Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

О.А. Чихачева, Е.И. Миронова

Методы оптимальных решений

Методические указания к лабораторным работам

Рязань
2018

УДК 33:311
ББК 65я73:60.6
Ч–72

Чихачева, О.А.
Ч–72 Методы оптимальных решений: методические указания к лабораторным работам / О.А. Чихачева, Е.И. Миронова – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2018. – 40 с.

Данные методические указания предназначены для подготовки и проведения лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимальных решений». Учебный материал разбит на занятия в соответствии с образовательными стандартами по направлению подготовки 38.03.01 Экономика.

В пособии по каждой теме представлены вопросы для подготовки к лабораторной работе, по 20 вариантов заданий для организации индивидуальной работы со студентами на лабораторных работах.

УДК 33:311
ББК 65я73:60.6

Содержание

Введение

Экономико-математическая подготовка студентов является важнейшей составляющей формирования профессиональной компетенции специалистов экономического профиля.

Цель изучения дисциплины «Методы оптимальных решений» состоит в приобретении теоретических знаний и формировании навыков экономического анализа, моделирования и исследования простейших реальных процессов, а также навыков использования аналитических и вычислительных методов для освоения соответствующих разделов всех специальных и прикладных дисциплин.

Данные методические рекомендации предназначены для подготовки и проведения лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимальных решений». Рекомендации составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика.

Материал пособия разделен на лабораторные работы. По каждой работе представлены вопросы для подготовки к занятию, задания для индивидуальной работы на занятиях по вариантам, алгоритм выполнения работы.

В конце пособия приведен библиографический список.

1 Лабораторная работа № 1. Дискретные и непрерывные случайные величины. Законы распределения

Вопросы для подготовки к занятию

1. Дайте понятие случайной величины. Каких видов бывают случайные величины? От чего это зависит?

2. Определите множество возможных значений СВ и ее вид (дискретная или непрерывная).

   1) Опыт – бросание игральной кости; случайная величина X – число выпавших очков.

   2) Опыт – работа ЭВМ после очередного ремонта; случайная величина T – время наработки ЭВМ до первого отказа (сбоя).

   3) Опыт – ведется тестирование изделий до появления первого исправного изделия; случайная величина Y – число тестов, которое будет проведено.

   4) Опыт – измерение сопротивления линии (с помощью прибора с грубыми делениями); результат округляется до ближайшего целого значения. Случайная величина X – ошибка от округления.

3. Что представляет собой функция распределения? Плотность распределения?

7. Что представляет схема Бернулли?

8. Вспомните формулу Бернулли.

9. Вспомните формулу Пуассона.

Задания для аудиторной работы

1. Игральную кость подбрасывают 10 раз. Найти вероятность того, что шестерка выпадет:

   а) два раза.

   б) не более восьми раз

   в) хотя бы один раз

2. Вероятность выхода из строя одного элемента устройства, в течение t часов работы, равна 0,002. Какова вероятность того, что за время t из 1500 независимо работающих элементов выйдет из строя:

   а) 4 элемента;

   б) не более 2 элемента?

3. Как решить задачу 2, используя понятия функция и плотность распределения?

Индивидуальные задания для выполнения на ЭВМ

Используя данные таблицы 1, исследуйте для приведенного в задании эксперимента точность формулы Пуассона. Для сравнения выполните вычисления для $n_1 = 0{,}01n; \quad p_1 = 100\,p$.

Магазин продает в течение одного дня n коробок конфет, часть которых с сюрпризом. Вероятность того, что коробка с сюрпризом, равна p. Найти вероятность того, что в течение дня продано более k коробок с сюрпризом.

Таблица 1 – Исходные данные к лабораторной работе №1

N	***n***	***p***	***k***	***N***	***n***	***p***	***k***
1	1000	0.003	3	**11**	2000	0.0020	6
2	1100	0.0029	4	**12**	2100	0.0019	3
3	1200	0.0028	5	**13**	2200	0.0018	4
4	1300	0.0027	5	**14**	2300	0.0017	6
5	1400	0.0026	4	**15**	2400	0.0016	8
6	1500	0.0025	3	**16**	2500	0.0015	5
7	1600	0.0024	3	**17**	2600	0.0014	4
8	1700	0.0023	6	**18**	2700	0.0013	3
9	1800	0.0022	9	**19**	2800	0.0012	3
10	1900	0.0021	9	**20**	2900	0.0011	4

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. Вычислите требуемые вероятности по формуле Бернулли.
2. Вычислите требуемые вероятности по формуле Пуассона.
3. Сравните полученные результаты. Сделайте вывод.

2 Лабораторная работа № 2. Графики функции и плотности распределения

Вопросы для подготовки к занятию

1. Каким соотношением определяется функция распределения?
2. Какими свойствами обладает
   а) функция распределения?
   б) плотность распределения?

3 Что геометрически интерпретируется как вероятность того, что случайная точка X попадет левее заданной точки x?

4. Какими соотношениями связаны функция и плотность распределения?

5. Как вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал от a до b
   а) зная плотность распределения?
   б) зная функцию распределения?

Как это иллюстрируется геометрически?

Индивидуальные задания для выполнения на ЭВМ

Используя данные таблицы 2, постройте биномиальное распределение из серии из n независимых испытаний с вероятностью успеха p, пуассоновское распределение с параметром λ. Для каждого распределения постройте графики распределения и функции распределения; вычислите вероятность попадания значений случайной величины в интервал (a, b).

Таблица 2 – Исходные данные к лабораторной работе №2

N	n	p	λ	a	b
1	20	0.1	1.00	2	4
2	22	0.11	0.95	3	5
3	24	0.12	0.90	2	5
4	26	0.13	0.85	3	6
5	28	0.14	0.80	2	5
6	30	0.15	0.75	3	6
7	21	0.16	0.70	2	8
8	23	0.17	0.65	3	9
9	25	0.18	0.60	2	7
10	27	0.19	0.55	3	8
11	29	0.20	0.50	3	10
12	31	0.21	1.05	4	10
13	20	0.22	1.10	3	5
14	22	0.23	1.15	4	6
15	24	0.24	1.25	3	6
16	26	0.25	1.30	4	7
17	28	0.26	1.35	3	7
18	30	0.27	1.40	4	8
19	21	0.28	1.45	3	10
20	23	0.29	1.50	4	11

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. Введите параметры распределения.
2. Определите интервал изменения значений случайной величины.
3. Определите вектор, номера компонент которого равны значениям случайной величины, и присвойте компонентам вектора значения вероятности соответствующих значений.
4. Определите функцию распределения случайной величины. Постройте графики распределения и функции распределения случайной величины.
5. Вычислите вероятность попадания значения случайной величины в указанный интервал как разность соответствующих значений функций распределения.
6. Измените значения параметров распределения и повторите вычисления. Сравните полученные результаты.
7. Выполните вычисления пп. 1–8 для всех приведенных в задании распределений

Контрольные вопросы

1. Понятие случайной величины. Приведите примеры дискретных и непрерывных случайных величин.
2. Определение функции распределения, плотности распределения случайной величины.
3. Свойства функции распределения.
4. Распределение Пуассона. Приведите примеры величин, распределенных по Пуассону.
5. Биномиальное распределение (схема Бернулли).

6. Сравнительный анализ формул Бернулли и Пуассона (какая из них точная, а какая приближённая?). В каком случае применяется каждая из указанных формул?

7. В результате вычисления по точной и асимптотической формуле в первом случае ($n = 2000; \quad p = 0,004$) вероятности совпали, а во втором случае ($n = 20; \quad p = 0,4$) – отличаются. Почему?

8. В каком из ниже перечисленных случаев можно воспользоваться формулой Пуассона: а) $n = \dfrac{a^2}{a+1}; \quad p = \dfrac{a^2+10}{a^3}; \quad a \to \infty$; б) $n = a^3; \quad p = \dfrac{a^3}{a^5+3a^2}; \quad a \to \infty$; в) $n = \dfrac{a^2}{a+5}; \quad p = \sin\dfrac{1}{a}; \quad a \to \infty$? Ответ поясните.

9. Как найти по графику (в среде MathCAD) наиболее вероятное значение случайной величины?

10. Чему равна вероятность попадания случайной величины в заданный интервал (a,b)?

11. В ящике 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в ящик перед извлечением следующего и шары в ящике перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется 2 белых?

12. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

13. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет 3 девочки и 2 мальчика (не больше 3 девочек) Вероятности рождения мальчик и девочки предполагаются одинаковыми.

14. В партии; из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

15. Средства MathCAD для построения и исследования графиков.

16. Встроенные функции MathCAD для работы с биномиальным и пуассоновским распределениями.

3 Лабораторная работа № 3-4. Цепи Маркова

Вопросы для подготовки к занятию

1. Понятие случайного процесса, марковского процесса, классификация марковских процессов.

2. Определение графа состояний, вероятностей состояний цепи Маркова.

3. Пусть система может находиться в одном из состояний S_1, S_2, S_3 и матрица вероятностей перехода из состояния в состояние за один шаг:

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$ Построить граф, соответствующий этой матрице.

4. Способы задания переходных вероятностей.

5. Какая цепь Маркова называется однородной?

6. Какая из ниже перечисленных переходных матриц является однородной: а) $\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, б) $\overline{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$, в) $\overline{P} = \begin{pmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & P_{13}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & P_{23}(t) \\ P_{31}(t) & P_{32}(t) & P_{33}(t) \end{pmatrix}$. Ответ поясните.

7. Сформулируйте теорему о вычислении вероятностей состояний системы однородной цепи Маркова.

8. Что показывает матрица перехода из одного состояния системы в другое состояние за n шагов? Как ее вычислить, если известна переходная матрица за один шаг?

9. Задана матрица перехода $\overline{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода $\overline{P}_3 = \begin{pmatrix} P_{11}(3) & P_{12}(3) \\ P_{21}(3) & P_{22}(3) \end{pmatrix}$

10. В двух отделениях ящика находятся три шара. Каждую секунду выбирается случайным образом один из трех шаров и перекладывается из одного отделения в другое. В качестве состояния Маковской цепи рассматривается число шаров в первом отделении. Выписать матрицу перехода из состояния в состояние за один шаг, за три шага.

11. Даны вектор начальных вероятностей $q = (q_1, q_2, \ldots, q_r)$ и переходные вероятности $p_{i,j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$ цепи Маркова. Найти вероятность того, что система через n шагов будет находиться в состоянии S_j.

12. Особенности непрерывных цепей Маркова.

13. Где применяется система дифференциальных уравнений Колмогорова?

14. Пользуясь мнемоническим правилом, запишите систему дифференциальных уравнений Колмогорова в общем виде.

15. Понятие финальных вероятностей и эргодического процесса.

16. Необходимое и достаточное условие существования предельных вероятностей.

17.Как выглядит система дифференциальных уравнений Колмогорова для эргодического процесса?

18. Каким образом можно найти финальные вероятности в стационарном режиме?

19. Какое условие необходимо для нахождения точных значений финальных вероятностей?

Индивидуальные задания для выполнения на ЭВМ

Задание 1. Задана матрица P_1 вероятностей перехода дискретной цепи Маркова из i-го состояния в j-ое за один шаг (i,j =1, 2). Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент времени t=0 определяется вектором $\vec{q}$. Используя данные таблицы 3, найти:

1) матрицу P_2 перехода цепи из состояния i в состояние j за два шага;

2) распределение вероятностей по состояниям в момент t=2;

3) вероятность того, что в момент t=1 состояние цепи будет A_1;

4) стационарное распределение.

Таблица 3 – Исходные данные к заданию 1 лабораторной работы №3

№ вар	P_1	$\vec{q}$	**№ вар**	P_1	$\vec{q}$
1	$\begin{pmatrix} 0.15 & 0.85 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \end{pmatrix}$	**11**	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$	**13**	$\begin{pmatrix} 0.45 & 0.55 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0.35 & 0.65 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.35 & 0.65 \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.55 & 0.45 \end{pmatrix}$	**15**	$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.65 & 0.35 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 0.05 & 0.95 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$	**17**	$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$	**19**	$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$

Задание 2. Задана матрица Λ интенсивностей переходов непрерывной цепи Маркова. Используя данные таблицы 4: составить размеченный граф состояний, соответствующий матрице Λ; составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; найти предельное распределение вероятностей.

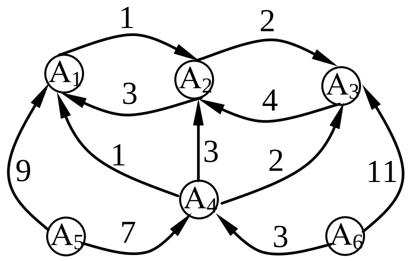
Таблица 4 – Исходные данные к заданию 2 лабораторной работы № 3

№ Варианта	Матрица интенсивностей переходов Λ	№ Варианта	Матрица интенсивностей переходов Λ
1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	**11**	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & 9 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	**13**	$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	**15**	$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	**17**	$\begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} -10 & 9 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	**19**	$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

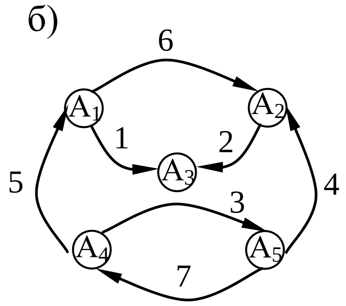
Задание 3. Определить, существуют ли финальные вероятности для марковского случайного процесса, размеченный граф состояний которого изображен на рисунке. Если финальные вероятности существуют, то найти их.

<u>*Указание.*</u> Проведите классификацию состояний системы и примените теорему о необходимом и достаточном условии существования финальных вероятностей. При необходимости составьте СДК и найдите финальные вероятности.

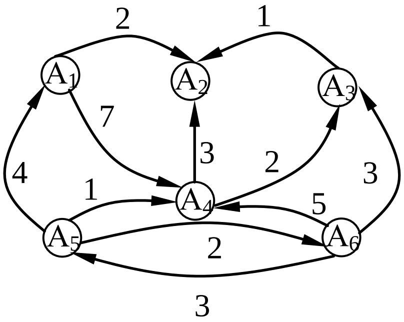
1. а)



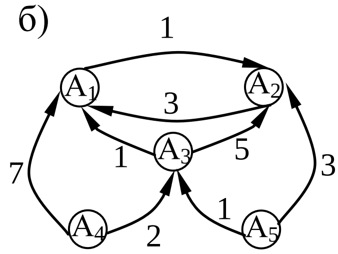
б)



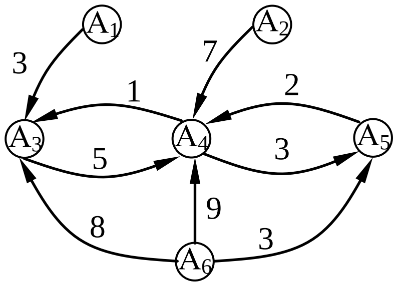
2. а)



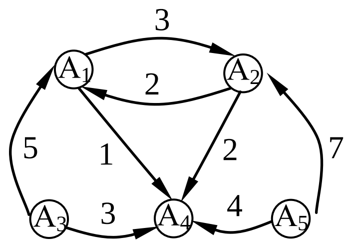
б)



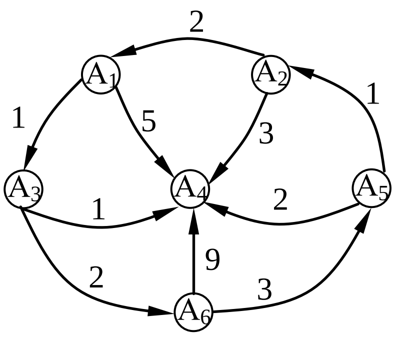
3. а)



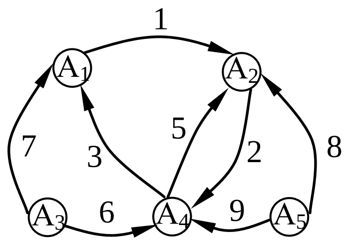
б)



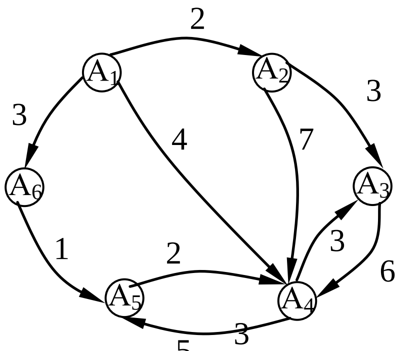
4. а)



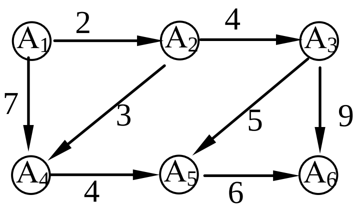
б)



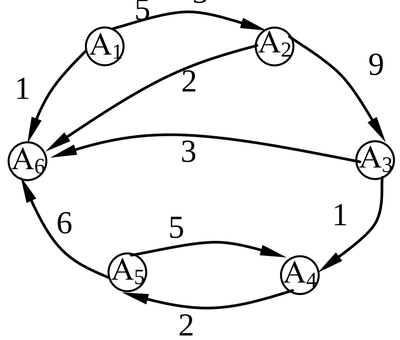
5. а)



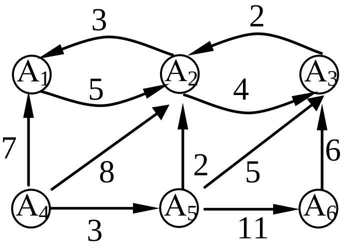
б)



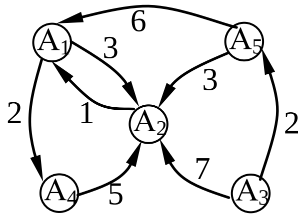
6. а)



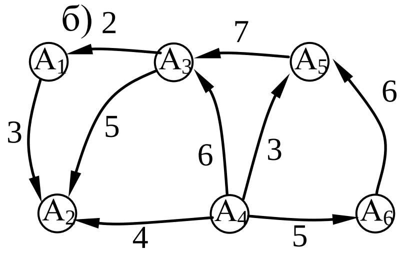
б)



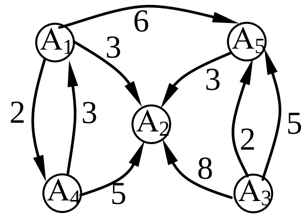
7. а)



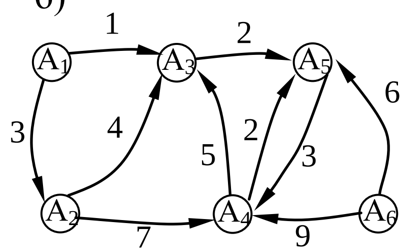
б)



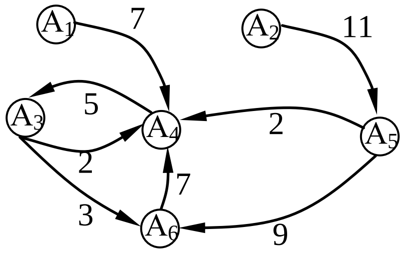
8. а)



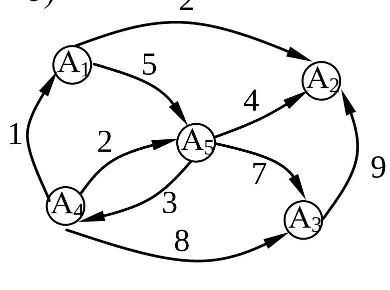
б)



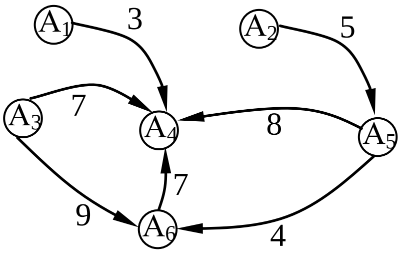
9. а)



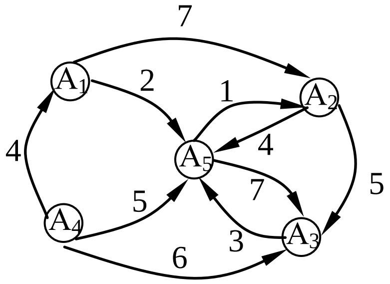
б)



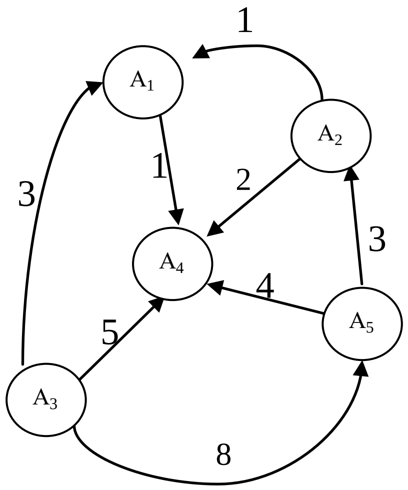
10. а)



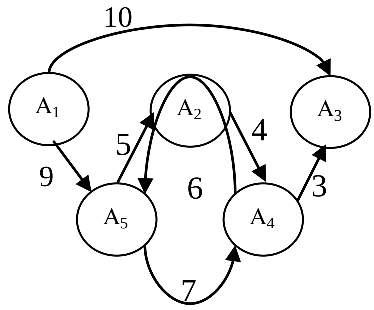
б)



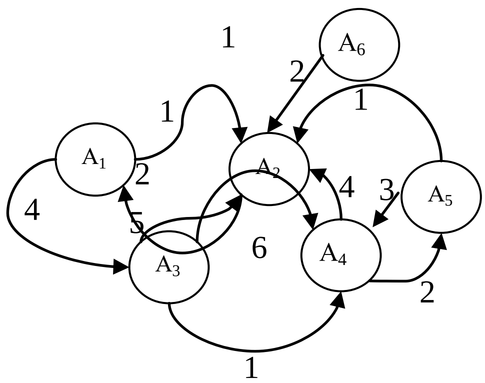
11. а)



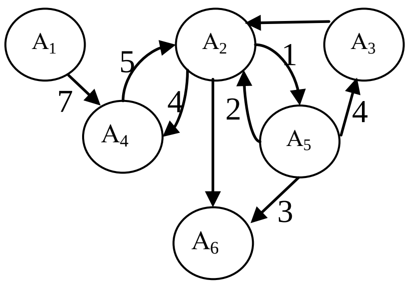
б)



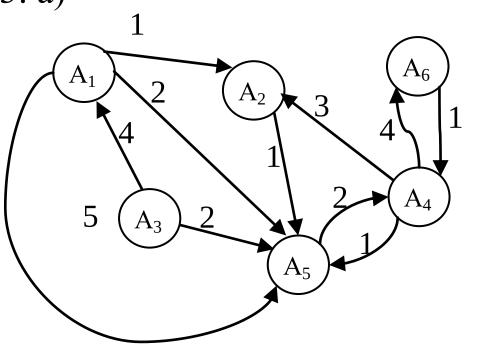
12. а)



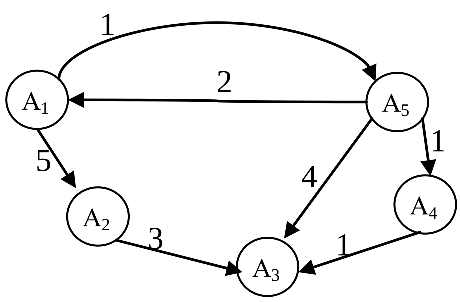
б)



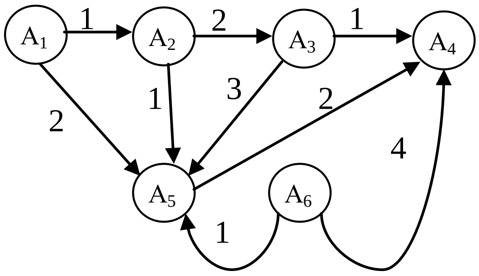
13. а)

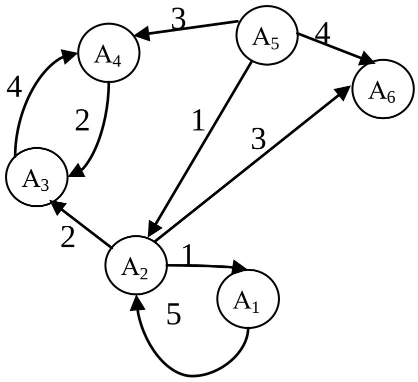


б)

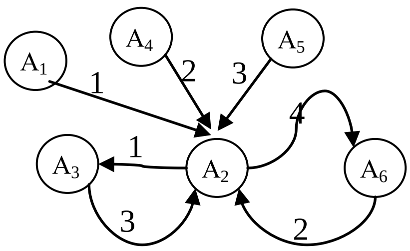


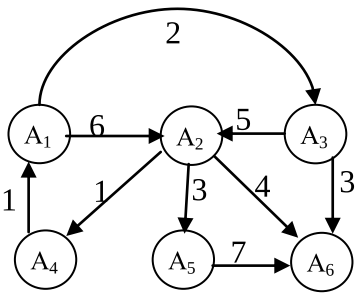
14. а) б)



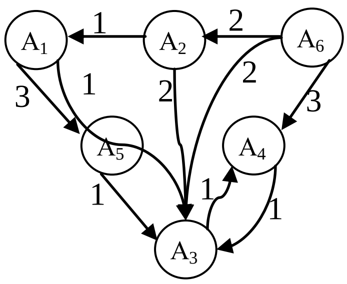


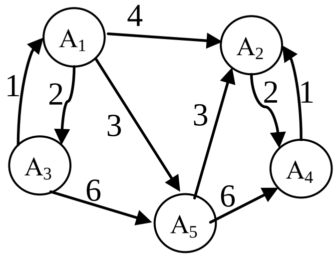
15. а) б)



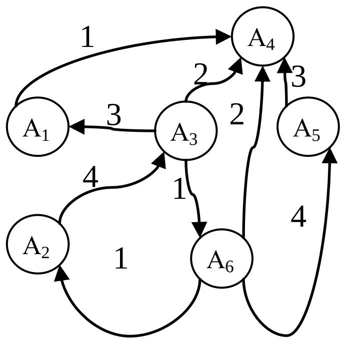


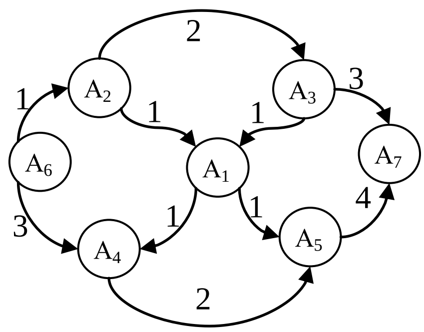
16. а) б)



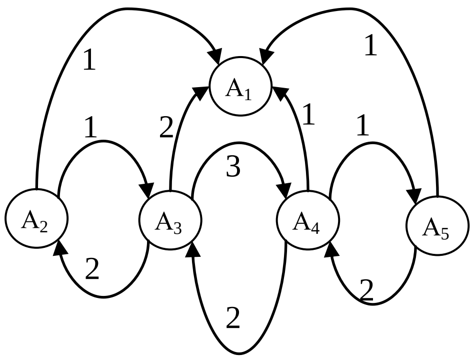


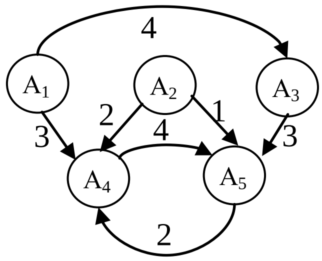
17.а) б)



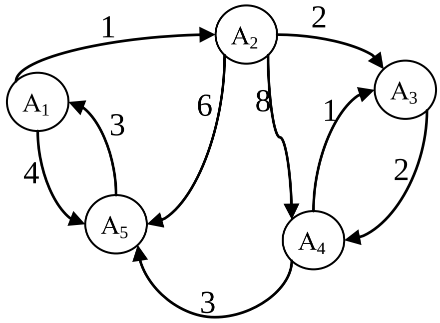


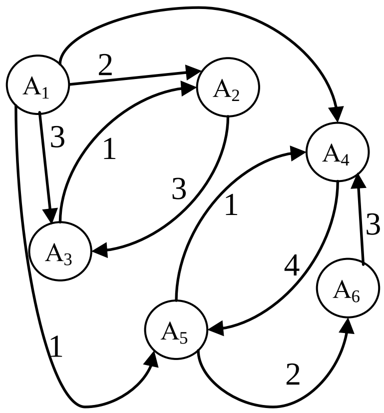
18. а) б)



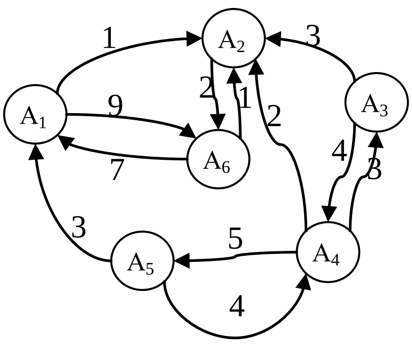


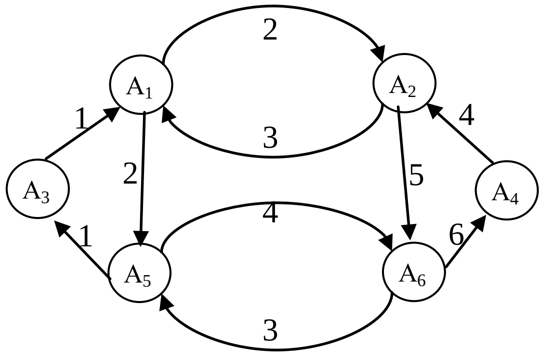
19. а) б)





20. а) б)





Контрольные вопросы

1. Случайное блуждание. Пусть на прямой *0x* в точке с целочисленной координатой $x=n$ находится материальная частица. В определенные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ частица испытывает толчки. Под действием толчка частица с вероятностью p смещается на единицу вправо и с вероятностью $1-p$ на единицу влево. Ясно, что положение (координата) частицы после толчка зависит от того, где находилась частица после непосредственно предшествующего толчка, и не зависит от того, как она двигалась под действием остальных предшествующих толчков.

Будет ли случайное блуждание примером цепи Маркова, и если да, то какими свойствами она будет обладать?

2. Дайте сравнительную характеристику дискретных и непрерывных цепей Маркова.

3. На конкретном примере пояснить понятия «граф состояния», «вероятности состояний».

4. Дана переходная матрица. $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$. 1) Что показывает переходная матрица? 2) В скольких состояниях может находиться эта система? 3) Какова вероятность перехода из состояния 1 в состояние 2? Из состояния 2 в состояние 1? 4) Что означает вероятность $p_{22} = 0{,}5$?

5. На окружности расположены шесть точек $E_1, E_2, \ldots, E_6$ равноотстоящих друг от друга. Частица движется из точки в точку следующим образом. Из данной точки она перемещается в одну из ближайших соседних точек с вероятностью $1/4$ или в диаметрально противоположную точку с вероятностью $1/2$. Выписать матрицу вероятностей перехода для этого процесса и построить граф, соответствующий этой матрице.

6. Пусть $S(t)$ – некоторая система в момент времени t, S_i $(i = 1, 2, ..., n)$ – возможные состояния системы S. Если известно, что $S(0) = S_4$, то начальное распределение вероятностей имеет вид:

а) $P_i(0) = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad P_j(0) = 0, \quad j = 5, 6, ..., n;$

б) $P_i(0) = 1, \quad i = 1; \quad P_j(0) = 0, \quad j = 2, 3, ..., n;$

в) $P_i(0) = 1, \quad i = 4; \quad P_j(0) = 0, \quad j = 1, ..., 3, 5, ..., n$. Ответ поясните.

7. Пусть задана переходная матрица $\bar{P}(t) = \begin{pmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & \ldots & P_{1n}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & \ldots & P_{2n}(t) \\ \ldots & & & \\ P_{n1}(t) & P_{n2}(t) & \ldots & P_{nn}(t) \end{pmatrix}$, ($n = 1, 2, ..., 10$). Охарактеризуйте элементы $P_{58}(t)$, $P_{34}(t)$. Вероятность $P_{18}(t) = 0$, поясните, что это означает.

8. Запишите систему дифференциальных уравнений Колмогорова для эргодического процесса. Обоснуйте.

9. Запишите систему дифференциальных уравнений Колмогорова для эргодического процесса для конкретного своего примера.

10. В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система S, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: S_1 – ЭВМ полностью исправна; S_2 – ЭВМ имеет неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи, S_3 – ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач; S_4 – ЭВМ полностью вышла из строя. В начальный момент времени ЭВМ полностью исправна. Проверка ЭВМ производится в фиксированные моменты времени t_1, t_2, t_3. Процесс, протекающий в системе

s, может рассматриваться как однородная марковская цепь с тремя шагами (первая, вторая и третья проверки ЭВМ). Матрица переходных вероятностей имеет вид: $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{pmatrix}$. Постройте граф состояний ЭВМ. Определите вероятности состояний ЭВМ после трех проверок.

11. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид: $\overline{P} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Распределение по состояниям в момент $t = 0$ определяется вектором $q = (0{,}7;\, 0{,}2;\, 0{,}1)$. Найти 1) распределение по состояниям в момент $t = 2$; 2) вероятность того, что в моменты $t = 0, 1, 2, 3$ состояниями цепи будут соответственно 1, 3, 3, 2; 3) стационарное распределение.

12. В учениях участвуют два корабля, которые одновременно производят выстрелы друг в друга через равные промежутки времени. При каждом обмене выстрелами корабль А поражает корабль В с вероятностью $1/2$, а корабль В поражает корабль А с вероятностью $3/8$. Предполагается, что при любом попадании корабль выходит из строя. Рассматриваются результаты серии выстрелов. Найти матрицу вероятностей перехода, если состояниями цепи являются комбинации кораблей, оставшихся в строю: S_1 - оба корабля в строю, S_2 - в строю корабль А, S_3 - в строю корабль В, S_4 - оба корабля поражены.

13. Организация по прокату автомобилей в городе выдаёт автомобили напрокат в трёх пунктах города А, В и С. Клиенты могут возвращать автомобили в любой из трёх пунктов. Анализ процесса возвращения автомобилей из проката в течение года показал, что клиенты возвращают автомобили в пункты А, В, С в соответствии с вероятностями, указанными в таблице 5.

Таблица 5 – Исходные данные к вопросу 13

Пункты выдачи	Пункты приёма автомобилей		
	A	B	C
A	0,8	0,2	0
B	0,2	0	0,8
C	0,2	0,2	0,6

Требуется:

1) в предположении, что число клиентов в городе не изменяется, найти процентное распределение клиентов, возвращающих автомобили по станциям проката к концу года, если в начале года оно было равномерным;

2) Найти вероятности состояний в установившемся режиме;

3) определить пункт проката, у которого более целесообразно строить станцию по ремонту автомобилей.

14. Водитель такси обнаружил, что если он находится в городе А, то в среднем в 8 случаев из 10 он везёт следующего пассажира в город Б, в остальных случаях будет поездка по городу А. Если же он находится в городе Б, то в среднем в 4 случаях из 10 он везёт следующего пассажира в город А, в остальных случаях будет поездка по городу Б. Требуется:

1) перечислить возможные состояния процесса и построить граф состояний;

2) записать матрицу переходных вероятностей;

3) найти вероятности состояний после двух шагов процесса, если:

а) в начальном состоянии водитель находился в городе А;

б) в начальном состоянии водитель находился в городе Б;

4) найти вероятности состояний в установившемся режиме.

15. Рассмотрим марковскую цепь с двумя состояниями S_1, S_2 и матрицей вероятностей перехода $\overline{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. С помощью особого устройства случайного выбора мы выбираем состояние, с которого начинается процесс. Это устройство выбирает S_1 с вероятностью $1/2$ и S_2 с вероятностью $1/2$. Требуется: 1) найти вероятность того, что после первого шага этот процесс перейдет в состояние S_1; 2) то же самое для случая, когда это устройство выбирает S_1 с вероятностью $1/3$ и S_2 с вероятностью $2/3$.

16. В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система S, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: S_1 – ЭВМ полностью исправна; S_2 – ЭВМ имеет незначительные неисправности, которые позволяют эксплуатировать ЭВМ, S_3 – ЭВМ имеет существенные неисправности, дающие возможность решать ограниченное число задач; S_4 – ЭВМ полностью вышла из строя. В начальный момент времени ЭВМ полностью исправна. Матрица переходных вероятностей имеет вид: $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Постройте граф состояний. Найдите вероятности состояний ЭВМ после одного, двух, трёх осмотров, если в начале (при $t = 0$) ЭВМ была полностью исправна.

17. Магазин продаёт две марки автомобилей А и В. Опыт эксплуатации этих марок автомобилей свидетельствует о том, что для них имеют различные матрицы переходных вероятностей, соответствующие состояниям «работает хорошо» (состояние 1) и «требует ремонта» (состояние 2): автомобиль марки А $\overline{P}_A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$, автомобиль марки В $\overline{P}_B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Элементы матриц перехода

определены на годовой период эксплуатации автомобиля. Требуется: 1) найти вероятности состояний для каждой марки автомобиля после двухлетней эксплуатации, если в начальном состоянии автомобиль «работает хорошо»; 2) определить марку автомобиля, являющуюся более предпочтительной для приобретения в личное пользование.

18. Система **S** автомобиль может находиться в одном из пяти возможных состояний: «исправен, работает», «неисправен, ожидает осмотра», «осматривается», «ремонтируется», «списывается». Постройте граф состояний системы.

19. Техническое устройство имеет 2 возможных состояния: s_1 – «исправно, работает», s_2 – «неисправно, ремонтируется». Матрица переходных вероятностей имеет вид $\overline{P}=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$. Постройте граф состояний. Найдите вероятности состояний после третьего шага и в установившемся режиме, если в начальном состоянии техническое устройство исправно.

20. Техническое устройство состоит из двух узлов и может находиться в одном из следующих состояний: оба узла исправны, работают; неисправен только первый узел, неисправен только второй узел, неисправны оба узла. Вероятность выхода из строя после месячной эксплуатации для первого узла 0,4; для второго узла – 0,3; вероятность совместного выхода их из строя 0,1. В исходном состоянии оба узла исправны, работают. Запишите матрицу переходных вероятностей и найдите вероятности состояний после двухмесячной эксплуатации.

21. Вероятности перехода за один шаг в цепи Маркова задаются матрицей $\overline{P}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$. Требуется: 1) найти число состояний; 2) построить граф, соответствующий матрице $\overline{P}$; 3) установить, сколько среди них существенных и несущественных.

22. Погода на некотором острове через длительные периоды времени становится то дождливой (Д), то сухой (С). Вероятности ежедневных изменений заданы матрицей $\overline{P}=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$. 1) Если в среду погода дождливая, то какова вероятность что она будет дождливой в ближайшую пятницу? 2) Если в среду ожидается дождливая погода с вероятностью 0,3, то какова вероятность, что она будет дождливой в ближайшую пятницу?

23. Рассматривается процесс работы ЭВМ. Поток отказов (сбоев) работающей ЭВМ – простейший с интенсивностью λ. Если ЭВМ дает сбой, то он немедленно обнаруживается, и обслуживающий персонал приступает к устранению неисправности (ремонту). Закон распределения времени ремонта –

показательный с параметром μ: $\varphi(t)=\mu e^{-\mu\cdot t}$ $(t>0)$. В начальный момент $(t=0)$ ЭВМ исправна. Найти: 1) вероятность того, что в момент t ЭВМ будет работать; 2) вероятность того, что за время $(0,t)$ ЭВМ дает хотя бы один сбой; 3) финальные вероятности состояний ЭВМ.

24. В условиях предыдущей задачи неисправность ЭВМ обнаруживается не сразу, а по прошествии некоторого времени, имеющего показательное распределение с параметром υ. Написать и решить уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Найти финальные вероятности состояний (непосредственно по графу состояний).

25. Электронное техническое устройство (ЭТУ) состоит из двух одинаковых взаимозаменяемых узлов. Для работы ЭТУ достаточно, чтобы работал хотя бы один узел. При выходе из строя одного из узлов ЭТУ продолжает нормально функционировать за счет работы другого узла. Поток отказов каждого узла – простейший с параметром λ. При выходе из строя узла он сразу начинает ремонтироваться. Время ремонта узла – показательное с параметром μ. В начальный момент времени (при $t=0$) оба узла работают. Найти следующие характеристики работы ЭТУ:

1) вероятности состояний как функции времени: s_0 - исправны оба узла; s_1 - исправен один узел, другой ремонтируется; s_2 - ремонтируется оба узла (ЭТУ не работает);

2) вероятность того, что за время t ЭТУ ни разу не прекратит работу;

3) финальные вероятности состояний ЭТУ;

4) для предельного (стационарного) режима ЭТУ среднее относительное время, в течение которого ЭТУ будет работать;

5) для того же предельного режима среднее время $\overline{t_p}$ бесперебойной работы ЭТУ (от включения после восстановления до очередного выхода из строя)

26. Условия и вопросы те же, что и в предыдущей задаче, с той разницей, что пока один из узлов работает, другой находится в «холодном резерве» и выходить из строя не может. При включении резервного узла он немедленно начинает работать и подвергается потоку отказов с интенсивностью λ.

27. В городе *N* каждый житель имеет одну из трех профессий: *A, B, C*. Дети отцов, имеющих профессии *A, B, C,* сохраняют профессии отцов с вероятностями $\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{1}{4}$ соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Найти, а) распределение по профессиям в следующем поколении, если в данном поколении профессию *A* имело 20% жителей, *B* – 30%, *C* – 50%; б) предельные распределение по профессиям, когда число поколений растет; в) распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.

28. Средства MathCAD для решения систем алгебраических уравнений.

4 Лабораторная работа № 5. Поток Эрланга

Вопросы для подготовки к занятию

1. Что называют потоком событий? Как наглядно его можно изобразить?

2. Имеет ли смысл говорить о вероятностях «событий», образующих поток? Почему?

3. Приведите примеры различных случайных событий, которые можно связать с «потоком событий»?

4. Какой поток событий называется стационарным? Ординарным? Потоком без последствия? Простейшим?

5. Дайте определение пуассоновского потока событий.

6. Что называют интенсивностью потока? Для какого потока интенсивность – постоянное число?

7. Для какого потока событий среднее число событий α, наступающих на интервале времени τ, следующий непосредственно за моментом t_0 равно $a(t_0, \tau) = \lambda\tau$?

8. Какой поток называется потоком Пальма? Каковы другие названия этого потока?

9. Какими свойствами обладает поток Пальма?

10. Как связаны простейший поток и поток Пальма?

11. Дайте определение потока Эрланга k –ого порядка.

12. Запишите формулу плотности закона Эрланга k –ого порядка.

13. Как вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по закону Эрланга?

14. Какой поток называется нормированным? Регулярным?

Индивидуальные задания для выполнения на ЭВМ

На диспетчерский пульт поступает поток заявок, который является потоком Эрланга второго порядка. Интенсивность потока заявок равна λ заявок в час. Если диспетчер в случайный момент оставляет пульт, то при первой же очередной заявке он обязан вернуться к пульту. Найти плотность распределения времени ожидания очередной заявки и построить ее график. Вычислить вероятность того, что диспетчер сможет отсутствовать от t_1 до t_2 минут.

<u>*Указание:*</u> плотность распределения времени ожидания первого ближайшего события для потока Эрланга k – го порядка имеет вид

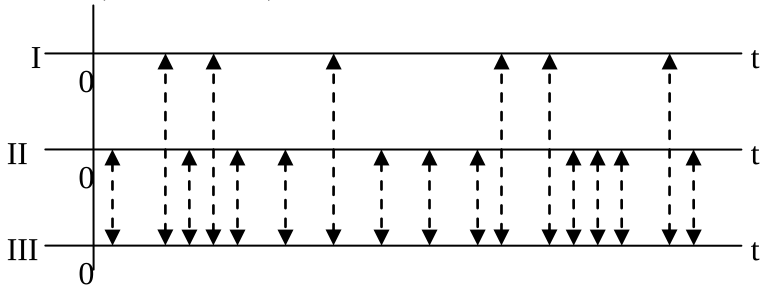
$$f(\theta) = \frac{\lambda}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(\lambda\theta)^s}{s!}e^{-\lambda\theta}, \quad \theta \geq 0,$$ где λ – интенсивность потока.

ВАРИАНТ №1. λ = 4, $t_1 = 6$, $t_2 = 12$,
ВАРИАНТ № 2. λ = 8, $t_1 = 15$, $t_2 = 30$,
ВАРИАНТ № 3. λ = 5, $t_1 = 6$, $t_2 = 12$,
ВАРИАНТ № 4. λ = 3, $t_1 = 10$, $t_2 = 20$,
ВАРИАНТ № 5. λ = 9, $t_1 = 20$, $t_2 = 40$,

ВАРИАНТ № 6. $\lambda = 6$, $t_1 = 15$, $t_2 = 20$,
ВАРИАНТ № 7. $\lambda = 7$, $t_1 = 12$, $t_2 = 30$,
ВАРИАНТ № 8. $\lambda = 2$, $t_1 = 6$, $t_2 = 15$,
ВАРИАНТ № 9. $\lambda = 3$, $t_1 = 15$, $t_2 = 20$,
ВАРИАНТ № 10. $\lambda = 4$, $t_1 = 20$, $t_2 = 30$,
ВАРИАНТ №11. $\lambda = 2$, $t_1 = 5$, $t_2 = 10$,
ВАРИАНТ № 12. $\lambda = 7$, $t_1 = 17$, $t_2 = 25$,
ВАРИАНТ № 13. $\lambda = 4$, $t_1 = 10$, $t_2 = 20$,
ВАРИАНТ № 14. $\lambda = 2$, $t_1 = 15$, $t_2 = 25$,
ВАРИАНТ № 15. $\lambda = 8$, $t_1 = 20$, $t_2 = 30$,
ВАРИАНТ № 16. $\lambda = 7$, $t_1 = 13$, $t_2 = 25$,
ВАРИАНТ № 17. $\lambda = 8$, $t_1 = 15$, $t_2 = 30$,
ВАРИАНТ № 18. $\lambda = 3$, $t_1 = 3$, $t_2 = 5$,
ВАРИАНТ № 19. $\lambda = 4$, $t_1 = 10$, $t_2 = 25$,
ВАРИАНТ № 20. $\lambda = 5$, $t_1 = 18$, $t_2 = 30$.

Контрольные вопросы

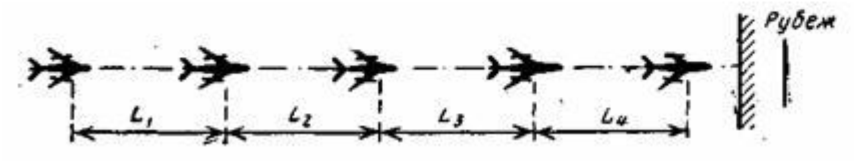
1. Что называют потоком событий? Приведите примеры.
2. Какими свойствами могут обладать потоки событий? Поясните и проиллюстрируйте на примерах.
3. Какой поток называют простейшим? Приведите примеры.
4. Какой поток называют пуассоновским? Приведите примеры.
5. Какая характеристика потока показывает среднее число событий, приходящееся на единицу времени?
6. Производится наложение («суперпозиция») двух простейших потоков: первый поток I с интенсивностью λ_1 и второй поток II с интенсивностью λ_2 (см. рисунок). Будет ли поток III, получившийся в результате суперпозиции, простейшим, и если да, то с какой интенсивностью?



7. Охарактеризуйте поток Пальма. Приведите примеры.
8. Охарактеризуйте поток Эрланга k –ого порядка. Приведите примеры.
9. Проведите сравнительный анализ простейшего потока и потока Пальма.
10. Проведите сравнительный анализ простейшего потока и потока Эрланга.
11. Рассмотрим пример потока Пальма. Некоторый элемент технического устройства (например, радиолампа) работает непрерывно до своего отказа (выхода из строя), после чего он мгновенно заменяется новым. Срок работы

элемента случаен. Если отдельные экземпляры элементов выходят из строя независимо друг от друга, то поток отказов (или «поток восстановлений», так как отказ и восстановление происходят в один и тот же момент) представляет собой поток Пальма. Какое нужно добавить условие, чтобы поток Пальма превратился в простейший (стационарный пуассоновский) поток.

12. Группа самолетов идет в боевом порядке «колонна» (см. рис.) с одинаковой для всех самолетов скоростью *V*. Каждый из них, кроме ведущего, обязан выдерживать строй, т. е. держаться на заданном расстоянии от впереди идущего. Это



расстояние, измеряемое дальномером, выдерживается с ошибками.

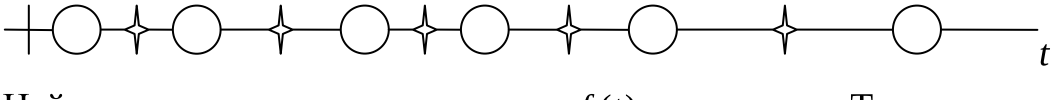
Рассмотрим потоки: 1) моменты пересечения самолетами заданного рубежа при этих условиях; 2) тот же поток при условии, что самолеты стремятся выдержать заданное расстояние не от соседа, а от ведущего всю колонну. Что это за потоки? Охарактеризуйте эти потоки.

13. Как изменится математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение потока Эрланга k –ого порядка, если оставить неизменной интенсивность потока Эрланга, а изменить только порядок k закона Эрланга?

14. Интервал времени Т между событиями в ординарном потоке имеет плотность $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)} & при \;\; t > t_0; \\ 0 & при \;\; t < t_0. \end{cases}$

Интервалы между событиями независимы. 1) Построить график плотности $f(t)$. 2) Является ли данный поток простейшим? 3) Является ли он потоком Пальма?

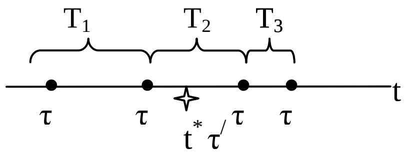
15. На оси $0t$ имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. Из этого потока формируется другой следующим образом: интервал между каждыми двумя соседними событиями делится пополам и в точку деления вставляется еще одно событие (см. рисунок, где кружочками обозначены основные, звездочками – вставленные события)



Найти плотность распределения $f(t)$ интервала Т между соседними событиями в новом потоке. Будет ли этот поток простейшим? Будет ли он потоком Пальма?

16. Рассматривается поток Эрланга k –ого порядка с плотностью распределения интервала T между событиями: $f_k(t) = \dfrac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$. Найти функция распределения $F_k(t)$ этого интервала.

17. Поток автобусов, приходящих на остановку, представляет собой поток Пальма; интервал T между ними имеет плотность распределения $f_T(t)$. Автобус находится на остановке в течение неслучайного времени τ. Пассажир, подойдя к остановке в случайный момент t^* (рис. а), садится в автобус, если тот находится на остановке; если же автобуса нет, то ждет его в течение времени τ' и, если за это время автобус не подойдет, покидает остановку и идет пешком. Закон распределения $f_T(t)$ таков, что случайная величина T не может быть меньше, чем $\tau + \tau'$. Найти вероятность того, что пассажир сядет в автобус.



5 Лабораторная работа № 6. Одноканальные системы массового обслуживания

Вопросы для подготовки к занятию

1. Понятие системы массового обслуживания (СМО), теории массового обслуживания (ТМО).

2. Построение математической модели СМО.

3. Разъяснить понятия канал обслуживания, дисциплина очереди, поток обслуживания, поток заявок, механизм обслуживания на примере одной телефонной линии как объекта СМО.

4. Какая СМО называется открытой? Приведите контрпример.

5. Какая СМО называется упорядоченной?

6. Классификация СМО.

7. Критерии эффективности работы СМО.

8. Одноканальная СМО с отказами.

9. Одноканальная СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди.

10. Одноканальная СМО с ожиданием и неограниченной длиной очереди.

11. Площадка при автозаправочной станции (АЗС) допускает пребывание в очереди на заправку не более трех машин одновременно. Если в очереди уже находятся три машины, очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится. Поток машин, прибывающих для заправки, имеет интенсивность одна машина в минуту. Процесс заправки продолжается в среднем 1,25мин. Определить: вероятность отказа, относительную и абсолютную пропускную способности АЗС, Среднее число машин, ожидающих заправки, среднее число машин, находящихся на АЗС (включая обслуживаемую), среднее время ожидания машины в очереди, среднее время пребывания машины на АЗС (включая обслуживание).

12. Одноканальная СМО представляет собой одну телефонную линию, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью 0,4 вызовов в минуту. Средняя продолжительность разговора 3 минуты. Время разговора имен показательное распределение. Найти финальные вероятности состояний СМО. Сравнить пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если разговор длился в точности 3 мин, а заявки шли одна за другой регулярно, без перерывов.

13. Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, не ограниченно. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику, распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность 0,85 автомобиля в час. Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем составляет 1,05 час. Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

Индивидуальные задания для выполнения на ЭВМ

Задача 1. На пост мойки автомобилей, предназначенный для обслуживания одного автомобиля за один сеанс, в случайный момент времени прибывает автомобиль. Если автомобиль прибыл в момент, когда пост занят, он получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобиле a автомобиль в час, средняя продолжительность обслуживания – b часа. Поток автомобилей и поток обслуживания являются простейшими. Рассчитать: а) абсолютную и относительную пропускную способности поста, б) вероятности отказа. Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно b часа, автомобили следовали бы один за другим без перерыва.

ВАРИАНТ № 1. $a = 0,1 \quad b = 1,1$;

ВАРИАНТ № 2. $a = 0,2 \quad b = 1,2$;

ВАРИАНТ № 3. $a = 0,3 \quad b = 1,3$;

ВАРИАНТ № 4. $a = 0,4 \quad b = 1,4$;

ВАРИАНТ № 5. $a = 0,5 \quad b = 1,5$;

ВАРИАНТ № 6. $a = 0,6 \quad b = 1,6$;

ВАРИАНТ № 7. $a = 0,7 \quad b = 1,7$;

ВАРИАНТ № 8. $a = 0,8 \quad b = 1,8$;

ВАРИАНТ № 9. $a = 0,9 \quad b = 1,9$;

ВАРИАНТ № 10. $a = 0,15 \quad b = 1,6$;

ВАРИАНТ № 11. $a = 0,1 \quad b = 0,9$;

ВАРИАНТ № 12. $a = 0,2 \quad b = 1$;

ВАРИАНТ № 13. $a = 0,3 \quad b = 1,1$;

ВАРИАНТ № 14. $a = 0,4 \quad b = 0,8$;

ВАРИАНТ № 15. $a = 0,5 \quad b = 1,2$;

ВАРИАНТ № 16. $a = 0{,}6 \quad b = 1{,}1$;

ВАРИАНТ № 17. $a = 0{,}7 \quad b = 0{,}9$;

ВАРИАНТ № 18. $a = 0{,}8 \quad b = 0{,}8$;

ВАРИАНТ № 19. $a = 0{,}9 \quad b = 1$;

ВАРИАНТ № 20. $a = 0{,}15 \quad b = 1{,}1$.

Задача 2. Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно № варианта. Если все стоянки заняты, то очередной автомобиль, прибывший на стоянку в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, пребывающих на диагностику, является пуассоновским с интенсивностью a (автомобилей в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно b часа. Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в установившемся (стационарном) режиме.

ВАРИАНТ № 1. $a = 0{,}65 \quad b = 1{,}1$;

ВАРИАНТ № 2. $a = 0{,}72 \quad b = 1{,}2$;

ВАРИАНТ № 3. $a = 0{,}34 \quad b = 1{,}3$;

ВАРИАНТ № 4. $a = 0{,}24 \quad b = 1{,}4$;

ВАРИАНТ № 5. $a = 0{,}85 \quad b = 1{,}5$;

ВАРИАНТ № 6. $a = 0{,}96 \quad b = 1{,}6$;

ВАРИАНТ № 7. $a = 1{,}01 \quad b = 1{,}7$;

ВАРИАНТ № 8. $a = 0{,}68 \quad b = 1{,}8$;

ВАРИАНТ № 9. $a = 0{,}95 \quad b = 1{,}9$;

ВАРИАНТ № 10. $a = 0{,}45 \quad b = 1{,}6$;

ВАРИАНТ № 11. $a = 0{,}5 \quad b = 1{,}7$;

ВАРИАНТ № 12. $a = 0{,}65 \quad b = 1{,}8$;

ВАРИАНТ № 13. $a = 0{,}45 \quad b = 1{,}9$;

ВАРИАНТ № 14. $a = 0{,}2 \quad b = 1{,}1$;

ВАРИАНТ № 15. $a = 0{,}7 \quad b = 1{,}2$;

ВАРИАНТ № 16. $a = 0{,}9 \quad b = 1{,}3$;

ВАРИАНТ № 17. $a = 0{,}63 \quad b = 1{,}4$;

ВАРИАНТ № 18. $a = 0{,}54 \quad b = 1{,}5$;

ВАРИАНТ № 19. $a = 0{,}85 \quad b = 1{,}1$;

ВАРИАНТ № 20. $a = 0{,}5 \quad b = 1{,}2$.

Задача 3. Решить задачу 2 при неограниченном количестве автостоянок.

Контрольные вопросы

1. Что в каждом из следующих случаев принять за СМО? Каналы обслуживания? Их число? Поток заявок на входе? Поток обслуживания на выходе?

1) Билетная касса с одним окошком. В кассе продаются билеты в пункты А и В.

2) Билетные кассы с тремя окошками. В направление А выдают билеты два окошка, а в направление В – одно.

3) ЭВМ, на которую поступают требования на расчеты.

4) Рабочий обслуживает четыре станка.

2. Какие из следующих СМО будут открытыми?

1) Один рабочий обслуживает m станков, которые время от времени требуют наладки. Интенсивность потока отказов одного станка равна λ. Если в момент отказа станка рабочий свободен, он немедленно приступает к наладке; если нет – станок становится в очередь на наладку, поток отказов станка простейший, время наладки – показательное с параметром μ.

2) Бригада из n рабочих обслуживает m станков ($n<m$). Поток отказов каждого станка имеет интенсивность λ; среднее время наладки станка $\bar{t}_{обсл}$. Все потоки событий – простейшие.

3) В столовой самообслуживания имеется один раздаточный пункт, на котором отпускаются как первые, так и вторые блюда. Поток посетителей столовой – простейший с интенсивностью λ; на отпуск как первого, так и второго блюда идет случайное время, распределенное по показательному закону.

3. На вход одноканальной СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda = 2$; время обслуживания – показательное с параметром $\mu = 1{,}5$. В начальный момент времени $t = 0$ канал свободен. Построить размеченный граф состояний СМО. Написать и решить дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний СМО. Найти финальные вероятности состояний и (для установившегося режима) характеристики эффективности СМО.

4. В вагоне – ресторане интенсивность обслуживания клиентов в среднем составляет 20 человек в час. Обслуживанием клиентов занимается один официант, при этом среднее время обслуживания одного клиента составляет 10 мин. Среднее количество клиентов, покинувших очередь, не дождавшихся обслуживания, составляет 2 человека в час. Определить абсолютную пропускную способность вагона – ресторана. Что она показывает?

5. В компьютерном классе установлен один принтер, скорость печати которого в среднем составляет 2 страницы в минуту. Печать начинается сразу после поступления файла на порт принтера. Среднее время между поступлениями файлов на принтер составляет 1 минуту. Если в момент поступления файла на печать принтер занят, то задания выстраиваются в неограниченную очередь. Требуется определить среднюю длину очереди и общее время пребывания файлов в очереди, если каждый файл в среднем содержит по 5 страниц.

6. На базу данных (БД) сервера железной дороги поступает 10 запросов в секунду. Среднее время обработки каждого запроса составляет 1 секунду. Запрос, поступивший в момент обработки предыдущего запроса, становится в

очередь. Определить вероятность наличия очереди и суммарное время, которое проведут запросы до обслуживания.

7. Железнодорожная сортировочная горка, на которую подается простейший поток составов с интенсивностью 2 состава в час, представляет собой СМО с неограниченной очередью. Время обслуживания (роспуска) состава на горке имеет показательное распределение со средним значением времени 20 мин. Найти среднее число составов в очереди, среднее время пребывания состава в СМО, среднее время пребывания состава в очереди.

8. Условия предыдущей задачи усложняются тем, что в парке прибытия железнодорожной сортировочной горки могут находиться одновременно не более трех составов (включая обслуживаемый). Если состав прибывает в момент, когда в парке прибытия уже находятся три состава, он вынужден ожидать своей очереди на внешних путях. За один час пребывания состава на внешних путях станция платит штраф a руб. Определить средний суточный штраф, который придется уплатить за ожидание составов на внешних путях.

9. Билетную кассу с одним окошком представим как СМО с неограниченной очередью. Касса продает билеты в пункты А и В; пассажиров, желающих купить билет в пункт А, приходит в среднем трое за 20 мин, а в пункт В – двое за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания распределено по показательному закону. Установить, существуют ли финальные вероятности состояний СМО, и если да – вычислить первые три из них. Найти среднее число заявок в СМО, среднее время пребывания заявки в системе и среднее число заявок в очереди.

10. В поликлинике в кабинете флюорографии проходят прием в среднем 2 человека в минуту. Время приема распределено по показательному закону. Поток посетителей простейший с интенсивностью 5 человек в минуту. Очередь посетителей, ожидающих приема, не ограничена. Определить среднюю длину очереди и абсолютную пропускную способность кабинета флюорографии.

11. На телефонную линию поступает простейший поток заявок с интенсивностью 0,95 вызовов в минуту. Средняя продолжительность разговора 1 минута. Определить вероятностные характеристики работы СМО в стационарном режиме работы.

12. На телефонную линию поступает простейший поток заявок с интенсивностью 0,5 вызовов в минуту. Средняя продолжительность разговора 1, минута. Определить вероятностные характеристики работы СМО в стационарном режиме работы.

13. Имеется одноканальная СМО с отказами. Поток заявок – простейший с интенсивностью λ. Время обслуживания – на случайное и в точности равно $t_{обсл} = \dfrac{1}{\mu}$. Найти относительную и абсолютную пропускную способность СМО в предельном стационарном режиме.

14. В аудиторскую фирму поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью 1,5 заявки в день. Время обслуживания

распределено по показательному закону и равно в среднем трём дням. Аудиторская фирма располагает пятью независимыми бухгалтерами, выполняющими аудиторские проверки. Очередь заявок не ограниченна. Дисциплина очереди не регламентирована. Определить вероятностные характеристики аудиторской фирмы, как СМО, работающей в стационарном режиме.

15. Билетная касса работает без перерыва. Билеты продаёт один кассир. Среднее время обслуживания – 2 минуты на каждого человека. Среднее число пассажиров, желающих приобрести билеты в кассе в течение одного часа, равно 20 (пасс./час). Все потоки в системе простейшие. Определить среднюю длину очереди, вероятность простоя кассира, среднее время нахождения пассажира в билетной кассе (в очереди и на обслуживании), среднее время ожидания в очереди в условиях стационарного режима работы кассы.

16. Рассматривается простейшая одноканальная СМО с ограниченной очередью $m = 2$; работающий канал может иногда выходить из строя (отказывать). Заявка, которая обслуживается в момент отказа канала, становится в очередь, если в ней еще есть свободные места; если нет, она покидает СМО необслуженной. Интенсивность потока заявок λ, потока обслуживаний μ, потока отказов канала ν потока восстановлений (ремонтов) γ. Перечислить состояния СМО и найти для них финальные вероятности, а также характеристики эффективности СМО.

17. Подсчитать характеристики эффективности для простейшей одноканальной СМО с тремя местами в очереди при условиях: 4 заявки в час и среднее время обслуживания 0,5. Выяснить, как эти характеристики изменяются, если увеличить число мест в очереди до четырех. Сделать выводы.

18. Одноканальная СМО – ЭВМ, на которую поступают заявки. Поток заявок – простейший со средним интервалом между заявками 10 мин. Время обслуживания распределено по закону Эрланга третьего порядка с математическим ожиданием 8 мин. Определить среднее число заявок в СМО и среднее число заявок в очереди, а также средние времена пребывания заявки в системе и в очереди.

19. На одноканальную СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания – показательное с параметром $\mu\,(\mu > \lambda)$. Перед тем как приступить к обслуживанию заявки, свободный до того канал должен «разогреться». Время «разогрева» – показательное с параметром ν и не зависит от того, как давно канал закончил работу. Если обслуживание начинается сразу же после окончания обслуживания предыдущей заявки, «разогрева» не нужно. Составить граф состояний СМО и написать уравнения для финальных вероятностей состояний; выразить через эти вероятности характеристики эффективности СМО.

6 Лабораторная работа № 7-9. Многоканальные системы массового обслуживания

Вопросы для подготовки к занятию

1. Что в каждом из следующих случаев принять за СМО? Каналы обслуживания? Их число? Поток заявок на входе? Поток обслуживания на выходе?

   1) Инструментальная кладовая с тремя кладовщиками, выдающими рабочим по их требованию одинаковые наборы инструментов во время работы. Если все кладовщики заняты, очередному рабочему инструмент не выдается.

   2) Железнодорожная станция принимает на пять путей пассажирские поезда и электрички, которые прибывают по расписанию каждые 15 мин на каждый из путей и отбывают после обслуживания также по расписанию через 12 мин.

2. Что представляет собой структура СМО? Каких видов бывают СМО в зависимости от характера потоков событий?

3. Какими свойствами должны обладать потоки событий, переводящие СМО из одного состояния в другое?

4. Какому закону должно быть подчинено распределение интервалов длительности обслуживания? Каков его параметр?

5. Какими характеристиками определяется эффективность функционирования СМО?

6. Определить вид СМО:

1) Телефонная АТС имеет одну линию, на которую в среднем приходит 0,8 вызова в минуту. Среднее время разговора 2 мин. Вызов, пришедший во время разговора, не обслуживается.

2) В отделении банка клиентов обслуживают три оператора. Среднее время обслуживания клиента оператором 12 мин. В среднем за час в банк обращаются 15 клиентов. Если все операторы заняты, клиенты не обслуживаются.

3) В пункте валютного обмена работают два оператора, каждый из которых обслуживает клиента в среднем за 2,5мин. По условиям безопасности в помещении пункта может находиться одновременно не более пяти человек, включая обслуживаемых клиентов. Если помещение заполнено, то очередной клиент не становиться в очередь, а уходит. В среднем клиенты приходят каждые 2 мин.

4) В кассе метрополитена, продающей карточки на проезд, работают два окна. В среднем один кассир тратит на обслуживание одного пассажира 0,5 мин. В среднем к кассе подходит 3 чел./мин.

5) Каждый покупатель в обувном магазине проходит три фазы обслуживания: 1 – примерка и выбор обуви; 2 – уплата денег в кассу; 3 – получение покупки на контроле. В магазин прибывает простейший поток покупателей с интенсивностью 45 чел./ч.

В отделе примерки имеются четыре стула, занимая которые, покупатели могут самостоятельно выбирать и примерят обувь. Среднее время примерки и выбора обуви 5 мин. Выбравший обувь покупатель направляется в кассу, где вторично становиться в очередь (касса в магазине одна). Среднее время оплаты товара в кассе 1 мин. После оплаты покупатель идет на контроль, где становится в новую очередь и получает покупку. На контроле работают три продавца; среднее время выдачи покупки 2 мин. Все потоки событий простейшие.

6) В службе «Скорой помощи» поселка круглосуточно дежурят три диспетчера, обслуживающие 3 телефонных аппарата. Если заявка на вызов врача к больному поступает, когда диспетчеры заняты, то абонент получает отказ. Поток заявок составляет 4 вызова в минуту. Оформление заявки длится в среднем 1,5 мин.

7) В небольшом магазине покупателей обслуживают два продавца и имеется объявление «Участники ВОВ, локальных войн, ликвидаторы аварии на Чернобыльской АС, беременные женщины и покупатели с детьми до трех лет обслуживаются вне очереди». Среднее время обслуживания одного покупателя – 4 мин. Интенсивность потока покупателей – 3 человека в минуту. Вместимость магазина такова, что одновременно в нем могут находится не боле 5 человек. Покупатель, пришедший в переполненный магазин, когда в очереди уже стоят 5 человек, не ждет снаружи и уходит.

7. Что показывает абсолютная пропускная способность СМО? Относительная?

8. Какие математические величины характеризуют вероятность немедленного приема заявки? вероятность простоя каналов?

9. Для системы 2) из задания 6 найти вероятность того, что не менее двух каналов простаивают.

10. Железнодорожная касса имеет два окошка, в каждом из которых продают билеты в два пункта: Ленинград и Киев. Потоки пассажиров, приобретающих билеты в Ленинград и в Киев, одинаковы по интенсивности, которая равна 0, 45чел./мин. Среднее время продажи билета пассажиру 2 мин. Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения очередей (в интересах пассажиров) сделать обе кассы специализированными: в первой продавать билеты только в Ленинград, а во второй – только в Киев. Считая в первом приближении все потоки событий простейшими, проверить разумность этого предложения.

Индивидуальные задания для выполнения на ЭВМ

Задача 1. Дисплейный зал имеет k дисплеев. Поток пользователей простейший. Среднее число пользователей, посещающих дисплейный зал за сутки, равно n. Время обработки информации одним пользователем на одном дисплее распределено по показательному закону и составляет в среднем t мин. Определить, существует ли стационарный режим работы зала; вероятность того, что пользователь застанет все дисплеи занятыми; среднее число пользователей в очереди; среднее число пользователей в зале; среднее время ожидания свободного дисплея; среднее время пребывания пользователя в дисплейном зале.

ВАРИАНТ № 1.	k=3,	n=55,	t=29,
ВАРИАНТ № 2.	k=2,	n=32,	t=38,
ВАРИАНТ № 3.	k=3,	n=70,	t=12,
ВАРИАНТ № 4.	k=2,	n=42,	t=27,
ВАРИАНТ № 5.	k=3,	n=64	t=18,
ВАРИАНТ № 6.	k=2,	n=35,	t=28,
ВАРИАНТ № 7.	k=3,	n=44,	t=25,
ВАРИАНТ № 8.	k=2,	n=26,	t=43,
ВАРИАНТ № 9.	k=3,	n=58,	t=20,
ВАРИАНТ № 10.	k=2,	n=40,	t=34,
ВАРИАНТ № 11.	k=3,	n=20,	t=17,
ВАРИАНТ № 12.	k=5,	n=25,	t=25,
ВАРИАНТ № 13.	k=4,	n=22,	t=16,
ВАРИАНТ № 14.	k=6,	n=30,	t=38,
ВАРИАНТ № 15.	k=3,	n=18	t=48,
ВАРИАНТ № 16.	k=5,	n=28,	t=24,
ВАРИАНТ № 17.	k=4,	n=24,	t=23,
ВАРИАНТ № 18.	k=2,	n=14,	t=35,
ВАРИАНТ № 19.	k=3,	n=16,	t=26,
ВАРИАНТ № 20.	k=5,	n=26,	t=37.

Задача 2. Вход на станцию метрополитена оборудован системой из k турникетов. При выходе из строя одного из турников остальные продолжают нормально функционировать. Если из строя выйдут все турникеты, то вход на станцию перекрывается. Поток отказов простейший. Среднее время безотказной работы одного турникета составляет t часов. При выходе из строя каждый турникет начинает сразу ремонтироваться. Время ремонта распределено по показательному закону и в среднем составляет s часов. В начальный момент все турникеты исправны. Найти среднюю пропускную способность системы турникетов в процентах от номинальной , если с выходом из строя каждого турникета система теряет $\left(\frac{100}{k}\right)\%$ своей номинальной пропускной способности. Построить размеченный граф состояний системы.

ВАРИАНТ № 1.	k=4,	t=80,	s=2,
ВАРИАНТ № 2.	k=3,	t=65,	s=2,
ВАРИАНТ № 3.	k=4	t=75,	s=3,
ВАРИАНТ № 4.	k=3,	t=80,	s=3,
ВАРИАНТ № 5.	k=4,	t=70,	s=2,
ВАРИАНТ № 6.	k=3,	t=60,	s=2,
ВАРИАНТ № 7.	k=4,	t=65,	s=3,
ВАРИАНТ № 8.	k=3,	t=75,	s=2,
ВАРИАНТ № 9.	k=4,	t=60,	s=3,

ВАРИАНТ № 10. k=3, t=70, s=3,5,
ВАРИАНТ № 11. k=4, t=60, s=2,5,
ВАРИАНТ № 12. k=5, t=75, s=2,5,
ВАРИАНТ № 13. k=4 t=85, s=3,5,
ВАРИАНТ № 14. k=5, t=70, s=3,5,
ВАРИАНТ № 15. k=4, t=60, s=2,5,
ВАРИАНТ № 16. k=5, t=80, s=2,5,
ВАРИАНТ № 17. k=4, t=75, s=3,5,
ВАРИАНТ № 18. k=5, t=55, s=2,5,
ВАРИАНТ № 19. k=4, t=80, s=3,5,
ВАРИАНТ № 20. k=5, t=75, s=3,5.

Задача 3. На грузовой двор подают вагоны со среднем интервалом t часов. Распределение интервалов между моментами поступления вагонов подчиняется показательному закону. Время погрузки-выгрузки распределено по произвольному закону и в среднем составляет τ часов при среднем квадратическом отклонении σ (τ) минут. Пользуясь формулами Полячека-Хинчина, найти:

а) среднее число вагонов, занимающих грузовой двор;
б) среднее число вагонов, ожидающих погрузки-выгрузки;
в) средний простой вагонов в ожидании погрузки-выгрузки;
г) среднее время пребывания вагона на грузовом дворе.

ВАРИАНТ № 1. t=3, τ=1,5, σ(τ)=25,
ВАРИАНТ № 2. t=2,5, τ=1, σ(τ)=15,
ВАРИАНТ № 3. t=2, τ=0,75, σ(τ)=10,
ВАРИАНТ № 4. t=3,5, τ=2, σ(τ)=45,
ВАРИАНТ № 5. t=4, τ=2,5, σ(τ)=50,
ВАРИАНТ № 6. t=3, τ=2, σ(τ)=35,
ВАРИАНТ № 7. t=2,5, τ=1,5, σ(τ)=20,
ВАРИАНТ № 8. t=2, τ=1, σ(τ)=25,
ВАРИАНТ № 9. t=3,5, τ=1,75, σ(τ)=30,
ВАРИАНТ № 10. t=3,5, τ=1,5, σ(τ)=40.
ВАРИАНТ № 11. t=2,5, τ=1, σ(τ)=20,
ВАРИАНТ № 12. t=2, τ=1,5, σ(τ)=17,
ВАРИАНТ № 13. t=2,5, τ=0,8, σ(τ)=13,
ВАРИАНТ № 14. t=3, τ=2,15, σ(τ)=35,
ВАРИАНТ № 15. t=3,5, τ=2,65, σ(τ)=45,
ВАРИАНТ № 16. t=4, τ=2, σ(τ)=30,
ВАРИАНТ № 17. t=3,5, τ=2,5, σ(τ)=40,
ВАРИАНТ № 18. t=3, τ=1,4, σ(τ)=25,
ВАРИАНТ № 19. t=4,5, τ=1,8, σ(τ)=35,
ВАРИАНТ № 20. t=3,5, τ=1,7, σ(τ)=30.

Контрольные вопросы

1. Дежурный по администрации города имеет 5 телефонов. Телефонные звонки поступают с интенсивностью 90 заявок в час, средняя продолжительность разговора составляет 2 мин. Определить показатели дежурного администратора как объекта СМО.

2. На стоянке автомобилей возле магазина имеются 3 места, каждое из которых отводится под один автомобиль. Автомобили прибывают на стоянку с интенсивностью 20 автомобилей в час. Продолжительность пребывания автомобилей на стоянке составляет в среднем 15 минут. Стоянка на проезжей части не разрешается. Определить среднее количество мест, не занятых автомобилями, и вероятность того, что прибывший автомобиль не найдет на стоянке свободного места.

3. В грузовой речной порт поступает в среднем 6 сухогрузов в сутки. В порту имеется 3 крана, каждый из которых обслуживает 1 сухогруз в среднем за 8 часов. Краны работают круглосуточно. Определить характеристики работы порта как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.

4. Салон парикмахерская имеет 4 мастера. Входящий поток посетителей имеет интенсивность 5 человек в час. Среднее время обслуживания одного клиента составляет 40 минут. Определить среднюю длину очереди на обслуживание, считая ее неограниченной.

5. В справочной службе вокзала железной дороги стоит телефон с пятью каналами. Приходящий вызов получает отказ, когда все каналы заняты. Пусть среднее время занятости одного канала составляет 1 минуту. Интенсивность поступающих вызовов составляет 0,1 $мин^{-1}$. Требуется найти вероятность отказа и относительную пропускную способность.

6. На железнодорожной станции находятся три кассы для продажи билетов на поезда дальнего следования. Когда все кассы заняты, пассажиры встают в очередь. Длина очереди не может превышать 50 человек. Среднее время обслуживания в одной кассе составляет 5 минут. Пассажиры прибывают на станцию для покупки билетов в среднем по два человека в минуту. Найти вероятность отказа и общее количество человек, находящихся в системе.

7. На железнодорожной станции имеется пять путей для обслуживания прибывающих железнодорожных составов. Интенсивность прибытия железнодорожных составов равна 15 составов в час. Среднее время обслуживания одного состава 20 мин. Предполагается, что очередь ожидающих обслуживания поездов может быть неограниченной длины. Найти вероятность занятости всех пяти путей железнодорожной станции и среднее время обслуживания состава.

8. Сервис – центр занимается посреднической деятельностью и осуществляет часть своей деятельности по 3 телефонным линиям. В среднем в сервис – центр поступает 75 звонков в час. Среднее время обслуживания каждого звонка составляет 2 минуты. Определить вероятность того, что ни один канал не занят, а также вероятность отказа.

9. В читальный зал библиотеки, которая имеет 30 посадочных мест, приходят посетители с интенсивностью 20 человек в час. Время пребывания каждого посетителя в среднем составляет 2 часа. Определить вероятность отказа посетителю в читальном зале и среднее число занятых посадочных мест.

10. Абонентский отдел библиотеки обслуживают 3 библиотекаря. Время обслуживания одним библиотекарем читателя в среднем составляет 5 минут. Интенсивность посещения читателями библиотекари составляет 4 человека в минуту. Если в момент прихода читателя все библиотекари заняты, то он встает в очередь. Требуется определить среднее число читателей, ожидающих начала обслуживания и время их пребывания в очереди.

11. В гостинице имеется 20 мест. Посетитель в случае занятости мест уходи в другую гостиницу. Среднее время снятие гостиницы клиентом составляет 8 часов. Интенсивность потока поступления клиентов составляет 5 человек в час. Определить вероятность отказа и абсолютную пропускную способность данной гостиницы.

12. Пропускной таможенный пункт состоит из трех линий досмотра. Время досмотра одного объекта на одной линии досмотра в среднем составляет 4 часа. Интенсивность прибывающих объектов для досмотра составляет 2 объекта в час. В случае занятости всех линий досмотра прибывший объект ставится в очередь. Определить абсолютную пропускную способность таможенного пункта и среднее время простоя линий досмотра.

13. На станции метро 5 кассовых аппаратов. Из наблюдений установили, что к этим пяти аппаратам подходят в среднем 60 человек в минуту. Время обслуживания будем считать распределенным по показательному закону, со средним временем обслуживания 4 сек. Найти вероятность того, что все аппараты свободны, среднее число людей, находящихся у аппаратов и коэффициент загрузки аппаратов.

14. Вычислить непосредственно по графу состояний финальные вероятности состояний для двухканальной СМО с тремя местами в очереди при $\lambda = 0{,}6;$ $\mu = 0{,}2.$ Найти для СМО характеристики через финальные вероятности.

15.АЗС имеет две колонки; площадка возле нее допускает одновременное ожидание не более четырех автомобилей. Поток автомобилей, прибывающих на станцию, простейший с интенсивностью 1 авт/мин. Время обслуживания автомобиля – показательное со средним значением 2 мин. Определить характеристики работы АЗС как объекта СМО.

16. Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает в среднем 4 заявки/ч. Среднее время обслуживания одной заявки 0,8 ч. Каждая обслуженная заявка приносит доход 4 руб. Содержание каждого канала обходится 2 руб/ч. Решить: выгодно или невыгодно в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех?

17. В бухгалтерии предприятия имеются 2 кассира, каждый из которых может обслужить в среднем 30 сотрудников в час. Поток сотрудников, получающих заработную плату, – простейший, с интенсивностью, равной 40 сотрудников в час. Очередь в кассе не ограничена. Дисциплина очереди не

регламентирована. Время обслуживания подчинено экспоненциальному закону распределения. Вычислить вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме и определите целесообразность приёма третьего кассира на предприятие, работающего с такой же производительностью, как и первые два.

18. В стоматологическом кабинете три кресла, а в коридоре имеются три стула для ожидающих приема. Поток клиентов простейший с интенсивностью 12 клиентов в час. Время приема клиентов – показательное со средним значением 20 мин. Если все три стула в коридоре заняты, клиент в очередь не становится. Определить среднее число клиентов, обслуживаемых в час, среднюю долю обслуженных клиентов из числа пришедших, среднее число занятых стульев в коридоре и в кабинете.

19. Подсчитать характеристики эффективности для простейшей одноканальной СМО с тремя местами в очереди при условиях: 4 заявки в час и среднее время обслуживания 0,5. Выяснить, как эти характеристики изменяются, если увеличить число мест в очереди до четырех. Сделать выводы. Как изменятся характеристики эффективности СМО, если число каналов обслуживания увеличить до двух?

20. СМО - обувной магазин, в котором каждый покупатель в проходит три фазы обслуживания: 1 – примерка и выбор обуви; 2 – уплата денег в кассу; 3 – получение покупки на контроле. В магазин прибывает простейший поток покупателей с интенсивностью 45 чел./ч.

В отделе примерки имеются четыре стула, занимая которые, покупатели могут самостоятельно выбирать и примерят обувь. Среднее время примерки и выбора обуви 5 мин. Выбравший обувь покупатель направляется в кассу, где вторично становиться в очередь (касса в магазине одна). Среднее время оплаты товара в кассе 1 мин. После оплаты покупатель идет на контроль, где становится в новую очередь и получает покупку. На контроле работают три продавца; среднее время выдачи покупки 2 мин. Все потоки событий простейшие.

Рассматривая магазин как трехфазовую СМО, найти: среднее число покупателей в очереди к первой (второй, третьей) фазе обслуживания; среднее число покупателей, связанных с первой (второй, третьей) фазой обслуживания; общее среднее число покупателей в магазине; общее среднее время, проводимое покупателем в очередях; общее среднее время, затрачиваемое покупателем на приобретение обуви в магазине.

Ответить на вопросы:

1) В каком звене и как нужно улучшить обслуживание для того, чтобы сократить затраты времени покупателей?

2) Как можно было бы учесть тот факт, что не все покупатели находят себе подходящую обувь, и какая-то доля из них уходит из магазина, не сделав покупки?

21. Имеется трехканальная СМО с отказами; на нее поступает поток заявок с интенсивностью 4 заявки/мин; время обслуживания заявки одним каналов 0,5 мин. Спрашивается, выгодно ли сточки зрения пропускной

способности СМО заставить все три канала обслуживать заявки сразу? Причем в этом случае среднее время обслуживания уменьшается втрое? Как это скажется на среднем времени пребывания заявки в СМО?

22. Имеется трехканальная СМО с неограниченной очередью. Интенсивность потока заявок 4 заявки/мин; среднее время обслуживания заявки одним каналов 0,5 мин. Выгодно ли, имея в виду: 1) среднюю длину очереди, 2) среднее время пребывания заявки в очереди, 3) среднее время пребывания заявки в СМО, объединить все три канала в один, с втрое меньшим средним временем обслуживания?

23. На стоянку такси в среднем приходит 2 чел/мин. Пассажиры образуют очередь, которая уменьшается на единицу, когда к стоянке подходит автомобиль (берется «идеальный» случай, когда водитель безропотно везет каждого пассажира туда, куда ему требуется). В случае, если на стоянке нет пассажиров, в очередь становятся автомобили. К стоянке подъезжают в среднем 3 маш/мин. Число мест для автомобилей на стоянке ограничено и равно 5; число мест для пассажиров также ограничено и равно 7. Все потоки событий – простейшие. Посадка производится мгновенно. Построить граф состояний СМО, найти финальные вероятности состояний, среднюю длину очереди пассажиров, среднюю длину очереди автомобилей, среднее время пребывания в очереди пассажира, среднее время пребывания в очереди автомобиля.

Библиографический список

1. Агапов, Г.И Задачник по теории вероятностей: учеб. пособие / Г.И. Агапов; М: Высш. школа, 1986. – 80 с.

2. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров; М: Издательский центр «Академия», 2004. – 448 с.

3. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. учеб. пособие / В.Е. Гмурман; М. Высш. шк., 2003. – 479 с.

4. Данко, П.Е.Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Учеб. пособие для втузов / П.Е. Данко, С.Я. Кожевникова, А.Г. Попов; М.: «Высшая школа», 2000. – 816 с.

5. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов; СПб.: «Питер», 2005. – 464 с.

6. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов; М.: «Дело», 2008. – 720 с.

7. Чистяков, В.П. Курс теории вероятностей / В.П. Чистяков; М.: Наука, 1982. – 256 с.

Учебное издание

Чихачева Ольга Александровна
Миронова Елена Ивановна

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания к лабораторным работам

Подписано в печать __________. Тираж 20 экз.
Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета
390000, г.Рязань, ул. Право – Лыбедская, 26/53