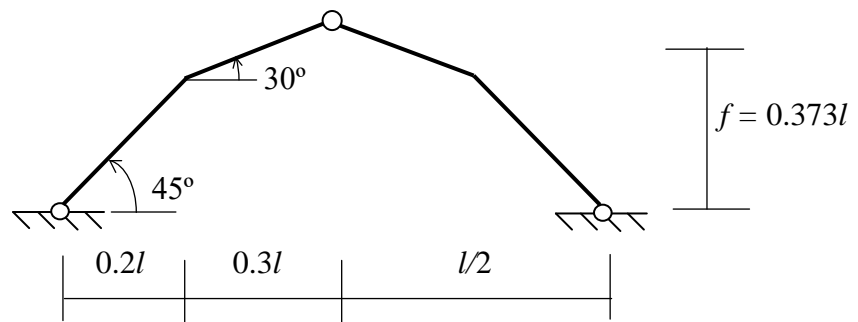
5. Трехшарнирная рама



6. Трехшарнирная рама



7. Трехшарнирная ра-
ма



8. Трехшарнирная рама

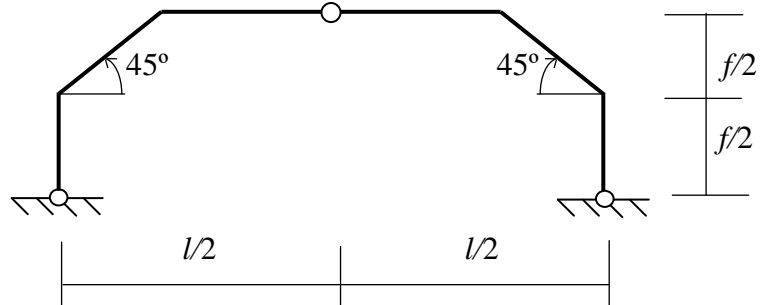
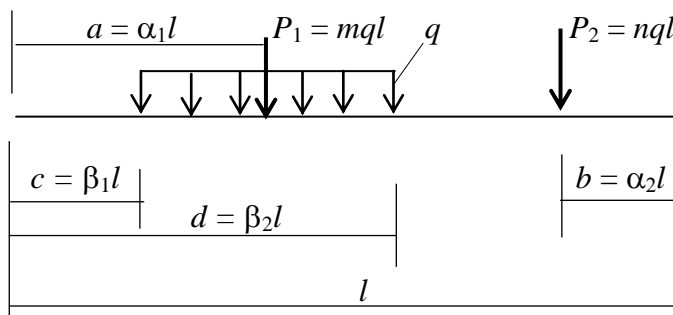


Схема нагрузки



При вычислении внутренних усилий в выбранных сечениях (не менее 6 сечений кроме опорных) воспользоваться табличным способом.

Таблица 1

Строка	Пролет l (м)	Стрела подъема f (м)
I	20	6
II	20	7
III	24	6
IV	24	7
V	24	8
VI	30	8
VII	30	10
VIII	32	10
IX	36	10
X	36	12

Таблица 2

Строка	α_1	α_2	β_1	β_2	q (кН/м)	m	n
I	0.2	0.4	0.0	0.5	20	0.2	0.5
II	0.2	0.3	0.5	1.0	20	0.4	0.4
III	0.4	0.2	0.0	0.5	30	0.4	0.5
IV	0.4	0.3	0.3	0.8	25	0.3	0.5
V	0.3	0.2	0.3	0.7	20	0.5	0.4
VI	0.5	0.2	0.0	0.4	20	0.2	0.3
VII	0.2	0.5	0.5	0.9	20	0.4	0.2
VIII	0.3	0.3	0.1	0.5	30	0.3	0.3

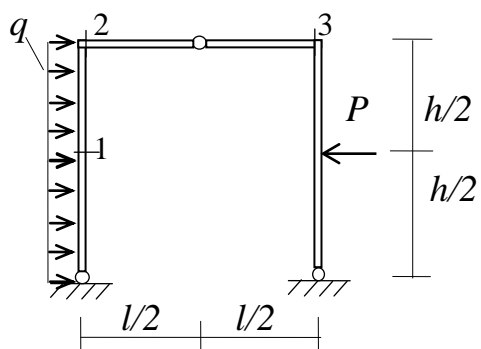
Выбор вариантов:

Номер вариан- та	Тип арки (рамы)	Геометрия арки (табл. 1)	Номер нагрузки (табл. 2)
1	I	I	I
2	II	II	II
3	III	III	III
4	IV	IV	IV
5	V	V	V
6	VI	VI	I
7	VII*	VII	VI
8	VIII	VIII	VII
9	I	IX	II
0	V	X	VIII
цифра шифра	Последняя цифра шифра	Вторая цифра шифра	Последняя цифра шифра

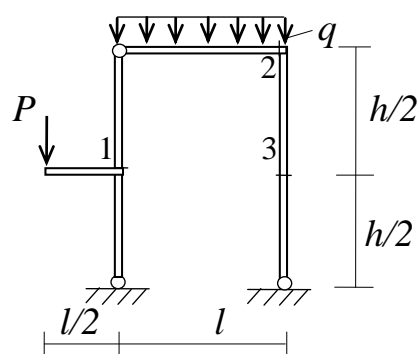
*) Для 7 варианта рамы стрела подъема f определяется по чертежу.

**Схемы к контрольной работе по определению перемещений
в статически определимой раме.**

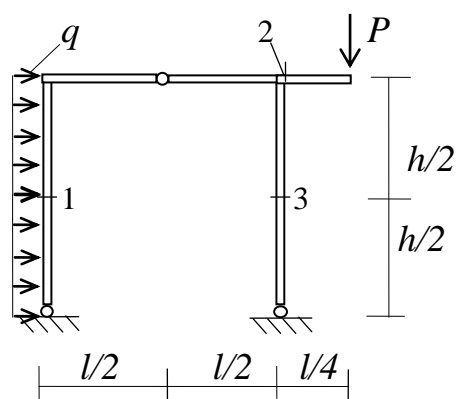
I.



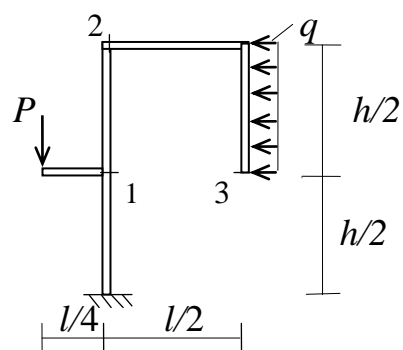
II.



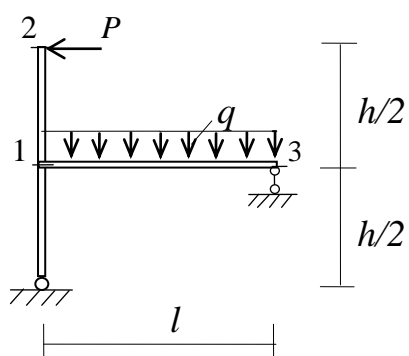
III.



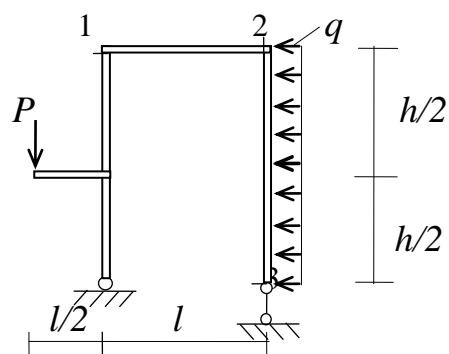
IV.



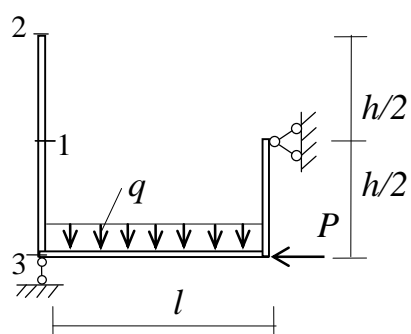
V.



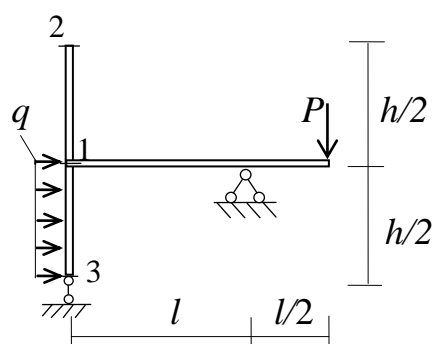
VI.



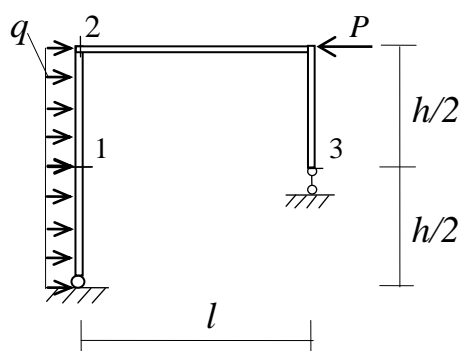
VII



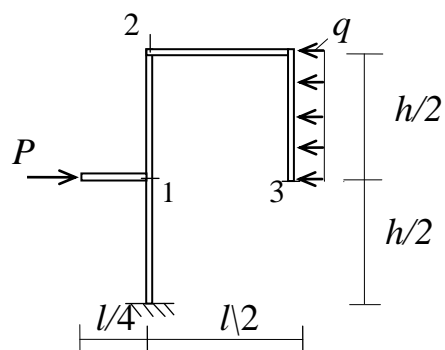
VIII.



IX.



X.



Выбор вариантов:

Номер варианта	l (м)	q (кН/м)	P (кН)	h (м)	№ сечения	№ Схемы	Вид пере- мещения	$I_p : I_c$
1	4	1,2	9	7	1	I	Угол поворота	1 : 2
2	5	1,4	8	6	2	II	Угол поворота	2 : 1
3	6	1,6	7	5	3	III	Угол поворота	1 : 3
4	7	1,8	6	8	1	IV	Угол поворота	3 : 1
5	8	2,0	5	9	2	V	Угол поворота	2 : 3
6	9	2,2	4	4	3	VI	Гориз. перемещ.	1 : 2
7	8	2,4	6	5	1	VII	Гориз. перемещ.	2 : 1
8	7	2,6	7	6	2	VIII	Гориз. перемещ.	1 : 3
9	6	2,8	8	7	3	IX	Гориз. перемещ.	3 : 1
0	5	3,0	10	8	1	X	Гориз. перемещ.	3 : 2
	Первая цифра шифра		Вторая цифра шифра			Последняя цифра шифра		

Учебное издание

Долгоруков Вадим Александрович

Нечипорук Геннадий Савельевич

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ В ПРИМЕРАХ

Методические указания для
студентов строительных специальностей

Компьютерная верстка Нечипорук Г. С.

Подписано в печать 13. 02.2010.

Формат 60×84/1 16. Бумага типограф.

Печать офсетная.

Уч.-изд. л. 4,7

Тираж 100 экз.

Заказ № 91 452

Рязанский институт (филиал) МГОУ

390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/33