

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емец Валерий Сергеевич  
Должность: Директор филиала  
Дата подписания: 19.10.2023 15:39:02  
Уникальный программный ключ:  
f2b8a1573c931f1098cfe699d1debd94fcff35d7

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Рязанский институт (филиал)  
федерального государственного автономного образовательного учреждения  
высшего образования  
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

И.А. Азизян

## **ДИАГНОСТИКА И НАДЁЖНОСТЬ СИСТЕМ В МАШИНОСТРОЕНИИ**

Учебное пособие

Рязань  
2022

**УДК 62.1**  
**ББК 34.41**  
**А 35**

**Азизян, И.А.**

**А 35** Диагностика и надежность систем в машиностроении: учебное пособие/ И.А. Азизян. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2022. – 32 с.

Учебное пособие содержит основные положения теории надежности и диагностики в машиностроении. Теоретический материал изложен с помощью схематического представления методов расчета характеристик надежности технических систем, способов резервирования. Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

**УДК 62.1**  
**ББК 34.41**

© Азизян И.А., 2022  
© Рязанский институт (филиал)  
Московского политехнического  
университета, 2022

## Содержание

Введение .....	4
1 Технические объекты трех уровней.....	5
2 Расчет характеристик надежности невосстанавливаемых резервированных изделий.....	6
2.1 Методы расчета .....	6
2.2 Задачи для самостоятельной работы.....	11
3 Системы с сетевой структурой.....	14
3.1 Мостиковая структура.....	14
3.2 Расчет функции связности методом прямого перебора.....	16
3.3 Метод декомпозиции булевых функций.....	16
3.4 Граничные оценки Эзари-Прошана для мостиковой структуры....	17
3.5 Граничные оценки Литвака-Ушакова.....	19
3.6 Модифицированный метод Литвака-Ушакова.....	22
3.7 Метод рекуррентных вложений.....	24
3.8 Метод разбиения на модули.....	26
3.9 Системы с ветвящейся структурой.....	27
3.10 Система с коэффициентом эффективности аддитивного типа.....	28
3.11 Система с резервированием исполнительных элементов.....	28
Библиографический список.....	31

## **Введение**

Современные технологии выводят проблему надежности на новый уровень, который требует глубокого изучения вопросов надежности в подготовке специалистов в области машиностроения: новые реалии требуют направить учебный процесс на получение знаний и навыков, необходимых для контроля и диагностики технического состояния систем в процессе оценочных работ, изготовления, монтажа и эксплуатации.

Вопросы диагностики и контроля функционирования систем в области машиностроения в техническом вузе рассматриваются на основе многих специальных дисциплин в соответствии с направлением подготовки. В данном учебном пособии теоретический материал изложен с помощью схематического представления различных методов расчета характеристик надежности технических систем и способов резервирования. Студентам для самостоятельного решения предлагаются задачи, условия которых также представлены с помощью схем.

## 1 Технические объекты трех уровней

При задании требований по надежности следует различать технические объекты трех уровней.

**Системы**, т.е. технические объекты, выполняющие самостоятельные операции.

Системы характеризуются оперативно-техническими показателями надежности и эффективности функционирования.

Примером системы может служить вычислительный комплекс для управления динамическими объектами, характеризуемый числом одновременно обслуживаемых объектов, вероятностью безотказного управления отдельно взятым объектом и т.п.

Другой пример: грузовой автомобиль с такими характеристиками, как средний пробег между отказами, вероятность выполнения стандартного рейса, готовность технической системы и т.п.

Результат работы системы может быть сформулирован в терминах выполнения требуемой или заданной операции.

Показатели надежности систем выражаются через показатели надежности подсистем, входящих в их состав.

**Подсистемы**, т.е. технические объекты, входящие в состав систем и выполняющие частные функциональные задачи.

Подсистемы, как правило, не выполняют самостоятельных совершенных операций, а служат для обеспечения выполнения операции в целом.

В предположении выполнения подсистемами своих функциональных обязанностей они характеризуются такими показателями, как распределение времени работы до отказа и распределение времени восстановления.

**Элементы**, т.е. базовые компоненты, являющиеся неделимыми техническими объектами (по крайней мере, в рамках текущего производимого анализа).

Элементы характеризуются средней наработкой до отказа.

Нужно иметь в виду, что подразделение технических объектов на указанные три иерархических уровня является условным: объект, который в одном случае является системой, в другом может оказаться подсистемой и т.д. Возможно иерархическое разбиение каждого иерархического уровня на несколько вспомогательных уровней.

С точки зрения задания требований по надежности, как правило, оказывается достаточным иметь указанные три категории технических объектов.

## 2 Расчет характеристик надежности невосстанавливаемых резервированных изделий

Резервированным соединением изделий называется такое соединение, при котором отказ наступает только после отказа основного изделия и всех резервных изделий.

### 2.1 Методы расчета

На практике применяются способы резервирования, приведенные на рисунке 1.

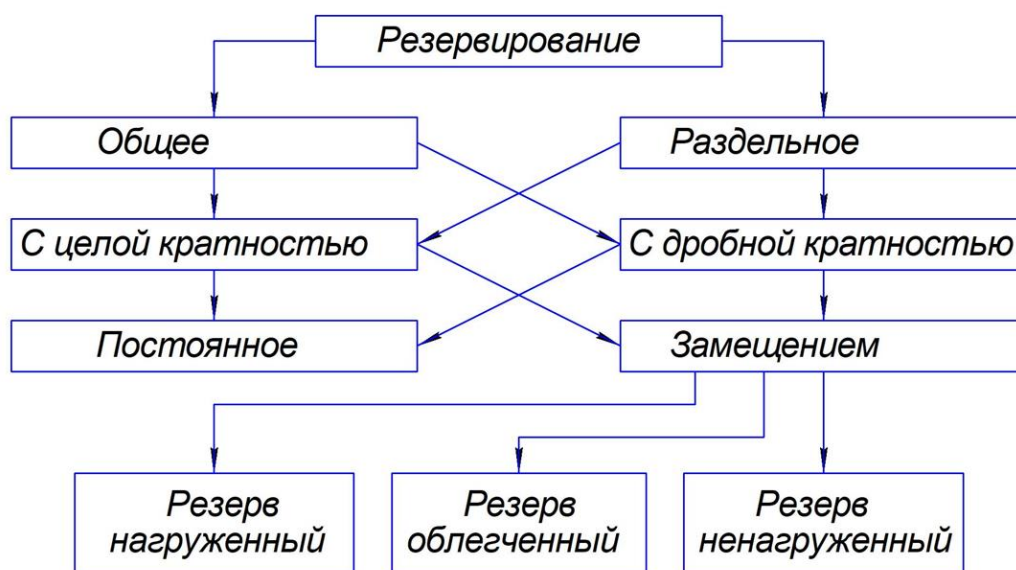


Рисунок 1 – Способы резервирования

Схемные обозначения различных способов резервирования приведены на рисунке 2.

Общим резервированием называется метод повышения надежности, при котором резервируется изделие в целом (рисунок 2, *а*).

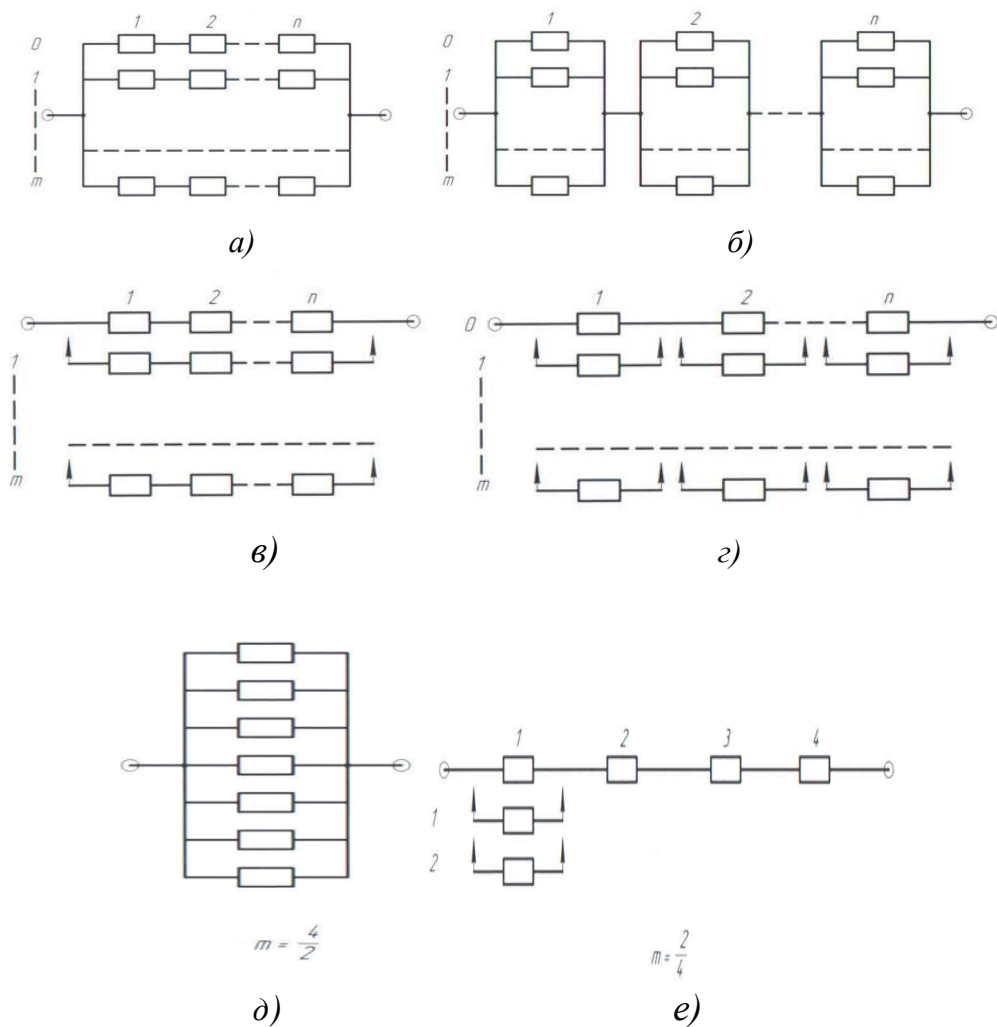
Раздельным резервированием называется метод повышения надежности, при котором резервируются отдельные части изделия (рисунок 2, *б*).

Основным параметром резервирования является его кратность. Под кратностью резервирования  $t$  понимается отношение числа резервных к числу резервируемых (основных).

Различают резервирование с целой и дробной кратностью. Схемные обозначения обоих видов резервирования при постоянном включении резерва одинаковы. Для их различия на схеме указывается кратность резервирования  $t$ .

При резервировании с целой кратностью величина  $t$  есть целое число, при резервировании с дробной кратностью величина  $t$  есть дробное несокра-

щаемое число. Например,  $m = \frac{4}{2}$  означает наличие резервирования с дробной кратностью, при котором число резервных элементов равно четырем, число основных – двум, а общее число элементов равно шести. Сокращать дробь нельзя, так как если  $m = \frac{4}{2} = 2$ , то это означает, что имеет место резервирование с целой кратностью, при котором число резервных элементов равно двум, а общее число элементов равно трем.



*a* – общее постоянное с целой кратностью; *б* – раздельное постоянное с целой кратностью; *в* – общее замещением с целой кратностью; *г* – раздельное замещением с целой кратностью; *д* – общее постоянное с дробной кратностью; *е* – раздельное замещением с дробной кратностью.

Рисунок 2 – Схемные обозначения различных способов резервирования

По способу включения резервирование разделяется на постоянное и резервирование замещением.

Постоянное резервирование – резервирование, при котором резервные изделия подключены к основным в течение всего времени работы и находятся в одинаковом с ними режиме.

Резервирование замещением – резервирование, при котором резервные изделия замещают основные после их отказа.

При включении резерва по способу замещения резервные элементы до момента включения в работу могут находиться в трех состояниях:

- нагруженном резерве;
- облегченном резерве;
- ненагруженном резерве.

Приведем основные расчетные формулы для указанных выше видов резервирования.

**Общее резервирование с постоянно включенным резервом и с целой кратностью** (рисунок 2,а)

$$P_c(t) = 1 - (1 - \prod_{i=1}^n p_i(t))^{m+1}, \quad (1)$$

где  $p_i(t)$  – вероятность безотказной работы  $i$ -го элемента в течение времени  $t$ ;

$n$  – число элементов основной или любой резервной цепи;

$m$  – число резервных цепей (кратность резервирования).

При экспоненциальном законе надежности, когда  $p_i(t) = e^{-\lambda_i t}$ ,

$$P_c(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda_0 t})^{m+1}, \quad (2)$$

$$T_{cp\ c} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^m \frac{1}{i+1} = T_{cp\ 0} \cdot \sum_{i=0}^m \frac{1}{i+1}, \quad (3)$$

где  $\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  – интенсивность отказов нерезервированной системы или любой из  $m$  резервных систем;

$T_{cp\ 0}$  – среднее время безотказной работы нерезервированной системы или любой из  $m$  резервных систем.

При резервировании неравнонадежных изделий

$$P_c(t) = 1 - \prod_{i=0}^m q_i(t) = 1 - \prod_{i=0}^m (1 - p_i(t)), \quad (4)$$

где  $q_i(t)$ ,  $p_i(t)$  – вероятность отказов и вероятность безотказной работы в течение времени  $t$ -го изделия соответственно.

**Раздельное резервирование с постоянно включенным резервом и с целой кратностью** (рисунок 2,б).

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n (1 - (1 - p_i(t))^{m_i+1}), \quad (5)$$

где  $p_i(t)$  – вероятность безотказной работы  $i$ -го элемента;

$m_i$  – кратность резервирования  $i$ -го элемента;

$n$  – число элементов основной системы.

При экспоненциальном законе надежности, когда  $p_i(t) = e^{-\lambda_i t}$ ,

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n (1 - (1 - e^{-\lambda_i t})^{m_i+1}). \quad (6)$$



При равнонадежных элементах и одинаковой кратности их резервирования

$$P_c(t) = \left(1 - (1 - e^{-\lambda t})^{m+1}\right)^n, \quad (7)$$

$$T_{\text{ср с}} = \int_0^{\infty} P_c(t) dt = \frac{(n-1)!}{\lambda(m+1)} \sum_{i=0}^m \frac{1}{v_i(v_i+1)\dots(v_i+n-1)}, \quad (8)$$

где  $v_i = \frac{i+1}{m+1}$ .

**Общее резервирование замещением с целой кратностью** (рисунок 2,в).

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + \int_0^t P(t-\tau) a_m(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где  $P_{m+1}(t)$ ,  $P_m(t)$  – вероятности безотказной работы резервированной системы кратности  $m+1$  и  $m$  соответственно;

$P(t-\tau)$  – вероятность безотказной работы основной системы в течение времени  $(t-\tau)$ ;

$a_m(\tau)$  – частота отказов резервированной системы кратности  $m$  в момент времени  $\tau$ .

Рекуррентная формула (9) позволяет получить расчетные соотношения для устройств любой кратности резервирования. Для получения таких формул необходимо выполнить интегрирование в правой части, подставив вместо  $P(t-\tau)$  и  $a_m(\tau)$  их значения в соответствии с выбранным законом распределения и состоянием резерва.

При экспоненциальном законе надежности и ненагруженном состоянии резерва

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}, \quad (10)$$

$$T_{\text{ср с}} = T_{\text{ср 0}}(m+1). \quad (11)$$

где  $\lambda_0$ ,  $T_{\text{ср 0}}$  – интенсивность отказов и средняя наработка до первого отказа основного (нерезервированного) устройства.

При экспоненциальном законе и недогруженном состоянии резерва

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \left(1 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_i t})^i\right), \quad (12)$$

$$T_{\text{ср с}} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^m \frac{1}{1+ik}, \quad (13)$$

где  $a_i = \prod_{j=0}^{i-1} \left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)$ ,  $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ ,  $\lambda_1$  – интенсивность отказов резервного устройства до замещения. При нагруженном состоянии резерва формулы для  $P_c(t)$  и  $T_{\text{ср с}}$  совпадают с формулами (2) и (3).

**Раздельное резервирование замещением с целой кратностью** (рисунок 2,б):

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n p_i(t), \quad (14)$$

где  $p_i(t)$  – вероятность безотказной работы системы из-за отказов элементов  $i$ -го типа, резервированных по способу замещения.

Вычисляется  $P_i(t)$  по формулам общего резервирования замещением (в соответствии с типом замещения).

Общее резервирование с дробной кратностью и постоянно включенным резервом (рисунок 2,д):

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{l-h} C_l^i p_0^{l-i}(t) \sum_{j=0}^i (-1)^j C_i^j p_0^j(t), \quad (15)$$

$$T_{\text{ср с}} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^{l-h} \frac{1}{h+i}, \quad (16)$$

где  $p_0(t)$  – вероятность безотказной работы основного или любого резервного элемента;

$l$  – общее число основных и резервных систем;

$h$  – число систем, необходимых для нормальной работы резервированной системы.

В данном случае кратность резервирования  $m = \frac{l-h}{h}$ . (17)

**Скользящее резервирование:** при экспоненциальном законе надежности

$$P_c(t) = e^{-n\lambda t} \sum_{i=0}^{m_0} \frac{(n\lambda t)^i}{i!} = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{m_0} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!};$$

$$T_{\text{ср с}} = T_{\text{ср 0}}(m_0 + 1), \quad (18)$$

где  $\lambda_0 = n\lambda$  – интенсивность отказов нерезервированной системы;

$\lambda$  – интенсивность отказов элемента;

$n$  – число элементов основной системы;

$T_{\text{ср 0}}$  – среднее время безотказной работы нерезервированной системы;

$m_0$  – число резервных элементов;

$m = \frac{m_0}{n}$  – кратность резервирования.

Элементы резервированных устройств в ряде случаев могут иметь два вида отказов – «обрыв» и «короткое замыкание». В этом случае вычислять вероятность безотказной работы следует, суммируя вероятности всех благоприятных (не приводящих к отказу) гипотез, т.е.

$$P_c(t) = \sum_{j=1}^k p_j(t), \quad (19)$$

где  $p_j(t)$  – вероятность  $j$ -й благоприятной гипотезы, вычисленной с учетом двух видов отказов;  $k$  – число благоприятных гипотез.

При вычислениях  $p_j(t)$  следует иметь в виду, что для элементов сложной системы справедливы выражения

$$p(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right), \quad \varphi_0 + \varphi_3 = 1, \quad (20)$$

где  $\lambda(t)$  – интенсивность отказов элемента;  $\varphi_0, \varphi_3$  – вероятность «обрыва» и «короткого замыкания» соответственно.

При экспоненциальном законе надежности  $p(t) = e^{-\lambda t}$ ,  $\varphi_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_0 + \lambda_3}$ ,  $\varphi_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_3}$ , где  $\lambda_0, \lambda_3$  – интенсивность отказа элемента по «обрыву» и «короткому замыканию» соответственно.

При схемной реализации резервирования в ряде случаев конкретные технические решения не приводятся к логическим схемам расчета надежности (рисунок 2).

В этих случаях следует для получения аналитических выражений для количественных характеристик надежности использовать метод перебора благоприятных гипотез. Вероятность безотказной работы в этом случае вычисляется по выражению (19).

При анализе надежности резервированных устройств на этапе проектирования приходится сравнивать различные схемные решения. В этом случае за критерий качества резервирования принимается выигрыш надежности. Выигрышем надежности называется отношение количественной характеристики надежности резервированного устройства к той же количественной характеристике нерезервированного устройства или устройства с другим видом резервирования.

Наиболее часто используются следующие критерии качества резервированных устройств:  $G_q(t)$  – выигрыш надежности в течение времени  $t$  по вероятности отказов;  $G_p(t)$  – выигрыш надежности в течение времени  $t$  по вероятности безотказной работы;  $G_T$  – выигрыш надежности по среднему времени безотказной работы.

## 2.2 Задачи для самостоятельной работы

**Задача 1.** Дана система, схема расчета надежности которой изображена на рисунке 3. Необходимо найти вероятность безотказной работы системы при известных вероятностях безотказной работы ее элементов (значения вероятностей указаны на рисунке).

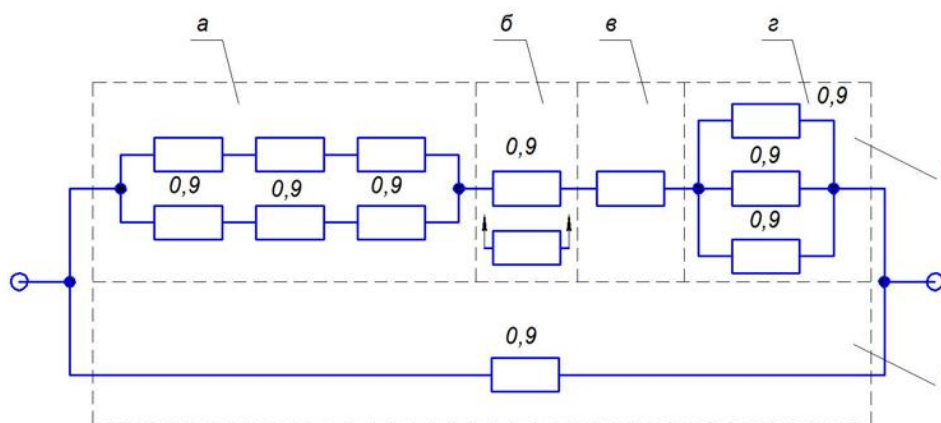


Рисунок 3 – Схема расчета надежности

**Задача 2.** Схема расчета надежности резервированного устройства приведена на рисунке 4. Интенсивности отказов элементов имеют следующие значения:  $\lambda_1 = 0,23 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{час}}$ ,  $\lambda_2 = 0,5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{час}}$ ,  $\lambda_3 = 0,4 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{час}}$ . Предполагаем, что последствие отказов элементов отсутствует. Необходимо найти среднюю наработку до первого отказа устройства и построить зависимость интенсивности отказов устройства от времени.

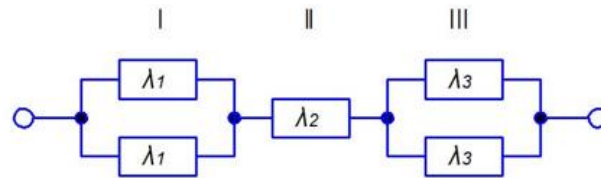


Рисунок 4 – Схема расчета надежности

**Задача 3.** Схема расчета надежности устройства приведена на рисунке 5. Предполагается, что последствие отказов отсутствует и все элементы расчета равнонадежны. Интенсивность отказов элемента  $\lambda = 1,35 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{час}}$ . Требуется определить наработку до первого отказа резервированного устройства.

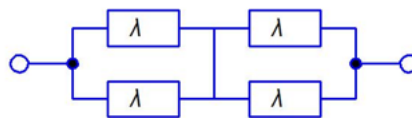


Рисунок 5 – Схема расчета надежности

**Задача 4.** Схема расчета надежности изделия приведена на рисунке 6. Вероятность безотказной работы нерезервированного устройства в течение 300 часов равна 0,74, резерв ненагруженный и интенсивность отказов устройств  $\lambda = const$ . Необходимо найти его вероятность и среднее время безотказной работы.

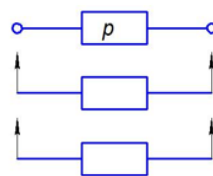


Рисунок 6 – Схема расчета надежности

**Задача 5.** Схема расчета надежности приведена на рисунке 7. Необходимо найти вероятность безотказной работы изделия, если известны вероятности отказов элементов.

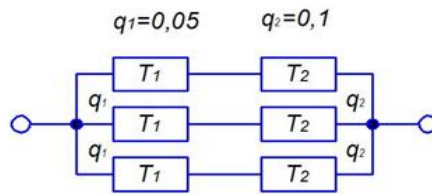


Рисунок 7 – Схема расчета надежности

**Задача 6.** Схема расчета надежности показана на рисунке 8. Требуется определить вероятность безотказной работы и вероятность отказа изделия, если вероятности безотказной работы элементов равны 0,9.

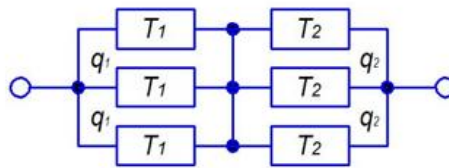


Рисунок 8 – Схема расчета надежности

**Задача 7.** Схема расчета надежности показана на рисунке 9. Необходимо найти по известным вероятностям отказов элементов вероятность безотказной работы изделия.

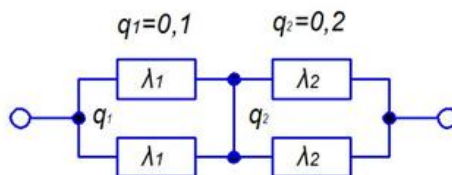


Рисунок 9 – Схема расчета надежности

**Задача 8.** Схема расчета надежности показана на рисунке 10, на котором приведены вероятности безотказной работы элементов. Требуется вычислить вероятность безотказной работы изделия.

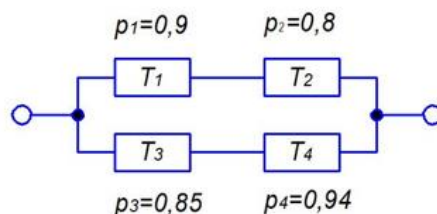


Рисунок 10 – Схема расчета надежности

### 3 Системы с сетевой структурой

Рассмотрим общие методы анализа надежности систем с сетевой структурой, начиная с простейшей из них – мостиковой структуры, иллюстративные примеры и граничные оценки и приближенные формулы.

#### 3.1 Мостиковая структура

На практике часто встречаются структуры, которые нельзя свести к одному эквивалентному элементу путем сворачивания последовательных и параллельных цепочек. К такого рода системам относятся практически все системы с сетевой структурой: телекоммуникационные, энергетические, транспортные. Часто рассматриваются двухполюсные системы, характеризуемые связностью входа и выхода графа, представляющего блок-схему надежности.

**Мостиковая система** – простейшая система с неприводимой структурой.

Структура такой системы представлена блок-схемой на рисунке 11.

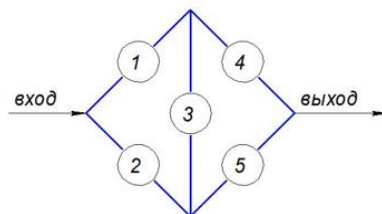


Рисунок 11 – Блок-схема надежности мостиковой системы

**Минимальные пути.** Будем считать, что система работоспособна, если граф, представляющий ее на блок-схеме надежности, связан, т.е. имеется хотя бы один путь от входа до выхода двухполюсного графа.

Минимальный путь графа – это путь, отказ любого элемента которого приводит к потере связности данного пути, т.е. такой путь не имеет «лишних» элементов.

Если все элементы минимального пути работоспособны, то граф связан, даже если все остальные элементы отказали, но очередной отказ любого из элементов этого минимального пути приведет уже к неопровержимому отказу системы. Иначе говоря, минимальный путь представляет собой последовательное соединение элементов.

В случае мостиковой системы полный набор минимальных путей представлен на рисунке 12. Этот набор составляют подмножества элементов  $\{x_1; x_4\}$ ,  $\{x_2; x_5\}$ ,  $\{x_1; x_3; x_5\}$ ,  $\{x_2; x_3; x_4\}$ .

Если существует хотя бы один из указанных путей, то система работоспособна. Структурная функция мостиковой системы, выраженная через минимальные пути, записывается в виде

$$\varphi(x_1, \dots, x_5) = (x_1 \cap x_4) \cup (x_2 \cap x_5) \cup (x_1 \cap x_3 \cap x_5) \cup (x_2 \cap x_3 \cap x_4) \quad (21)$$

Формулу (21) можно переписать, используя правило де Моргана

$$\varphi(x_1, \dots, x_5) = \overline{(x_1 \cap x_4)} \cap \overline{(x_2 \cap x_5)} \cap \overline{(x_1 \cap x_3 \cap x_5)} \cap \overline{(x_2 \cap x_3 \cap x_4)}. \quad (22)$$

Такая формула, содержащая только конъюнктивные формы, оказывается более удобной в дальнейших выводах.

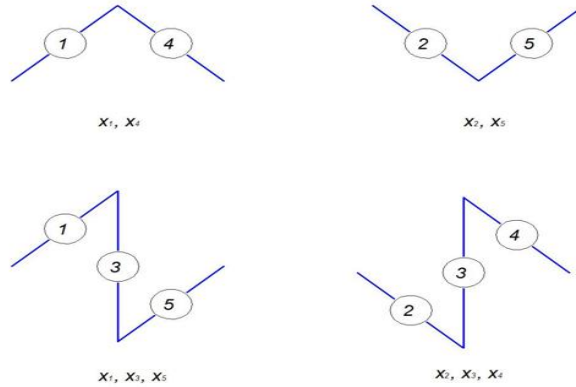


Рисунок 12 – Полный набор минимальных путей

**Минимальные разрезы.** Система откажет, если произойдут отказы элементов, образующих разрез системы.

**Минимальные разрезы системы** – это такое множество элементов системы, что при отказе всех их система отказывает, если даже все остальные элементы исправны.

Восстановление работоспособности любого из элементов минимального разреза приводит к восстановлению связности двухполюсного графа. У рассматриваемой мостиковой схемы таких минимальных разрезов также четыре:  $\{x_1; x_2\}$ ,  $\{x_4; x_5\}$ ,  $\{x_1; x_3; x_5\}$ ,  $\{x_2; x_3; x_4\}$ . Эти разрезы представлены на рисунке 13.

Булевы функции, описывающие состояние отказа перечисленных разрезов, будут иметь вид соответственно:  $\bar{x}_1 \cap \bar{x}_2$ ,  $\bar{x}_4 \cap \bar{x}_5$ ,  $\bar{x}_1 \cap \bar{x}_3 \cap \bar{x}_5$ ,  $\bar{x}_2 \cap \bar{x}_3 \cap \bar{x}_4$ . Отказ системы происходит, если все элементы, принадлежащие какому-либо даже только одному разрезу, откажут. Это означает, что структурная функция мостиковой системы, выраженная через минимальные разрезы, имеет вид:

$$\varphi(x_1, \dots, x_5) = \overline{(\bar{x}_1 \cap \bar{x}_2)} \cap \overline{(\bar{x}_4 \cap \bar{x}_5)} \cap \overline{(\bar{x}_1 \cap \bar{x}_3 \cap \bar{x}_5)} \cap \overline{(\bar{x}_2 \cap \bar{x}_3 \cap \bar{x}_4)}. \quad (23)$$

Оба представления структурной функции мостиковой системы эквивалентны.

Вероятность безотказной работы сетевой системы, или ее функция связности, есть вероятность того, что булева структурная функция равна единице,

$$P_{\text{сист}} = h(p) = h(p_1, p_2, \dots, p_n) = E\{\varphi(x_1, \dots, x_5)\}, \quad (24)$$

где  $p_i = E\{x_i\}$  есть вероятность безотказной работы  $i$ -го элемента.

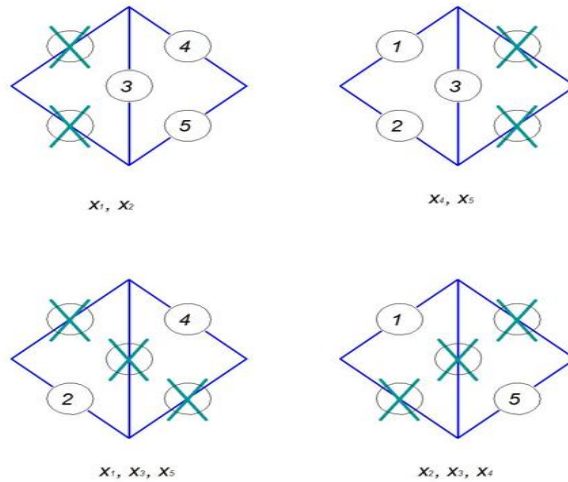


Рисунок 13 – Полный набор минимальных разрезов

Для сетевых структур математическое ожидание структурной функции не дает простых выражений в силу зависимости между собой путей, равно как и разрезов – из-за того, что в различные пути или разрезы могут входить одни и те же элементы.

### 3.2 Расчет функции связности методом прямого перебора

Наиболее простым, хотя и в то же время и самым бесперспективным методом вычисления вероятности связности двухполюсного графа, является метод прямого перебора состояний. Для системы из  $n$  элементов существует  $2^n$  различных состояний, т.е. уже для  $n = 400$  число состояний превысит гугл (Google (гугл) – наибольшее физическое число равное  $10^{100}$ ).

### 3.3 Метод декомпозиции булевых функций

Булева функция может быть разложена относительно любого своего аргумента. Действительно, для структурной функции мостиковой системы, например, можно записать

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_3 \varphi(x_1, x_2, 1, x_4, x_5) + \bar{x}_3 \varphi(x_1, x_2, 0, x_4, x_5), \quad (25)$$

где «1» и «0» стоят в соответствующих слагаемых на позиции 3-го элемента.

В этом случае структурные функции с фиксированным значением аргумента  $x_3$  не зависят от  $x_3$ , поэтому вероятность связности может быть записан в виде

$$P_{\text{сист}} = p_3 E\{(x_1 \cup x_2) \cap (x_4 \cup x_5)\} + q_3 E\{(x_1 \cap x_4) \cup (x_2 \cap x_5)\} \quad (26)$$

где  $p = E\{x\}$  и  $q = E\{\bar{x}\}$ .

Применяя правило де Моргана, имеем



$$P_{\text{сист}} = p_3 E\{\overline{(x_1 \cap x_2)} \cap \overline{(x_4 \cap x_5)}\} + q_3 E\{\overline{((x_1 \cap x_4))} \cap \overline{((x_2 \cap x_5))}\} =$$

$$= p_3(1 - q_1q_2) \cdot (1 - q_4q_5) + q_3(1 - (1 - p_1p_4)(1 - p_2p_5)). \quad (27)$$

Разложение (27) не является единственным: элемент, относительно которого производится разложение булевой функции, может быть и иным. В случае мостиковой схемы разложение относительно любого элемента оказывается эффективным, т.е. сводит неприводимую структуру к приводимой.

**Пример.** Произведем разложение структурной функции системы с мостиковой структурой относительно элемента 1. Две соответствующие блок-схемы надежности для случая, когда ребро 1 стянуто в точку, и для случая отсутствия ребра 1 представлены на рисунке 14.

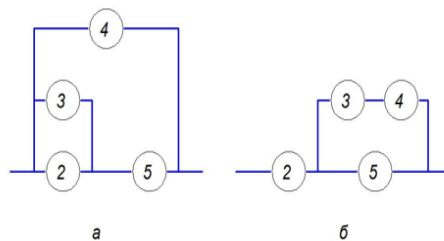


Рисунок 14 – Блок-схема надежности

$p_1(1 - (1 - (1 - q_2q_3)p_5)q_4) + q_1p_2(1 - (1 - p_3p_4)q_5)$  – расчетная формула вероятности безотказной работы системы относительно элемента 1.

Для более сложных сетей выбор элемента, относительно которого делается разложение, не столь тривиален. Более того, может оказаться, что разложение относительно какого-то элемента вообще не упростит задачу, например, если выбран элемент, уже принадлежащий к приводимой структуре.

### 3.4 Граничные оценки Эзари-Прошана для мостиковой структуры

**Верхняя граница.** Логическая функция мостиковой системы эквивалента логической функции параллельного соединения минимальных путей (рисунок 15).

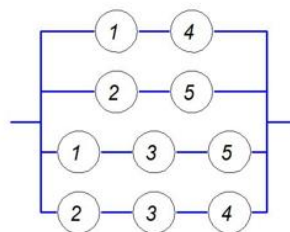


Рисунок 15 – Оценка верхней границы вероятности безотказной работы системы

Действительно, для того чтобы мостиковая система успешно работала, необходимо наличие хотя бы одного работоспособного пути. В отличие от обычной параллельно-последовательной системы параллельные цепочки на рисунке 15 являются зависимыми, поскольку одни и те же элементы могут входить в несколько различных путей, а потому в данном случае стандартные формулы для горячего резервирования (постоянно включенный резерв) оказываются неприменимы. Пути эти зависимы таким образом, что отказ некоторого элемента  $k$  одновременно выводит из строя все пути, содержащие данный элемент.

Верхняя граница Эзари-Прошана для вероятности связности мостиковой системы равна

$$\bar{P}_{\text{Э-П}} = 1 - (1 - p_1 p_4) \cdot (1 - p_2 p_5) \cdot (1 - p_1 p_3 p_5) \cdot (1 - p_2 p_3 p_4). \quad (28)$$

Это же утверждение может быть проиллюстрировано условной формулой:

$$P \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\} \leq P \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\} \quad (29)$$

Для высоконадежных систем, у которых  $\max q_i \ll \frac{1}{n}$ , после элементарных преобразований формулу (28) можно записать:

$$\bar{P}_{\text{Э-П}} \approx 1 - (q_1 + q_4) \cdot (q_2 + q_5) \cdot (q_1 + q_3 + q_5) \cdot (q_2 + q_3 + q_4). \quad (30)$$

Для идентичных элементов (30) примет вид:

$$\bar{P}_{\text{Э-П}} = 1 - 36q^4. \quad (31)$$

**Нижняя граница.** Структурная функция мостиковой системы может быть представлена и в виде последовательного соединения всех минимальных разрезов (рисунок 16).

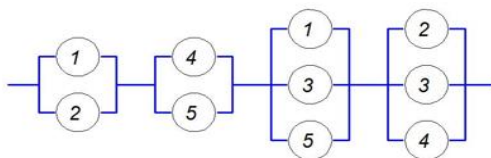


Рисунок 16 – Последовательное соединение всех минимальных разрезов

В отличие от обычной последовательно-параллельной системы последовательно включенные разрезы на рисунке 16, являются зависимыми, поскольку одни и те же элементы могут входить в несколько различных разрезов.

Поэтому в данном случае стандартная формула для последовательного соединения не может быть использована. Разрезы эти зависимы, причем отказ некоторого элемента  $k$  в одном из разрезов приводит к отказу одноименный элемент в другом разрезе.

Вероятность отказа последовательной системы из зависимых элементов выше, чем вероятность отказа такой же системы с независимыми одноименными элементами:

$$\begin{aligned} & P(\overline{(\bar{x}_1 \cap \bar{x}_2)} \cap \overline{(\bar{x}_4 \cap \bar{x}_5)} \cap \overline{(\bar{x}_1 \cap \bar{x}_3 \cap \bar{x}_5)} \cap \overline{(\bar{x}_2 \cap \bar{x}_3 \cap \bar{x}_4)} = 1) \geq \\ & \geq P(\overline{(\bar{x}_1 \cap \bar{x}_2)} = 1) \times P(\overline{(\bar{x}_4 \cap \bar{x}_5)} = 1) \times P(\overline{(\bar{x}_1 \cap \bar{x}_3 \cap \bar{x}_5)} = 1) \times \\ & \quad \times P(\overline{(\bar{x}_2 \cap \bar{x}_3 \cap \bar{x}_4)} = 1) \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя  $q_k = P(\bar{x}_k = 1)$ , находим нижнюю границу Эзари-Прошана для мостиковой системы:

$$\underline{P}_{\text{Э-П}} = (1 - q_1 q_2)(1 - q_4 q_5)(1 - q_1 q_3 q_5)(1 - q_2 q_3 q_4). \quad (33)$$

Формула (33) может быть записана в условной форме:

$$P \{ \langle \diamond \rangle \} \geq P \{ \langle \square \rangle \} \quad (34)$$

Для высоконадежных систем, у которых  $\max q_i \ll \frac{1}{n}$ , после элементарных преобразований (34) можно записать

$$\underline{P}_{\text{Э-П}} \approx 1 - q_1 q_2 - q_4 q_5. \quad (35)$$

Что для идентичных элементов даёт приближение

$$\underline{P}_{\text{Э-П}} \approx 1 - 2q^2. \quad (36)$$

При  $\max q_i \rightarrow 0$  верхняя и нижняя границы сближаются, стремясь к единице.

Таким образом, получены двусторонние оценки Эзари-Прошана для вероятности связности мостиковой системы:

$$\begin{aligned} (1 - q_1 q_2)(1 - q_4 q_5)(1 - q_1 q_3 q_5)(1 - q_2 q_3 q_4) \leq P_{\text{сист}} \leq 1 - (1 - p_1 p_4) \cdot \\ \cdot (1 - p_2 p_5) \cdot (1 - p_1 p_3 p_5) \cdot (1 - p_2 p_3 p_4). \end{aligned} \quad (37)$$

### 3.5 Граничные оценки Литвака-Ушакова

При расчете границ Литвака-Ушакова используются только реберно-непересекающиеся минимальные пути и минимальные разрезы сетевой системы, т.е. подмножества элементов такие, в которых не встречается какой-либо элемент дважды.

**Нижняя граница.** Сначала рассмотрим представления в виде различных наборов минимальных путей. Для мостиковой системы может быть составлено три таких варианта (рисунок 17).

Поясним процедуру построения набора минимальных путей для мостиковой системы.

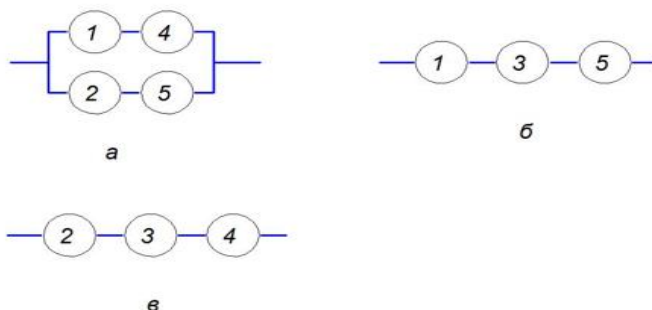


Рисунок 17 – Наборы независимых (реберно-непересекающихся) путей

а) Выделим путь  $(x_1; x_4)$ . Тогда в графе остаются элементы  $x_2, x_3, x_5$ . Элемент  $x_3$  – висячее ребро, т.е. является несущественным. Оставшиеся элементы образуют еще один независимый путь  $(x_2; x_5)$ . Итак, образован первый набор независимых минимальных путей:  $(x_1; x_4)$  и  $(x_2; x_5)$ .

б) Выделим путь  $(x_1; x_3; x_5)$ . После этого в сети остались только элементы соответствующие изолированным висячим ребрам, т.е. построение второго набора независимых путей закончено.

в) Выделим путь  $(x_2; x_3; x_4)$ . После этого в сети остались только элементы, соответствующие изолированным висячим ребрам, т.е. построение второго набора независимых путей закончено.

Таким образом, построены все возможные наборы независимых (реберно-непересекающихся) путей.

Сетевые структуры обладают естественным свойством монотонности: повышение надежности какого-либо элемента приводит к повышению надежности системы в целом, а понижение надежности элемента приводит, соответственно, к понижению надежности системы.

Вариант а) на рисунке 17 соответствует ситуации, когда элемент  $x_3$  абсолютно ненадежен (исключен); вариантам б) и в) соответствуют исключение элементов  $(x_2; x_4)$  и  $(x_1; x_5)$  соответственно. Во всех этих случаях надежность системы ухудшена. Иными словами, надежность всех вариантов, представленных на рисунке 17, может рассматриваться как нижняя граница неизвестного истинного значения. Из нижних оценок лучшей является наибольшая из них, поэтому для мостиковой системы можно записать следующие ее значения:

$$\underline{P}_{л-у} = \max \left( \underline{P}_{л-у}^{(a)}; \underline{P}_{л-у}^{(б)}; \underline{P}_{л-у}^{(в)} \right),$$

$$\underline{P}_{л-у} = \max(1 - (1 - p_1 p_4)(1 - p_2 p_5); p_1 p_3 p_5; p_2 p_3 p_4). \quad (38)$$

Для высоконадежных систем, т.е. при  $\max q_i \ll \frac{1}{n}$ , нижняя граница в данном случае будет иметь вид

$$\underline{P}_{Л-У} \approx \max(1 - (q_1 + q_4)(q_2 + q_5); 1 - (q_1 + q_3 + q_5); 1 - (q_2 + q_3 + q_4)). \quad (39)$$

При близких значениях  $q_i$  целесообразно работать по формуле

$$\underline{P}_{Л-У} \approx 1 - (q_1 + q_4)(q_2 + q_5). \quad (40)$$

**Верхняя граница.** Рассмотрим все подмножества независимых (реберно-непересекающихся) разрезов мостиковой структуры, представленной на рисунке 18. Всего имеется три таких представления.

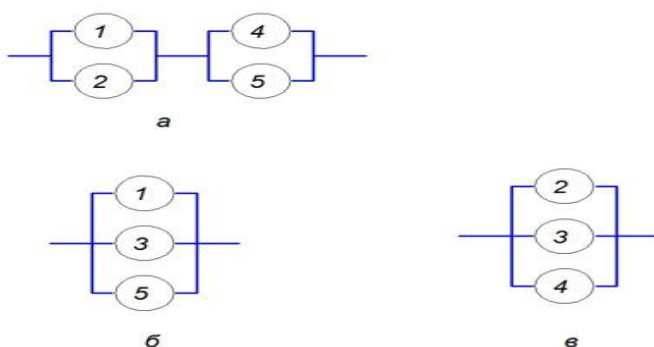


Рисунок 18 – Наборы независимых (реберно-непересекающихся) разрезов мостиковой структуры

Вариант (а) на рисунке 18 отвечает ситуации, когда элемент  $x_3$  абсолютно надежен; варианты (б) и (в) – случаям, когда элементы  $(x_2; x_4)$  и  $(x_1; x_5)$  соответственно абсолютно ненадежны. Во всех случаях надежность системы улучшена, причем надежность каждого из вариантов, представленных на рисунке (к нижней границе), может рассматриваться как верхняя граница истинного значения. Очевидно, лучшей из верхних оценок является наименьшая. Иными словами, применительно к мостиковой системе можно записать

$$\bar{P}_{Л-У} = \min(\bar{P}_{Л-У}^{(a)}; \bar{P}_{Л-У}^{(б)}; \bar{P}_{Л-У}^{(в)}), \quad (41)$$

$$\bar{P}_{Л-У} = \min((1 - q_1 q_2)(1 - q_4 q_5); 1 - q_1 q_3 q_5; 1 - q_2 q_3 q_4). \quad (42)$$

При  $\max q_i \ll \frac{1}{n}$  нижняя оценка будет иметь вид

$$\bar{P}_{Л-У} \approx \min(1 - (q_1 q_2 + q_4 q_5); 1 - q_1 q_3 q_5; 1 - q_2 q_3 q_4). \quad (43)$$

При близких значениях  $q_i$  можно рассматривать выражение

$$\bar{P}_{Л-У} \approx \min(1 - q_1 q_3 q_5; 1 - q_2 q_3 q_4). \quad (44)$$

Для идентичных элементов  $\bar{P}_{л-у} \approx 1 - q^3$ . (45)

Таким образом, получены верхняя и нижняя границы Литвака-Ушакова для мостиковой системы:

$$P_{\text{сист}} \geq \max(1 - (q_1 + q_4)(q_2 + q_5); 1 - (q_1 + q_3 + q_5); 1 - (q_2 + q_3 + q_4))$$

$$P_{\text{сист}} \leq \min((1 - q_1 q_2)(1 - q_4 q_5); 1 - q_1 q_3 q_5; 1 - q_2 q_3 q_4). \quad (46)$$

### 3.6 Модифицированный метод Литвака-Ушакова

В основе метода лежит идея построения граничных оценок Литвака-Ушакова для вероятности связности сетевой системы. Ради удобства представления проведем изложение с помощью примера.

**Нижняя граница.** Рассмотрим сетевую структуру, представленную на рисунке 19, а.

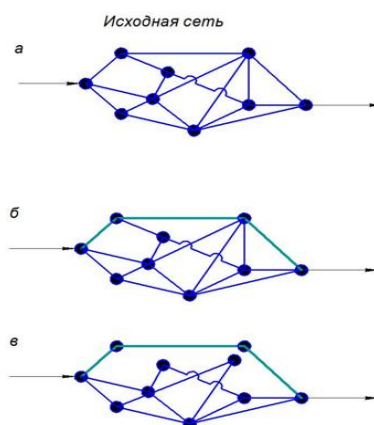


Рисунок 19 – Разбор минимальных путей

Нижняя граница вероятности связности находится путем выделения некоторого минимального пути и включения его параллельно оставшейся сети. Выделим путь, проходящий через верхние вершины, и исключим его из графа. Оставшийся подграф и параллельный ему выделенный путь представлены на рисунке 19, б, а на рисунке 19, в – вновь образованный граф в более наглядной форме. Заметим, что в графе появляются расщепленные вершины, поскольку исключение ребер какого-либо пути не мешает использовать принадлежащие ему вершины для других путей. Сам по себе подграф, параллельный выделенному пути, не столь уж прост для численного анализа, поэтому при необходимости он может быть еще более упрощен. Когда будут выделены все минимальные пути, такая оценка совпадает с одной из нижних границ Литвака-Ушакова.

Подобное разложение не является единственным. Пример другого разложения того же графа относительно другого выбранного минимального пути приведен на рисунке 20.

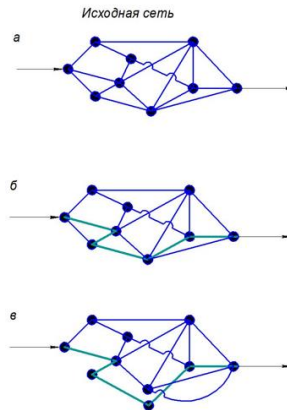


Рисунок 20 – Разложение графа

Число возможных итераций в каждой реализации процесса декомпозиции не превышает числа ребер в самом тонком минимальном разрезе (условие независимости путей).

При предложенной декомпозиции сетевой структуры могут образовываться или висячие ребра (т.е. ребра, подсоединенные лишь к одной вершине), или даже изолированные ребра. Это лишний раз подчеркивает то утверждение, что данная процедура приводит к нижней оценке (некоторые из элементов системы фактически заменяются на абсолютно ненадежные).

**Верхняя граница.** Верхняя граница вероятности связности находится путем выделения некоторого минимального разреза и включения его последовательно к оставшейся подсети. Рассмотрим прежнюю сетевую структуру (рисунок 21, а).

Выделим в рассматриваемом графе минимальный разрез, примыкающий к левому полюсу сети (рисунок 21, б). Результирующий граф приведен на рисунке 21, в.

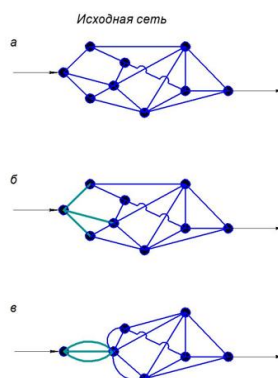


Рисунок 21 – Разложение графа

Подобное разложение не является единственным. На рисунке 22 выделен разрез в центре графа, разбивающий его на два подграфа – слева и справа от выбранного разреза.

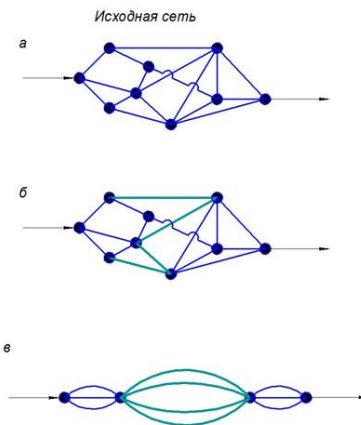


Рисунок 22 – Разложение графа

Левые вершины ребер выбранного разреза стягиваются в одну левую вершину, а все правые вершины стягиваются в одну правую вершину. Процесс стягивания левых вершин разреза в одну точку эквивалентен тому, что соответствующие ребра между исходными левыми вершинами полагаются абсолютно надежными. То же относится и к процессу стягивания в одну точку правых вершин того же разреза. Поэтому полученная оценка вероятности связности будет верхней.

Естественно, что качество оценки определяется успешностью выбора исходного разреза. При необходимости процедуру разложения оставшегося графа можно продолжить. Число таких итераций не превышает числа ребер в кратчайшем минимальном пути. В конечном счете, после того как будут выделены все минимальные разрезы, эта оценка совпадает с одной из верхних границ Литвака-Ушакова.

### 3.7 Метод рекуррентных вложений

Рекуррентные сетевые системы чаще строятся по следующему принципу: каждая подсистема верхнего уровня была структурно идентична подсистеме нижнего уровня. Полагается, что все атомарные элементы идентичны. Рассмотрим это с помощью разобранной ранее мостиковой системы. Пусть имеется исходная мостиковая система. На первом этапе формируем новую вложенную сетевую двухполюсную систему, каждый из элементов которой представляет собой также мостиковую систему.

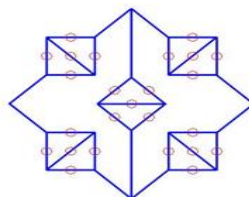


Рисунок 22 – Пример вложенной сетевой двухполюсной системы



Вновь полученную структуру будем называть мостиковой структурой второго порядка. На следующем шаге итеративного построения получается мостиковая структура третьего порядка (рисунок 23) и т.д.

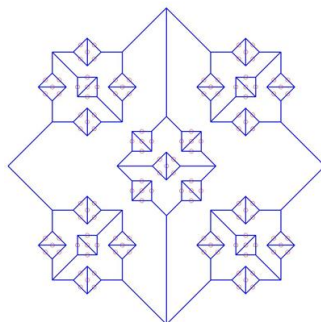


Рисунок 23 – Мостиковая структура третьего порядка

Предположим, что атомарные элементы системы идентичны и независимы, а вероятность безотказной работы каждого из них равна  $p$ . Обозначим функцию связности для мостиковой системы через  $p_1 = h(p)$ . Тогда для системы на рисунке 22, можно записать функцию связности в виде

$$p_2 = h(p_1) = h(h(p)), \quad (47)$$

а для системы на рисунке 23

$$p_3 = h(p_2) = h(h(h(p))) \quad (48)$$

Структура вычислительного процесса проиллюстрирована на рисунке 24, где изображена зависимость  $h(p)$ .

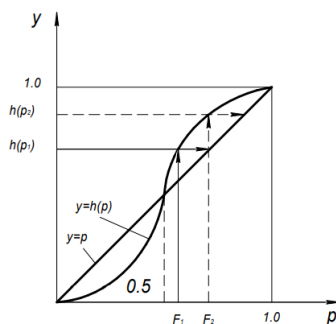


Рисунок 24 – Структура вычислительного процесса

Действительно, надежность элемента  $p_1$  соответствует значению  $h(p_1) = p_2$ , элемента  $p_2$  – значению  $h(p_2) = p_3$  и т.д.

Вложенная сетевая система может быть построена и с использованием иных исходных структур.

### 3.8 Метод разбиения на модули

Метод заключается в выделении из сети модулей, которые по своей структуре являются достаточно простыми. Пояснить этот метод лучше всего с помощью примера.

**Пример.** Рассмотрим сеть, представленную на рисунке 25. Здесь через  $S$  обозначена система в целом, а через  $S_i$  и  $S_{ij}$  – подсистемы нижних уровней.

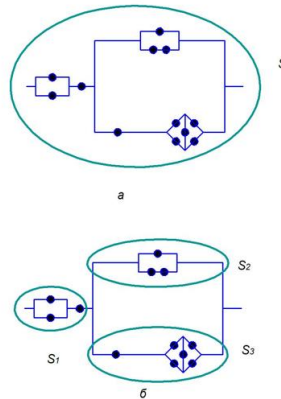


Рисунок 25 – Система с сетевой структурой

Обозначим через  $P(S)$  вероятность связности графа, а через  $P(S_i)$  и  $P(S_{ij})$  – соответствующие вероятности для подсистем различного уровня. Используем в дальнейшем  $Q = 1 - P$ . Для рассматриваемой сетевой системы после разложения на модули первого уровня можно записать:

$$P(S) = P(S_1)(1 - Q(S_2))(1 - Q(S_3)), \quad (49)$$

где, в свою очередь,  $P(S_1) = P(S_{11})P(S_{12})$ ,  $P(S_2) = 1 - Q(S_{21})Q(S_{22})$  и  $P(S_3) = P(S_{31})P(S_{32})$ .

Все структуры, кроме  $S_{32}$ , являются приводимыми, а  $S_{32}$  представляет собой уже известную мостиковую систему.

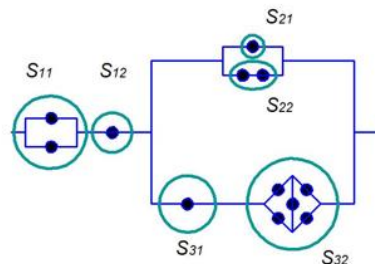


Рисунок 26 – Система с сетевой структурой

Возможно редуцировать модули не до уровня приводимых систем, а выделив некий модуль, затем применять граничные оценки Эзари-Прошана или Литвака-Ушакова. Например, для предыдущей сетевой системы остановившись на уровне модулей  $S_1, S_2, S_3$ , вести дальнейший расчет верхней граничной и верхней оценки соответственно по формулам

$$\underline{P}(S) = \underline{P}(S_1) \left(1 - \overline{Q}(S_2)\overline{Q}(S_3)\right), \quad (50)$$

$$\overline{P}(S) = \overline{P}(S_1) \left(1 - \underline{Q}(S_2)\underline{Q}(S_3)\right). \quad (51)$$

Здесь в нижнюю границу  $\underline{P}$  входят верхние оценки  $\overline{Q}(S_2), \overline{Q}(S_3)$ , а верхнюю границу  $\overline{P}$  – нижние границы  $\underline{Q}(S_2)$  и  $\underline{Q}(S_3)$ .

### 3.9 Системы с ветвящейся структурой

Многие системы имеют ветвящуюся структуру: они состоят из исполнительных элементов, которые управляются элементами высшего уровня иерархии управления; те, в свою очередь, элементами следующего уровня управления и т.д. Пример системы с ветвящейся структурой представлен на рисунке 27.

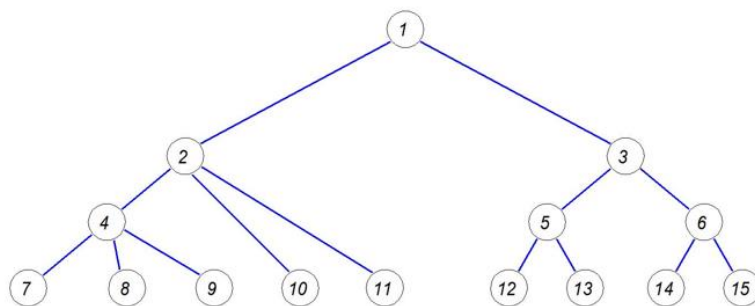


Рисунок 27 – Система с ветвящейся структурой

Такую структуру имеют большие системы вооружения (практически все командные системы, начиная от управления сухопутными войсками и кончая управлением безлюдными пусковыми установками баллистических ракет), энергетические системы, транспортные системы и др. Пример ветвящейся структуры приведен на рисунке 27. На этом рисунке элементы с 1 по 6 являются управляющими, а элементы с 7 по 15 – исполнительными. Отказ управляющего элемента приводит к отказу всех подчиненных ему исполнительных элементов, даже если они сами по себе и работоспособны. Например, отказ элемента 3 приводит к отказам исполнительных элементов с 12 по 15, а отказ элемента 1 приводит к отказу всех элементов системы. Исполнительные элементы оказываются зависимыми через общие управляющие элементы, поэтому оценка коэффициента эффективности таких систем оказывается достаточно нетривиальной.

### 3.10 Система с коэффициентом эффективности аддитивного типа

Рассмотрим систему с ветвящейся структурой, каждый исполнительный элемент которой вносит свою независимую долю в общий выходной эффект системы.

Назовем исполнительный элемент нормально функционирующим, если он работоспособен сам и нормально функционируют все управляющие им элементы, т.е. имеется цепочка связи этого элемента до управляющего элемента самого высокого уровня.

Пусть  $x_i$  есть индикаторная функция элемента  $i$ :

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i - \text{ый исполнительный элемент функционирует нормально,} \\ 0, & \text{если } i - \text{ый исполнительный элемент не функционирует нормально,} \end{cases}$$

а  $\delta_i$  есть «вклад» элемента  $i$ .

Это означает, что если все исполнительные элементы нормально функционируют, то выходной эффект системы равен  $\sum_{i=1}^n \delta_i$ . Для систем кратковременного действия в каждом состоянии достаточно знать мгновенное значение эффективности функционирования системы (ее выходного эффекта) в текущем состоянии. Можно записать случайное значение суммарного эффекта всех элементов как  $\sum_{i=1}^n x_i \delta_i$ . Для каждого исполнительного элемента можно представить вероятность нормального функционирования в виде  $P_i = p_i R_i$ ; здесь  $p_i$  – вероятность работоспособности  $i$ -го исполнительного элемента, а  $R_i$  – вероятность того, что работоспособны все элементы, управляющие им, – она равна  $R_i = \prod_{j \in G_i} p_j$ , где  $G_i$  – цепочка управляющих элементов непосредственно для  $i$ -го элемента.

Коэффициент эффективности системы с аддитивным выходным эффектом может быть записан как

$$W_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^n p_i R_i \delta_i. \quad (52)$$

**Пример.** Для системы, структура которой изображена на рисунке 27, коэффициент эффективности может быть записан в виде

$$W_{\text{сист}} = p_1 p_2 p_4 (p_7 \delta_7 + p_8 \delta_8 + p_9 \delta_9) + p_1 p_2 (p_{10} \delta_{10} + p_{11} \delta_{11}) + p_1 p_3 p_5 (p_{12} \delta_{12} + p_{13} \delta_{13}) + p_1 p_3 p_6 (p_{14} \delta_{14} + p_{15} \delta_{15}).$$

### 3.11 Система с резервированием исполнительных элементов

Рассмотрим изображенную на рисунке 27 систему с симметричной ветвящейся структурой, у которой элементы одного и того же уровня абсолютно идентичны между собой. Пусть считается, что система выполняет требуемую операцию, если нормально функционирует хотя бы один ее исполнительный элемент. В данном случае обычная формула для нагруженного резервирования не годится, поскольку она была получена в предположении независимости исполнительных элементов.

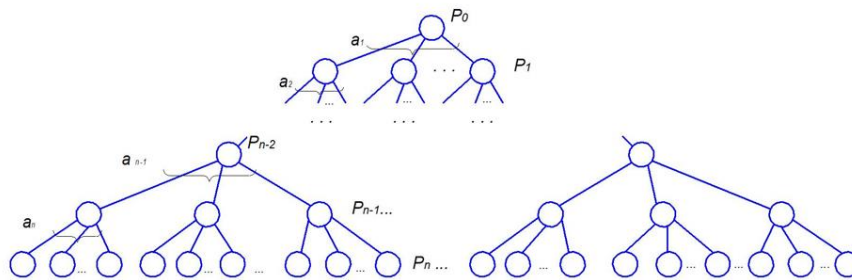


Рисунок 28 – Система с ветвящейся структурой

Для каждой группы из  $\alpha_n$  исполнительных элементов можно выразить вероятность успешного выполнения задачи с учетом того, что соответствующий элемент второго уровня нормально функционирует, а  $q = 1 - p$ , как

$$R_{n-1} = p_{n-1}(1 - q_n^{\alpha_n}). \quad (53)$$

Продолжая аналогичные рассуждения, можно, обозначив  $Q = 1 - R$ , записать для следующего уровня

$$R_{n-2} = p_{n-2}(1 - (Q_{n-1})^{\alpha_{n-1}}). \quad (54)$$

В результате вероятность успешного выполнения системой операции  $W$ :

$$W = p_0(1 - (Q_1)^{\alpha_1}), \quad (55)$$

где величины  $Q$  находятся рекуррентно указанным выше способом. Таким образом, вычисляя последовательно (53), (54) и т.д., мы приходим к финальному значению, определяемому согласно (55).

**Пример.** Рассмотрим систему, представляющую собой стойку оборудования, включающую четыре съемных блока, в каждом из которых содержится по шесть съемных плат, из которых каждые три имеют общий интерфейс. Каждый съемный блок имеет управляющую плату на все шесть съемных плат. Вся стойка в целом имеет один общий блок питания. Схема представлена на рисунке 29.

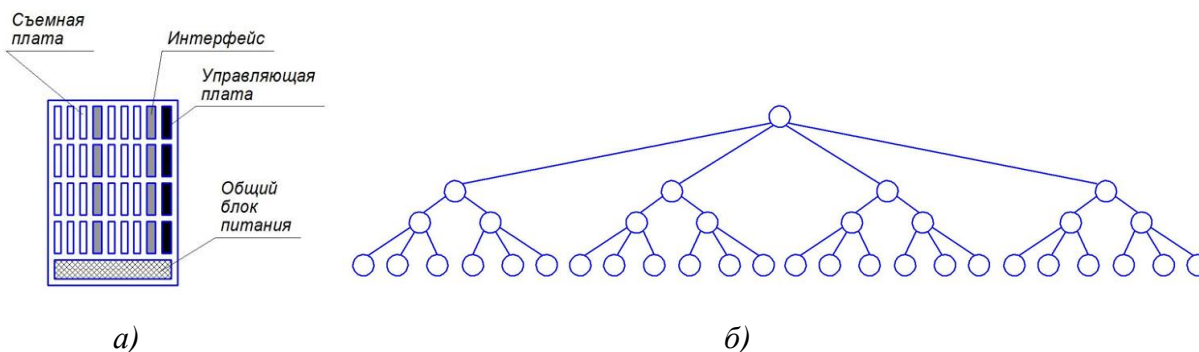


Рисунок 29 – Система с ветвящейся структурой

Найти вероятность того, что хотя бы одна плата будет функционировать нормально. Соответствующие вероятности безотказной работы каждого из элементов представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения вероятностей безотказной работы элементов

Наименование элемента	Вероятность безотказной работы
Съемная плата	$p_1$
Интерфейс для трех плат	$p_2$
Управляющая плата на блок	$p_3$
Общий блок питания	$p_4$

**Решение.** На рисунке 29, *a* показана конструкция системы, а на рисунке 29, *б* – ее формализованная структура.

Формулы для расчета:  $R_3 = p_3(1 - (1 - R_4)^3)$ ;  $R_2 = p_2(1 - (1 - R_3)^3)$ ,  
 $W = R_1 = p_1(1 - (1 - R_2)^3)$ .

Если, например, положить все  $p_i = 0,9$ , то получим

$R_3 = 0,9(1 - (1 - 0,9)^3) \approx 0,899$ ,  $R_2 = 0,9(1 - (1 - 0,899)^3) \approx 0,891$ ,  
 $W = R_1 = 0,9(1 - (1 - 0,891)^3) \approx 0,899$ ,

т.е. видно, что фактически надежность такой системы определяется единственным незарезервированным элементом – элементом верхнего уровня иерархии.

Можно заметить, что в данном случае мы имеем обычную приводимую параллельно-последовательную структуру.

## Библиографический список

1. Половко, А.М. Сборник задач по теории надежности/ А.М. Половко, И.И. Маликов. – М.: «Советское радио», 1972 г.
2. Половко, А.М. Основы теории надежности. Практикум/ А.М. Половко, С.В. Гуров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам/ Д.Т. Письменный – М.: Айрис-пресс, 2007.
4. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов/ В.Е. Гмурман. – М: Высшая школа, 1998.
5. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учебное пособие для студ. вузов/Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: «Академия», 2005 г.
6. Фадеева, Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций/Л.Н. Фадеева. – М.: Эксмо, 2006 г.
7. Носов, В.В. Диагностика машин и оборудования: учебное пособие/В.В. Носов. – СПб.: Лань, 2012.
8. Ананьин, А.Д. Диагностика и техническое обслуживание машин: учебное пособие для студ. вузов/А.Д. Ананьин и др. – М.: «Академия», 2008 г.

Учебное издание

Азизян Инара Артушовна

**ДИАГНОСТИКА И НАДЁЖНОСТЬ СИСТЕМ В МАШИНОСТРОЕНИИ**

Учебное пособие

Подписано в печать \_\_\_\_\_ Тираж 5 экз.  
Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета  
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53