Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

О.А. Чихачева

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Рязань
2018

УДК 621.391.01
ББК 34.5:32.965я7
Ч–71

Чихачева, О.А.
Ч–71 Математические и инструментальные методы экономики: учебное пособие / О.А. Чихачева. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2018. – 31 с.

Данное учебное пособие предназначено для подготовки и проведения занятий по дисциплинам «Математический анализ» и «Методы оптимальных решений». Пособие предназначено для студентов бакалавриата направления подготовки 38.03.01 Экономика всех форм обучения.

В пособии содержатся теоретические сведения, примеры решения экономических задач с использованием математических и инструментальных методов, задачи на 20 вариантов для организации самостоятельной работы студентов.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

УДК 621.391.01
ББК 34.5:32.965я7

Содержание

Введение

«Математический анализ» и «Методы оптимальных решений» – одни из профилирующих дисциплин учебного плана направления 38.03.01 Экономика.

Цель изучения данных дисциплин состоит в приобретении теоретических знаний о математических и инструментальных методах решения экономических задач, в формировании навыков моделирования и исследования простейших реальных экономических процессов, а также навыков использования аналитических и вычислительных методов для освоения соответствующих разделов всех специальных и прикладных дисциплин.

При написании учебного пособия автор руководствовался принципом формирования профессиональных компетенций и повышением уровня прикладной математической подготовки студентов для изучения экономических процессов и их взаимосвязей на основе экономико-математических методов и моделей в существующих инструментальных средах.

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика.

Учебное пособие содержит основные теоретические сведения, примеры решения экономических задач с использованием математических и инструментальных методов, задачи на 20 вариантов для организации самостоятельной работы студентов. В конце пособия приведен библиографический список.

Учебное пособие поможет студентам в изучении теоретического материала и приобретении навыков решения конкретных прикладных задач.

1 Классификация экономико-математических моделей

Математической моделью называют приближённое описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

Математические модели представляют собой мощный аппарат исследования и прогнозирования различных явлений. Использование математических моделей в экономических исследованиях позволяет:

1) выделить и формально описать наиболее важные, существенные связи экономических переменных и объектов;

2) из чётко сформулированных исходных данных и соотношений математическими методами получить выводы, соответствующие изучаемому объекту в той же мере, что и предположения;

3) математические методы (особенно статистические) позволяют получать новые знания об объекте, оценивать форму и параметры зависимостей его переменных, в наибольшей степени соответствующих имеющимся наблюдениям;

4) точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать её понятии и выводы.

Процесс моделирования любых явлений и процессов реального мира включает в себя три структурных элемента:

1) объект исследования (явление, процесс);

2) исследователь (субъект исследования);

3) модель, осуществляющую отношение между исследователем и познаваемым объектом.

Процесс моделирования состоит из четырёх этапов.

На **первом этапе** исследователь конструирует (или находит среди известных) другой объект – модель исходного объекта, отображающую лишь некоторые наиболее существенные черты последнего. Другими словами, любая модель заменяет оригинал в строго ограниченном смысле. Отсюда следует, что для одного объекта может быть построено несколько моделей, отражающих определённые его стороны или характеризующих его с разной степенью детализации.

На **втором этапе** процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования. Основным вопросом на этом этапе является решение так называемой ***прямой задачи***, то есть получение в результате анализа модели выходных данных для их дальнейшего сопоставления с результатами наблюдений изучаемого явления или процесса. Одной из форм такого исследования является проведение модельных экспериментов с помощью ЭВМ, при которых целенаправленно изменяются условия функционирования модели и систематизируются результаты её поведения. Конечным результатом этапа является совокупность знаний (теоретических следствий) о модели в отношении выделенных существенных сторон объекта-оригинала.

Третий этап заключается в выяснении того, удовлетворяет ли принятая модель ***критерию практики***, то есть согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями (знаниями) о модели в предлагаемой точности наблюдений. Если модель не удовлетворяет критерию практики, то её нельзя применять к исследованию объекта-оригинала; требуется коррекция модели. Если модель удовлетворяет критерию практики, то далее осуществляется перенос знаний с модели на оригинал и переход с языка модели на язык оригинала. Полученные знания используются как для построения обобщающей теории реального объекта, так и для управления им.

Четвёртый этап состоит в последующем анализе и модернизации модели в связи с накоплением новых данных об изучаемом объекте.

Построение экономико-математических моделей обладает рядом существенных особенностей, связанных как с объектом моделирования, так и с применением аппарата и средств математического моделирования. Рассмотрим основные особенности этапов построения экономико-математических моделей.

Первый этап подразделяется на два шага. На **первом шаге** происходит постановка экономической проблемы и её качественный анализ. Для этого требуется:

1) сформулировать сущность проблемы, принимаемые предпосылки и допущения;

2) выделить важнейшие черты и свойства моделируемого объекта, процесса или явления;

3) изучить структуру и взаимосвязь элементов моделируемого объекта, процесса или явления;

4) сформулировать гипотезы, объясняющие поведение и развитие моделируемого объекта, процесса или явления.

На **втором шаге** происходит ***формализация*** изучаемой экономической проблемы, то есть запись в виде, пригодном для изучения её математическими методами, а именно:

1) определяется тип модели, изучается возможность её применения в данной задаче, то есть стремятся построить модель, относящуюся к хорошо изученному классу математических моделей, что может привести к некоторому упрощению исходных предпосылок, не искажающему основных черт моделируемого объекта; однако, возможна ситуация, когда формализация проблемы приводит к неизвестной ранее математической структуре;

2) уточняется перечень экзогенных и эндогенных параметров, форма связей (***экзогенными параметрами*** называют величины, которые могут быть заданы вне модели или известны заранее; ***эндогенными параметрами*** **(*переменными*)** называют величины, которые не могут быть заданы извне и которые нужно определить в ходе расчётов по модели);

3) вводятся обозначения для экзогенных и эндогенных параметров;

4) взаимосвязи между эндогенными параметрами (переменными) записываются в виде математических зависимостей (уравнений, неравенств, функций и т.п.).

Второй этап построения экономико-математической модели подразделяется на три шага. На **первом шаге** проводится аналитическое исследование изучаемой модели, то есть математическими методами выявляются общие свойства модели и её решений. В частности, решаются следующие задачи:

1) доказательство существования хотя бы одного решения сформулированной задачи;

2) определение количества решений;

3) отыскание способа найти все решения, структура множества решений;

4) диапазон изменения параметров модели и другие.

Второй шаг состоит в подготовке исходной информации. Для его реализации требуется:

1) выработать общие принципы отбора данных для использования в данной экономико-математической модели;

2) осуществить сбор данных;

3) провести первичную обработку собранных данных для использования в модели.

Третий шаг представляет собой численное решение моделируемой экономической проблемы. Он включает в себя:

1) разработку алгоритмов численного исследования и подготовку программ для ЭВМ;

2) непосредственное проведение расчётов (модельный эксперимент).

Численное решение существенно дополняет результаты аналитического исследования, а для многих моделей является единственно возможным способом исследования.

На **третьем этапе** решается вопрос о правильности и полноте результатов моделирования и применимости их как в практической деятельности, так и в целях усовершенствования модели. Поэтому в первую очередь производятся ***верификация*** (проверка правильности структуры) и ***валидация*** (проверка соответствия данных, полученных на основе модели, реальному процессу) модели по тем свойствам, которые были выбраны в качестве существенных. В случае отрицательного ответа требуется вернуться на несколько этапов назад и уточнить или изменить модель. В случае положительного ответа полученные результаты интерпретируются с экономической точки зрения и используются для анализа и прогнозирования экономических явлений и процессов и управления ими.

Четвёртый этап состоит в совершенствовании модели вследствие накопления новых наблюдений и дальнейшего развития теории.

Для перечисленных этапов экономико-математического моделирования характерны прямая и обратная взаимосвязи этапов. Прямая взаимосвязь этапов при построении экономико-математической модели заключается в последовательном переходе от этапа к этапу. Обратная взаимосвязь этапов состоит в возврате к предыдущим этапам при выполнении одного из промежуточных этапов. Наиболее часто необходимость возврата к предыдущим этапам возникает:

1) при формализации модели, если выясняется, что исходная постановка задачи или слишком сложна или противоречива;

2) при подготовке исходной информации, если выясняется, что необходимая информация или отсутствует или затраты на её подготовку слишком велики;

3) при анализе численных результатов, если выясняется, что полученные результаты не соответствуют реальному процессу.

Во всех перечисленных случаях требуется корректировка математической модели, а в некоторых случаях – уточнение постановки исходной задачи.

По своему определению любая экономико-математическая модель неполна, так как учитывает только факторы функционирования реального экономического объекта. Влияние каждого из неучтённых факторов предполагается малым, но совокупность всех неучтённых факторов может определять существенное отклонение в поведении объекта. В этом случае также предполагается, что совокупность всех факторов, не учитываемых явно в экономико-математической модели, оказывает на объект относительно малое результирующее воздействие с точки зрения решаемой экономической проблемы. Состав учитываемых в модели факторов, тип и структура экономико-математической модели могут быть уточнены в ходе совершенствования модели.

В настоящее время пока не создано единой системы классификации экономико-математических моделей. В таблице 1 приводится классификация по наиболее часто используемым признакам.

Таблица 1 – Классификация экономико-математических моделей

№	Классификационный признак	Класс	Комментарий
1	2	3	4
1	Общее целевое назначение	Теоретико-аналитические модели	Используются при изучении общих свойств и закономерностей экономических процессов
		Прикладные модели	Применяются в решении конкретных экономических задач анализа, планирования и управления
2	Степень объединения (агрегирования) объектов моделирования	Макроэкономические модели	Отражают функционирование экономики как единого целого
		Микроэкономические модели	Отражают функционирование отдельных экономических объектов (предприятий, фирм и т.п.)
3	Цель создания и применения	Балансовые модели	Выражают требование наличия ресурсов и их использования
		Трендовые модели	Отражают развитие экономической системы через тренд (длительную тенденцию) её основных показателей
		Оптимизационные модели	Предназначены для выбора наилучшего варианта из определённого числа вариантов производства, потребления, распределения и т.п.
		Имитационные модели	Предназначены для использования в процессе компьютерной имитации изучаемых явлений и процессов

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4
4	Тип информации	Аналитические модели	Построены на априорной информации (на основе предположений, без проведения опыта)
		Идентифицируемые модели	Построены на апостериорной информации (на основе данных, полученных из опыта)
5	Учёт фактора времени	Статические модели	Все зависимости в модели отнесены к одному моменту времени
		Динамические	Описывают экономическую систему в развитии
6	Учёт фактора неопределённости	Детерминированные	Совокупность значений на входе модели и результаты на выходе связаны функциональными зависимостями
		Стохастические	При задании на входе модели определённой совокупности значений на выходе могут получаться различные результаты в зависимости от воздействия случайных факторов
7	Тип математического аппарата, используемого в модели	Матричные модели	Используют аппарат алгебры матриц и матричного анализа
		Модели линейного и нелинейного программирования	Используют аппарат функций многих переменных, линейного и нелинейного программирования
		Корреляционно-регрессионные модели	Используют аппарат математической статистики
		Дифференциальные модели	Используют аппарат математического анализа и дифференциальных уравнений
		Модели теории массового обслуживания	Используют аппарат теории массового обслуживания
		Модели сетевого планирования и управления	Используют аппарат теории графов и планирования на сетях
		Игровые модели	Используют аппарат теории игр
		И т.д.	
8	Подход к изучению	Дескриптивные (описательные) модели	Предназначены для описания и объяснения фактически наблюдаемых явлений и / или их прогнозирования
		Нормативные модели	Предназначены для выяснения вопроса, как должна быть устроена и как должна развиваться экономическая система в смысле определённых критериев

2 Однофакторные оптимизационные модели микроэкономики

2.1 Предельные показатели в микроэкономике

Все экономические показатели можно разделить на ***абсолютные*** и ***относительные***. ***Абсолютные показатели*** выражаются в каких-либо объёмных или денежных единицах и представляют собой либо значение величины за определенный промежуток времени (***потоковое значение***) либо значение величины на определенную дату (***запасовое значение***). ***Относительные показатели*** представляют собой отношения абсолютных (или других относительных) показателей: например, количество единиц одного показателя на единицу другого в один и тот же момент времени или отношение двух значений одного и того же показателя в различные моменты времени (***темп роста данного показателя***). Для комплексного анализа экономической ситуации важно учитывать как абсолютные, так и относительные показатели. Наиболее широко используются ***средние*** и ***предельные*** величины.

Пусть $F(x)$ – некоторый абсолютный показатель. Его так же называют ***суммарной величиной***. В экономике в роли суммарных величин выступают доход (выручка) или издержки как функции объёма выпуска ($R(Q)$ или $C(Q)$), объём выпуска как функция от количества переменного ресурса, например труда, – $Q(L)$, полезность как функция количества потребляемого блага $U(x)$ и другие экономические показатели.

Средняя величина $AF(x)$ определяется как отношение суммарной величины $F(x)$ к независимой переменной x: $AF(x)=\frac{F(x)}{x}$. Примеры средних величин в экономике: средний доход (выручка) $AR=\frac{R(Q)}{Q}$, средние издержки $AC=\frac{C(Q)}{Q}$, средний продукт труда $AQ_L=\frac{Q(L)}{L}$ и т. д.

Маржинальная (предельная) величина $MF(x)$ определяется как производная суммарной величины $F(x)$ по независимой переменной x: $MF(x)=F'(x)\equiv\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ (предполагается, что независимая переменная меняется непрерывно). В случае, когда суммарная величина меняется дискретно, то под маржинальной (предельной) величиной понимают отношение изменения $\Delta F(x)$ суммарной величины $F(x)$ к вызвавшему это изменение изменению Δx независимой переменной x: $MF(x)=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$. Примеры предельных величин в экономике: предельный доход (выручка) $MR=R'(Q)$, предельные издержки $MC=C'(Q)$, предельный продукт труда $MQ_L=Q'(L)$ и т. д.

Суммарные, средние и предельные величины могут задаваться как аналитически (формулой), так и графически.

Пример 1. Пусть зависимость издержек производства задана формулой $C(Q) = 30Q - 0{,}04Q^3$. Найти средние и предельные издержки при объёме продукции $Q = 10$ единиц.

Решение. Средние издержки задаются формулой $AC = \frac{C(Q)}{Q}$, тогда $AC = \frac{30Q - 0{,}04Q^3}{Q} = 30 - 0{,}04Q^2$; средние издержки при объёме продукции $Q = 10$ единиц $AC(10) = 30 - 0{,}04 \cdot 10^2 = 30 - 4 = 26$ денежных единиц на единицу продукции. Предельные издержки задаются формулой $MC = C'(Q)$, тогда $MC = \left(30Q - 0{,}04Q^3\right)' = 30 - 0{,}12Q^2$; предельные издержки при объёме продукции $Q = 10$ единиц $MC(10) = 30 - 0{,}12 \cdot 10^2 = 30 - 12 = 18$ денежных единиц на единицу продукции.

Таким образом, средние издержки $AC = 26$ денежных единиц на единицу продукции, предельные издержки $MC = 18$ денежных единиц на единицу продукции.

2.2 Максимизация прибыли фирмы

Экономическими показателями, характеризующими работу фирмы, являются объём выпуска продукции Q, цена единицы продукции $P(Q)$, доход (выручка) от продажи $R(Q) = P(Q)Q$, издержки $C(Q)$, прибыль $\Pi(Q) = R(Q) - C(Q)$. Доход от продаж $R(Q) = P(Q)Q$ определяется зависимостью $P(Q)$ цены от количества проданной продукции. Издержки $C(Q)$ зависят от технологии производства. Требуется найти такой объём выпуска продукции Q, при котором прибыль была бы максимальна.

В микроэкономике известен закон: *оптимальный уровень выпуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода:* $MR = MC$. Покажем, что этот закон можно получить как следствие теоремы Ферма. Действительно, объём выпуска продукции $Q_{опт}$ оптимален, если прибыль $\Pi(Q_{опт})$ максимальна. В точке наибольшего значения, по теореме Ферма, $\Pi'(Q_{опт}) = 0$ или $R'(Q_{опт}) - C'(Q_{опт}) = 0$, или $R'(Q_{опт}) = C'(Q_{опт})$, или $MR(Q_{опт}) = MC(Q_{опт})$.

Аналогично рассуждая, можно получить еще один закон микроэкономики: *уровень наиболее экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек:* $AC = MC$. Действительно, уровень наиболее экономичного производства $Q_{эк}$ характеризуется тем, что средние издержки $AC(Q_{эк})$ минимальны. Следовательно, $\left(AC(Q_{эк})\right)' = 0$. Так как $AC(Q)=\dfrac{C(Q)}{Q}$, то $\left(AC(Q)\right)'=\dfrac{C'(Q)Q-C(Q)}{Q^2}$, тогда $C'(Q_{эк})=\dfrac{C(Q_{эк})}{Q_{эк}}$ или $MC(Q_{эк})=AC(Q_{эк})$.

В микроэкономике типичная функция издержек может иметь вид: $C(Q)=\lambda_0+\lambda_1 Q-\lambda_2 Q^2+\lambda_3 Q^3$, где $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 > 0$ – экзогенные параметры. Для упрощения выкладок будем полагать, что $\lambda_0=0$, и функция издержек имеет вид $C(Q)=\lambda_1 Q-\lambda_2 Q^2+\lambda_3 Q^3$.

Исследуем функцию издержек $C(Q)=\lambda_1 Q-\lambda_2 Q^2+\lambda_3 Q^3$ на возрастание, убывание и точки экстремума. Производная функции издержек: $C'(Q)=\lambda_1-2\lambda_2 Q+3\lambda_3 Q^2$. Если $\lambda_2^2-3\lambda_1\lambda_3>0$, то необходимое условие экстремума: $C'(Q)=\lambda_1-2\lambda_2 Q+3\lambda_3 Q^2=0$ выполняется при $Q_1=\dfrac{\lambda_2-\sqrt{\lambda_2^2-3\lambda_1\lambda_3}}{3\lambda_3}$ и $Q_2=\dfrac{\lambda_2+\sqrt{\lambda_2^2-3\lambda_1\lambda_3}}{3\lambda_3}$. Производная функции издержек $C'(Q)>0$ при $Q\in(0,Q_1)$ и $Q\in(Q_1,+\infty)$. На этих интервалах издержки возрастают. Производная функции издержек $C'(Q)<0$ при $Q\in(Q_1,Q_2)$. На этом интервале издержки убывают. Следовательно, при $Q_1=\dfrac{\lambda_2-\sqrt{\lambda_2^2-3\lambda_1\lambda_3}}{3\lambda_3}$ функция издержек $C(Q)$ имеет максимум, а при $Q_2=\dfrac{\lambda_2+\sqrt{\lambda_2^2-3\lambda_1\lambda_3}}{3\lambda_3}$ – минимум. Если $\lambda_2^2-3\lambda_1\lambda_3\leq 0$, то функция издержек строго монотонно возрастает.

Найдём уровень наиболее экономичного производства. Он определяется как точка минимума функции средних издержек. Средние издержки: $AC(Q)=\dfrac{C(Q)}{Q}=\lambda_1-\lambda_2 Q+\lambda_3 Q^2$. Тогда $\left(AC(Q)\right)'=-\lambda_2+2\lambda_3 Q=0$ при $Q_{эк}=\dfrac{\lambda_2}{2\lambda_3}$ ед. По второму достаточному условию экстремума $\left(AC(Q)\right)''=2\lambda_3>0$ при всех значениях Q, следовательно, $Q_{эк}=\dfrac{\lambda_2}{2\lambda_3}$ – точка минимума функции средних издержек. Но, с другой стороны, в этой точке $AC=MC$.

Найдём минимум предельных издержек. $MC(Q)=\lambda_1-2\lambda_2 Q+3\lambda_3 Q^2$. $\left(MC(Q)\right)'=-2\lambda_2+6\lambda_3 Q=0$ при $Q_{MC}=\dfrac{\lambda_2}{3\lambda_3}$ ед. По второму достаточному условию $\left(MC(Q)\right)''=6\lambda_3>0$ при всех значениях Q, поэтому $Q_{MC}=\dfrac{\lambda_2}{3\lambda_3}$ – точка минимума функции предельных издержек.

Пример 2. Пусть зависимость цены от спроса имеет вид $P(Q) = 100 - Q$, функция издержек:

$$C(Q) = Q^3 - 37Q^2 + 169Q + 4000 .$$

Найти объём производства, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Решение. Функция прибыли имеет вид:

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) = P(Q)Q - C(Q) == -Q^3 + 36Q^2 - 69Q - 4000 .$$

Тогда $\Pi'(Q) = -3Q^2 + 72Q - 69$.

Приравнивая производную функции прибыли к нулю, получаем: $Q_{опт1} = 1$, $Q_{опт2} = 23$.

Проверим достаточное условие экстремума: $\Pi''(Q) = -6Q + 72$,

$\Pi''(Q_{опт1}) = -6 + 72 = 66 > 0$,

следовательно, при $Q_{опт1} = 1$ функция прибыли достигает минимума.

$\Pi''(Q_{опт2}) = -6 \cdot 23 + 72 = -66 < 0$,

следовательно, при $Q_{опт2} = 23$ функция прибыли достигает максимума. Максимальная прибыль $\Pi_{\max} = -23^3 + 36 \cdot 23^2 - 69 \cdot 23 - 4000 = 1290$ (денежных единиц).

2.3 Оптимизация налогообложения предприятий

Пусть β – налог с единицы выпускаемой продукции. Тогда общий налог с Q единиц продукции составит $B = \beta Q$. В этом случае функция прибыли будет иметь вид $\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) - \beta Q$. Требуется выяснить, каким должен быть налог β, чтобы величина суммарного налога B со всей продукции была наибольшей.

Условие максимума прибыли имеет вид $\Pi'(Q) = R'(Q) - C'(Q) - \beta = 0$. Решая это уравнение, находим $Q_{опт}(\beta)$ (то есть оптимальный объём производства зависит от налога β). Подставим $Q_{опт}(\beta)$ в величину суммарного налога, получим $B = \beta Q(\beta)$ и отсюда найдём оптимальное значение налога β.

Пример 3. Пусть $R(Q) = 16Q - Q^2$, $C(Q) = Q^2 + 1$. Выяснить, каким должен быть налог β, чтобы величина суммарного налога B со всей продукции была наибольшей, найти оптимальный объём производства и максимальную прибыль. Сравнить полученный результат с результатом отсутствия налогообложения.

Решение. Функция прибыли имеет вид $\Pi(Q) = -2Q^2 + 16Q - 1 - \beta Q$. Необходимое условие максимума прибыли: $\Pi'(Q) = -4Q + 16 - \beta = 0$. Отсюда $Q_{опт}(\beta) = 4 - \dfrac{\beta}{4}$. Проверим достаточное условие экстремума: $\Pi''(Q) = -4Q < 0$

при любом значении $Q>0$. Следовательно, точка $Q_{опт}(\beta)=4-\dfrac{\beta}{4}$ является точкой максимума при условии $0\le\beta<16$.

Подставим полученное значение объёма производства в величину суммарного налога, получим $B=\beta Q(\beta)=\beta\left(4-\dfrac{\beta}{4}\right)=4\beta-\dfrac{\beta^2}{4}$. Необходимое условие максимума налогов $B'=4-\dfrac{\beta}{2}=0$. Тогда $\beta=8$. Так как $B''=-\dfrac{1}{2}<0$, то $\beta=8$ является точкой максимума. Тогда максимальный налог: $B_{\max}=B(8)=32-\dfrac{64}{4}=16$, оптимальный объём производства $Q_{опт}(8)=2$, а максимальная прибыль $\Pi_{\max}=\Pi(2)=7$.

При отсутствии налогообложения ($\beta=0$) оптимальный объём производства $Q_{опт}(0)=4$, а максимальная прибыль $\Pi_{\max}=\Pi(4)=31$. Таким образом, уменьшение налогообложение стимулирует рост выпуска продукции и приводит к увеличению прибыли от её реализации.

3 Моделирование распределения дохода среди групп населения

3.1 Понятие о распределении дохода и кривой Лоренца

Доходом называют превышение стоимости произведённого продукта над затратами на его производство, а также долю каждого класса, социальной группы или определённого индивидуума в произведённом продукте, присвоенную ими. Формирование доходов населения – одна из главных задач социальной политики государства. Однако при наличии общих принципов формирования доходов сохраняются условия неравенства получаемых доходов и, как следствие, уровней жизни различных слоёв и групп населения.

В экономической теории зависимость процента доходов (y) от процента имеющего их населения (x) называют ***кривой Лоренца***. Она является показателем, отражающим неравномерность распределения совокупного дохода общества между различными группами населения.

Равномерное распределение доходов (абсолютное равенство) характеризуется тем, что 20 % населения получают 20% от совокупного дохода, 40% населения – 40% от совокупного дохода. При равномерном распределении доходов кривая Лоренца имеет вид прямой OA (идеальная кривая Лоренца) и может быть задана функцией $y=x$ на отрезке $[0,1]$ (рисунок 1, за 1 приняты 100% доходов и 100% населения).

Абсолютное неравенство означает, что и 20 %, и 40%, и т.д. населения не получают никакого дохода, за исключением одного человека, который получает 100% совокупного дохода.

Реальное распределение совокупного дохода представлено кривой $O\breve{C}A$ (реальная кривая Лоренца). Чем дальше кривая $O\breve{C}A$ от прямой OA, тем больше неравенство в распределении доходов в данной экономике на данный момент времени.

Доказано, что реальная кривая Лоренца является вогнутой возрастающей функцией $y = f(x)$, заданной на отрезке $[0,1]$ (за 1 приняты 100% доходов и 100% населения).

3.2 Индекс Джини

Величину, равную отношению площади фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = f(x)$, к площади треугольника OAB, называют ***индексом* (*коэффициентом*) *Джини***: $GI = \dfrac{S}{S_{\Delta OAB}}$ (рисунок 1).

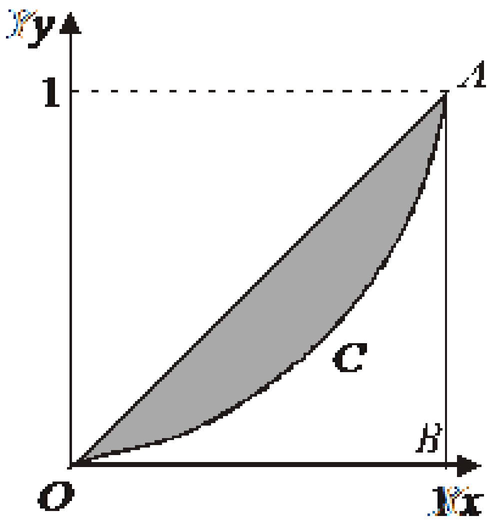

Рисунок 1 – Графическая интерпретация индекса Джини

Коэффициент Джини характеризует степень неравенства в распределении доходов населения.

Так как треугольник OAB является прямоугольным и равнобедренным со стороной катета, равной 1, поэтому $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}$. Отсюда получаем формулу для вычисления коэффициента Джини:

$$GI = \frac{S}{S_{\Delta OAB}} = 2\int_0^1 (x - f(x))dx. \tag{1}$$

В условиях абсолютного равенства площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = f(x)$, $S = 0$, тогда и $GI = 0$. В условиях абсолютного неравенства площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = f(x)$, $S = S_{\Delta OAB}$, тогда $GI = 1$. Следовательно, $0 \le GI \le 1$, причём чем дальше кривая $O\breve{C}A$ от прямой OA, тем более неравномерно распределены доходы в данной экономике, тем больше площадь фигуры S, и тем ближе значение GI к единице.

Замечание. Иногда в литературе индексом Джини называют величину, равную площади фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = f(x)$.

Пример 4. Пусть функция Лоренца имеет вид $f(x) = x^2$. Найти индекс Джини.

Решение. Согласно формуле (1) имеем

$$GI = 2\int_0^1 (x - f(x))dx = 2\int_0^1 (x - x^2)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Так как $GI = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, то в данной экономике распределение доходов достаточно равномерное.

4 Моделирование рыночного равновесия

4.1 Спрос и предложение. Понятие о рыночном равновесии

Обмен товаров на деньги и наоборот называют рыночными отношениями. Важнейшими факторами рыночных отношений являются спрос и предложение. ***Спросом*** называют количество товаров, которое покупатели готовы приобрести. ***Предложением*** называют количество товаров, произведённых на продажу. ***Рыночным равновесием*** называют ситуацию, когда удаётся продать всё количество товаров, изготовленных на продажу, то есть величины спроса и предложения совпадают. Цена единицы товара, при которой достигается состояние рыночного равновесия (величины спроса и предложения совпадают), называется ***равновесной ценой***. В силу того, что спрос и предложение меняются с течением времени под воздействием многих факторов, возникает задача поиска рыночного равновесия и равновесной цены, являющаяся главной проблемой не только рыночных отношений, но математического моделирования.

Простейшей моделью рыночного равновесия является так называемая паутинная модель «спрос-предложение». При её построении используются следующие допущения.

1. На рынке имеется всего один продукт.
2. Изменяться может только цена этого продукта.
3. Все остальные факторы, от которых зависит спрос на данный товар и объём предложения данного товара (цены на другие товары, основные производственные фонды, характер применяемой технологии, налоги и дотации, природно-климатические условия и т.д.) остаются неизменными.

С учётом перечисленных допущений можно задать функции спроса D и предложения S от цены товара P: $Q = D(P)$ и $Q = S(P)$.

Характерной особенностью функции предложения $S(P)$ для многих видов товаров является её монотонное возрастание. Рост предложения при увеличении цены можно объяснить тем, что увеличивается оптимальный объем выпуска товара предприятием при увеличении его цены, а также тем, что для производства высокорентабельного товара в отрасль включаются новые предприятия. При этом на плоскости OPQ кривая предложения задается уравнением $P = MC(Q)$ ($MC(Q)$ – предельные издержки от производства единицы продукции) и представляет собой геометрическое место точек минимумов линий постоянной прибыли.

Характерная особенность функции спроса $D(P)$ – ее монотонное убывание для многих видов товаров, при этом ее график представляет собой геометрическое место точек на плоскости OPQ, в которых цена принимает максимально возможное значение на линиях постоянной полезности.

Функции спроса и предложения являются основными составляющими модели рынка товаров, поскольку они – по предположению – представляют собой решения оптимизационных задач, которые возникают перед участниками («покупателями» и «товаропроизводителями»). Пересечение графиков спроса и предложения происходит в точке равновесия, а соответствующая этой точке цена $P = P_0$ называется ***равновесной***.

В силу свойств кривых спроса и предложения равновесное решение является устойчивым в том смысле, что если цена строго фиксирована и равна равновесной $P = P_0$, то товаропроизводитель, максимизируя прибыль, поставляет на рынок товар в количестве $S(P_0) = Q_0$; одновременно потребитель, стремясь максимизировать полезность, предъявляет спрос $D(P_0) = Q_0$. При установлении на совершенно конкурентном рынке равновесной цены объем товаров (предложение), предлагаемый товаропроизводителем и доставляющий ему максимум прибыли по данной цене, в точности равен спросу потребителя. Математически этот факт можно выразить уравнением $S(P) = D(P)$, решением которого будет являться значение равновесной цены $P = P_0$. Если параметры уравнения $S(P) = D(P)$ не зависят от времени, то его называют ***статической моделью «спрос-предложение»***, в противном случае – ***динамической моделью***.

Динамические модели рынка используются для анализа изменения переменных (цена, спрос, предложение) во времени в случае, когда цена в начальный момент отличается от равновесной. При этом процесс установления равновесной цены может быть описан различными моделями при использовании одних и тех же функций спроса $D(P)$ и предложения $S(P)$ (предполагается, что функции предложения и спроса удовлетворяют следующим условиям: $S'(P) > 0$, $D'(P) < 0$). Различают два подхода:

1) непрерывный, в котором динамика цен описывается дифференциальным уравнением вида $F\left(D(P), S(P), \frac{dP}{dt}\right) = 0$ или $F\left(D(P), S(P), \frac{dP}{dt}, \frac{d^2P}{dt^2}\right) = 0$;

2) дискретный, когда переменные на промежутке времени $[t; t+1)$ принимаются неизменными.

В последнем случае последовательным интервалам времени $[t; t+1)$ соответствуют значения цены P_t, спроса D_t и предложения S_t. В зависимости от используемых гипотез в дискретной модели динамики цен происходит либо запаздывание предложения, – в этом случае равновесная цена определяется из уравнения $S(P_{t+1}) = D(P_t)$, либо запаздывание спроса – в этом случае равновесная цена определяется из уравнения $S(P_t) = D(P_{t+1})$. В обоих случаях процесс поиска равновесной цены является итерационным, то есть представляет собой формирование последовательности цен $\{P_t\}$, сходящейся к равновесной цене P_0

Динамические непрерывные модели «спрос-предложение» позволяют дать прогноз изменения цены с течением времени. Дискретные модели с запаздыванием представляют интерес потому, что в них более последовательно, чем в непрерывных, отражаются процедуры принятия решений.

Модель рыночного равновесия в экономической системе с производством, распределением и потреблением большого числа товаров была предложена в конце XIX века Вальрасом. При её построении предполагается, что число производителей и потребителей так велико, что ни один из них не может влиять на цены. При исследовании модели было доказано, что при определённых условиях существуют цены конкурентного равновесия, при которых каждый потребитель максимизирует свою полезность, а каждый производитель – свою прибыль.

4.2 Статическая модель рынка

Наиболее часто упоминаемой в курсе экономической теории паутинной моделью рыночного равновесия является статическая модель, удовлетворяющая допущениям 1–3 и предположению о том, что цена P не меняется с течением времени. Так как зависимость ***спроса*** $D(P)$ ***от цены*** P на товар является убывающей функцией, то в рамках рассматриваемой модели эту зависимость можно задать степенной функцией $D = kP^a + c$, где $a < 0$, $k > 0$. Зависимость ***предложения*** $S(P)$ ***от цены*** P на товар является возрастающей функцией. Эту зависимость так же можно задать степенной функцией: $S = P^b + d$, где $b \ge 1$.

Величины D, S, P положительны, поэтому графики функций спроса и предложения расположены в первой четверти. Величины a, b, k, c и d зависят от внешних причин (так называемые ***экзогенные параметры***). Условие равновесия $D(P) = S(P)$ является алгебраическим уравнением. Решение этого уравнения, равновесная цена P_0, представляет собой точку пересечения графиков функций $S(P)$ и $D(P)$.

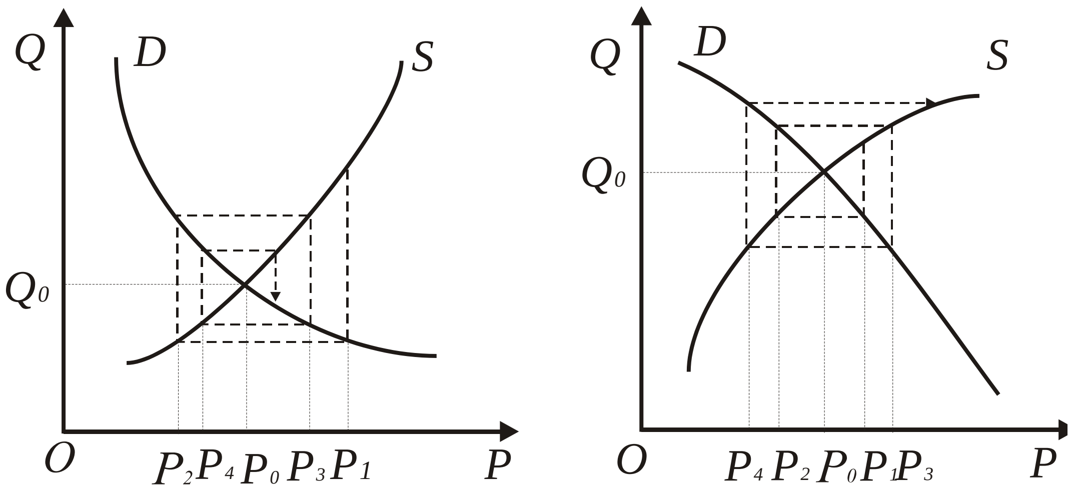

Рисунок 2 – Поиск равновесной цены

Задача поиска равновесной цены представляет собой фактически торг между производителем и покупателем. В процессе торга возникает последовательность чисел, состоящая из называемых производителем и покупателем цен. В определенных условиях (функции $S(P)$ и $D(P)$ *вогнутые*, то есть $a < 0$, $k > 0$, $b \geq 1$) эта последовательность сходится к равновесной цене: $\lim_{n\to+\infty} P_n = P_0$ (рисунок 2). При других условиях (функции $S(P)$ и $D(P)$ *выпуклые*, то есть $0 < a < 1$ при $k > 0$ и $0 < b < 1$, или $a > 1$ при $k < 0$ и $0 < b < 1$) равновесная цена неустойчива. В процессе торга последовательность цен расходится (рисунок 2). Такое возможно, если производитель является монополистом.

На плоскости OPQ соответствующий процесс поиска равновесной цены изображается в виде «паутины», которая «намотана» на кривые спроса и предложения. Это дало основание для названия модели – ***паутинная***.

Сходимость последовательности цен к равновесной цене можно объяснить и с экономической точки зрения. Например, если цена товара на рынке выше равновесной, то предложение превышает спрос и возникает затоваривание. В этой ситуации товаропроизводители (продавцы) многих видов товаров готовы пойти на снижение цены с целью привлечения большего числа покупателей (например, если речь идет о скоропортящихся товарах). Следовательно, при значениях цены выше равновесной происходит давление на нее в сторону уменьшения. Если же цена на рынке ниже равновесной, то спрос превышает предложение и товар становится дефицитным. В этой ситуации часть покупателей готова заплатить за товар более высокую цену, но снизить риск и с уверенностью приобрести товар (например, если образуется очередь покупателей, то стоящие в ее конце могут не получить товара). Таким образом, при значениях цены ниже равновесной происходит давление на нее в сторону увеличения. Эти две тенденции приводят к тому, что на рынках многих видов товаров, как правило, устанавливается равновесие, при котором спрос равен предложению.

Замечание. Для функций $D(P)$ и $S(P)$ возможны и другие функциональные зависимости (например, линейная, показательная или полиномиальная). При этом $S(P)$ будет положительной возрастающей функцией, а $D(P)$ – положительной убывающей функцией. Выпуклость или вогнутость функций $S(P)$ и $D(P)$ определяет сходимость или расходимость последовательности цен к равновесной цене.

При исследовании паутинной модели рыночного равновесия одной из главных является задача о том, насколько сильно изменяются спрос и предложение при изменении цены, то есть требуется оценить чувствительность спроса и предложения к изменению цены. Для измерения чувствительности одного экономического показателя y к изменению другого показателя x используют относительные изменения переменных x и y.

Пусть величина y непрерывно зависит от x, и эта зависимость описывается функцией $y = f(x)$. Изменение независимой переменной x (Δx) приводит к изменению переменной y (Δy). Предел отношения относительных изменений переменных x и y называется ***эластичностью функции*** $y = f(x)$. Обозначим эластичность изменения переменной y при изменении переменной x $E_x(y)$, тогда, используя определение производной, получаем:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}\right)\Bigg/\left(\frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}f'(x) = \frac{f'(x)}{y/x} =$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)/x} = \frac{Mf}{Af},$$

где Mf – предельное значение функции f в точке x,

Af – среднее значение функции в точке x.

Эту эластичность называют так же ***предельной*** или ***точечной*** эластичностью.

Замечание. В экономике под эластичностью понимают отношение относительных изменений переменных x и y: $E_x(y) = \left(\frac{\Delta y}{y}\right)\Big/\left(\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}$.

Свойства эластичности

1. Эластичность – безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены величины x и y: $E_{ax}(by) = E_x(y)$.

2. Эластичности взаимно обратных функций – взаимно обратные величины: $E_x(y) = \dfrac{1}{E_y(x)}$.

3. Эластичность произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x, равна сумме эластичностей этих функций: $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$.

4. Эластичность частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x, равна разности эластичностей этих функций: $E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$.

5. Эластичность суммы двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x, вычисляется по формуле $E_x(u+v) = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u+v}$.

Пусть $y = f(x)$ – функция экономического показателя y от экономического показателя (или фактора) x. Различают три вида экономического показателя y в зависимости от величины $|E_x(y)|$:

а) если $|E_x(y)| > 1$, то экономический показатель y называется ***эластичным по*** x;

б) если $|E_x(y)| = 1$, то экономический показатель y называется ***нейтральным по*** x;

в) если $|E_x(y)| < 1$, то экономический показатель y называется ***неэластичным по*** x.

Эластичность функции $y = f(x)$ показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%. Если экономический показатель y эластичен по x, то при изменении величины x, величина y меняется сильно, а если неэластичен, то слабо.

В качестве классического примера абсолютно неэластичного спроса ($E_P(D) = 0$) рассматривается спрос на инсулин, неэластичного спроса ($|E_P(D)| < 1$) – спрос на товары первой необходимости (хлеб, молоко и т.п.).

Найдём изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на $a\%$. Величина спроса численно равна количеству проданных единиц продукции, то есть $D(P) = Q(P)$. Тогда доход (выручку) производителя от продажи $Q(P)$ единиц товара можно вычислить по формуле: $R = QP$. Используя формулу для эластичности произведения функций и учитывая, что эластичность спроса по цене всегда отрицательна (зависимость спроса от цены – убывающая функция), а $E_P(Q) = E_P(D)$, получаем:

$$E_P(R) = E_P(Q) + E_P(P) = E_P(Q) + 1 = 1 - |E_P(D)|.$$

Из формулы видно, что эластичность выручки по цене отрицательна для товаров, спрос на которые эластичен ($|E_P(D)| > 1$), и положительна для товаров, спрос на которые неэластичен ($|E_P(D)| < 1$). Это означает, что если спрос неэластичен, то изменение цены вызывает изменение выручки в том же направлении. Продавцам выгодно повышать цену, так как повышение цены увеличивает выручку. Если же спрос эластичен, то увеличение цены вызывает изменение выручки в противоположном направлении. В этом случае продавцам выгоднее снижать цену на товар.

Пример 5. Пусть опытным путем установлены функции спроса и предложения от цены товара P: $D = \frac{P+1}{P}$, $S = P^2 + 1$. Найти: 1) равновесную цену; 2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене; 3) изменение спроса (в процентах) и изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 10%.

Решение. 1) Равновесная цена определяется равенством $S(P) = D(P)$ или $\frac{P+1}{P} = P^2 + 1$. Решая это уравнение, получаем, что равновесная цена $P_0 = 1$ (денежных единиц).

2) Найдём эластичность спроса по цене:

$$E_P(D) = \frac{P}{D(P)} D'(P) = \frac{P}{(P + 1/P)} \left(\frac{P+1}{P} \right)' = \frac{P^2}{P+1} \cdot \frac{P - (P+1)}{P^2} = \frac{-1}{P+1}.$$

При $P_0 = 1$ $E_{P_0}(D) = -0{,}5$. Так как $|E_P(D)| = |-0{,}5| = 0{,}5 < 1$, то спрос является неэластичным по цене.

Найдём эластичность предложения по цене:

$$E_P(S) = \frac{P}{S(P)} S'(P) = \frac{P}{P^2+1} (P^2+1)' = \frac{P}{P^2+1} \cdot 2P = \frac{2P^2}{P^2+1}.$$

При $P_0 = 1$ $E_{P_0}(S) = 1$, то есть, предложение по цене нейтрально.

3) Найдём изменение спроса (в процентах) при увеличении цены на 10%. Так как эластичность спроса $D = D(P)$ показывает приближенно, на сколько процентов изменится спрос D при изменении цены P на 1%, то при увеличении цены на $a\%$ спрос изменится на величину $\Delta D = a\% \cdot E_P(D)$. При $a = 10\%$ получаем $\Delta D = 10\% \cdot (-0{,}5) = -5\%$, то есть спрос уменьшится на 5%.

Найдём изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 10%. Имеем: $E_P(R) = 1 - |E_P(D)| = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Тогда $\Delta R = a\% \cdot E_P(D) = 10\% \cdot 0{,}5 = 5\%$, то есть доход увеличится на 5%.

Таким образом, при увеличении цены на 10% спрос уменьшится на 5%, а доход увеличится на 5%.

4.3 Динамические модели рынка

Простейшей динамической моделью равновесия на рынке одного товара является модель Эванса. При её построении используются следующие предположения:

1. Спрос и предложение являются линейными функциями цены:

   $D(P) = a - bP$, $a > 0$, $b > 0$ (спрос с ростом цены убывает);

   $S(P) = \alpha + \beta P$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (предложение с ростом цены растёт).

2. При нулевой цене спрос превышает предложение: $a > \alpha$.
3. Время t считается непрерывным.

4. Изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением:

$$\Delta P = \gamma\big(D(P) - S(P)\big)\Delta t\,,\ \gamma > 0\,.$$

Взаимодействие потребителей и производителей происходит таким образом, что отражающая это взаимодействие цена непрерывно приспосабливается к ситуации на рынке: в случае превышения спроса над предложением – возрастает, в противоположном случае – падает. Непрерывное изменение цены удобно описывать производной цены по времени: $\dot{P} = \dfrac{dP}{dt}$. Тогда, используя предположения 1–4, приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно цены:

$$\dot{P} = -\gamma(b + \beta)P + a - \alpha\,,$$

с начальным условием $P(0) = P_0$. Дифференциальное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами. Состоянием равновесия, определяемым условием $\dot{P} = 0$, является прямая $P = \dfrac{a-\alpha}{\gamma(b+\beta)}$, общим решением, равным сумме общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения и частного решения а решением, удовлетворяющим начальному условию $P(0) = P_0$, – функция

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{a-\alpha}{\gamma(b+\beta)}\right)e^{-\gamma(b+\beta)\,t} + \frac{a-\alpha}{\gamma(b+\beta)}\,.$$

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\left(P_0 - \dfrac{a-\alpha}{\gamma(b+\beta)}\right)e^{-\gamma(b+\beta)\,t} + \dfrac{a-\alpha}{\gamma(b+\beta)}\right) = \dfrac{a-\alpha}{\gamma(b+\beta)}$, то равновесная цена с течением времени обязательно будет достигнута, причём её значение не будет зависеть от начальной цены $P(0) = P_0$.

Заметим, что равновесная цена динамической модели Эванса в γ раз меньше равновесной цены $P_s = \dfrac{a-\alpha}{\gamma(b+\beta)}$ статической модели «спрос-предложение» с теми же функциями спроса и предложения и определяемой равенством $D(P) = S(P)$.

В реальных ситуациях спрос и предложение зависят не только от цены, но и от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывной и дифференцируемой зависимостью цены от времени эти характеристики описываются, соответственно, первой ($\dot{P}$) и второй ($\ddot{P}$) производными функции $P(t)$ по времени t. В этом случае функции спроса и предложения могут иметь вид:

$$D(t) = d_1\ddot{P} + d_2\dot{P} + d_3P + d_4\,,\ S(t) = s_1\ddot{P} + s_2\dot{P} + s_3P + s_4\,.$$

Принятые зависимости могут быть объяснены следующим образом:

1) спрос «подогревается» темпом изменения цены: если темп растет (коэффициент при $\ddot{P}$ больше нуля), то рынок увеличивает интерес к товару; и наоборот;

2) изменение цены также влияет на спрос покупателя: если цена растет (коэффициент при $\dot{P}$ больше нуля), то спрос уменьшается, если цена падает (коэффициент при $\dot{P}$ меньше нуля), то спрос растет;

3) предложение также усиливается темпом изменения цены и ростом цены.

Если предположить, что экзогенные параметры d_i и s_i $(i=\overline{1,4})$ – вещественные числа, то, записывая условие рыночного равновесия $D(P)=S(P)$, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно равновесной цены $P(t)$:

$$(d_1-s_1)\ddot{P}+(d_2-s_2)\dot{P}+(d_3-s_3)P+(d_4-s_4)=0.$$

Для прогнозирования изменения цены (динамики цены) P требуется установить функциональную зависимость $P(t)$. Для этого нужно найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, которое может быть получено как сумма общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$(d_1-s_1)\ddot{P}+(d_2-s_2)\dot{P}+(d_3-s_3)P=0$$

и любого частного решения неоднородного дифференциального уравнения. В качестве любого частного решения можно использовать значение равновесной цены P_0, которое находят, полагая в нём $\dot{P}=\ddot{P}=0$.

С прикладной точки зрения функция $P(t)$ должна быть определена и положительна при $t\geq 0$ ($P(t)>0$), и удовлетворять одному из следующих условий:

I. $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=P_0$, P_0 – равновесная цена.

II. $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=\pm\infty$ или не существует.

III. $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)$ не существует, $P(t)$ – ограниченная периодическая функция.

Условие I описывают состояние стабильного рынка в условиях конкуренции, условие II характеризует панику на рынке или гиперинфляцию, условие III – динамику цен товаров сезонного спроса (функция $P(t)$ испытывает периодические колебания около состояния равновесия).

Пример 6. Пусть $D(t)=3\ddot{P}-\dot{P}-2P+18$, $S(t)=4\ddot{P}+\dot{P}+3P+3$. Найти равновесную цену и динамику изменения цены.

Решение. Приравнивая $D(t)=S(t)$ и выполняя необходимые преобразования, получим уравнение в виде:

$$\ddot{P}+2\dot{P}+5P-15=0. \tag{2}$$

Найдём равновесную цену, полагая $\dot{P} = \ddot{P} = 0$, тогда равновесная цена будет являться корнем уравнения $5P - 15 = 0$, следовательно, $P_0 = 3$ (денежных единиц).

Найдём динамику изменения цены. Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид $\ddot{P} + 2\dot{P} + 5P = 0$, его характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет корни:

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm 2i .$$

Следовательно, $P_1(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$ – общее решение однородного дифференциального уравнения $\ddot{P} + 2\dot{P} + 5P = 0$ (C_1 и C_2 – произвольные постоянные и могут быть заданы так, чтобы $P_1(t) > 0$). Тогда общее решение уравнения (2) представляет собой сумму $P_1(t)$ и P_0:

$$P(t) = P_1(t) + P_0 = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3 .$$

Полученная функция описывает динамику цены.

Выясним, какова тенденция изменения цены с течением времени. Для этого вычислим $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t)$:

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3\right) =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3 = \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0, \\ (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) - \textit{ограниченн ая} \end{array}\right] = 3 = P_0 .$$

Так как выполняется условие II, то состояние рынка стабильное. Динамика цены при условии, что в начальный момент времени цена $P(0) = 4$, а скорость цены $\dot{P}(0) = 0$, показана на рисунке 3.

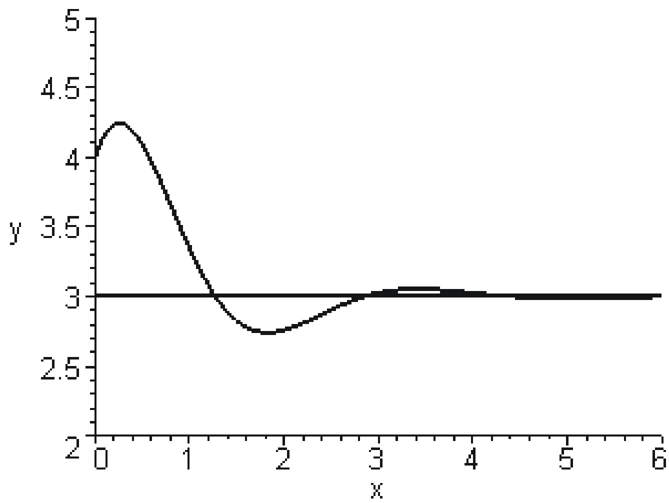

Рисунок 3 – Изменение цены с течением времени

5 Задачи для организации самостоятельной работы студентов

Задача 1. Моделирование потребительского спроса

Дана функция полезности от двух благ $u(Q_1, Q_2)$ (таблица 2). Цены благ равны соответственно $P_1 = 10$ денежных единиц, $P_2 = 2$ денежные единицы, доход потребителя ограничен величиной $I = 60$ денежных единиц.

1. Найти оптимальное распределение благ Q_1 и Q_2 и соответствующую им полезность (сделать чертёж).

2. Получить общий вид функций потребительского спроса, а также

а) прямые функции спроса на блага Q_1 и Q_2 в зависимости от цен;

б) перекрёстные функции спроса на блага Q_1 и Q_2 в зависимости от цен;

в) функции спроса на блага Q_1, Q_2 в зависимости от дохода потребителя.

3. Провести исследование однофакторных функций спроса, построить схематично их графики. Выяснить: а) к какому типу принадлежат блага Q_1 и Q_2; б) какой именно товар они могут представлять (продукт питания, одежду, бытовую технику и т.п.).

4. Найти частичные коэффициенты эластичности общих функций потребительского спроса на блага Q_1, Q_2 по всем действующим факторам.

5. Рассчитать эффекты замены при наличии компенсации для благ Q_1 и Q_2. Оценить блага Q_1 и Q_2 с точки зрения их взаимозаменяемости или взаимодополняемости.

Таблица 2 – Исходные данные к задаче 1

№ вар.	Функция полезности $u(Q_1, Q_2)$	№ вар.	Функция полезности $u(Q_1, Q_2)$
1	$u(Q_1, Q_2) = 2\ln(Q_1 - 3) + 5\ln(Q_2 - 6)$	2	$u(Q_1, Q_2) = 5(Q_1 - 3) + 2(Q_2 - 10)$
3	$u(Q_1, Q_2) = Q_1 Q_2$	4	$u = \dfrac{Q_1 Q_2^2}{(Q_1 + 2)^3}$
5	$u(Q_1, Q_2) = 10\log_3(Q_1 - 2) + 5\log_3 Q_2$	6	$u(Q_1, Q_2) = 4(Q_1 - 6) + (Q_2 - 8)$
7	$u(Q_1, Q_2) = Q_1^{1/2} Q_2^{2/3}$	8	$u = \dfrac{Q_2 Q_1^2}{(Q_2 + 2)^3}$
9	$u(Q_1, Q_2) = 3\lg Q_1 + 5\lg Q_2$	10	$u(Q_1, Q_2) = Q_1^{1/2} Q_2^{1/4}$
11	$u(Q_1, Q_2) = (Q_1 - 1)^{1/4}(Q_2 - 3)^{3/4}$	12	$u(Q_1, Q_2) = Q_1^{1/2} Q_2^{1/2}$
13	$u(Q_1, Q_2) = 2\log_2(Q_1 - 16) + \log_2(Q_2 - 8)$	14	$u = \dfrac{Q_1 Q_2^3}{(Q_1 + 3)^4}$
15	$u(Q_1, Q_2) = -5(Q_1 - 4)^2 - (Q_2 - 20)^2$	16	$u = \dfrac{Q_1^4}{Q_2^3 (Q_1 - 3)}$
17	$u(Q_1, Q_2) = Q_1 Q_2^2$	18	$u(Q_1, Q_2) = (Q_1 - 2)^{1/4}(Q_2 - 5)^{1/4}$
19	$u = \dfrac{Q_1^3 Q_2^2}{(Q_1 + 2)^5}$	20	$u = \dfrac{Q_1^4 Q_2^{-2}}{(Q_1 - 2)^2}$

Задача 2. Простейшая модель рыночного равновесия

Пусть опытным путем установлены функции спроса и предложения от цены товара P: $D(P)$, $S = S(P)$. Используя данные таблицы 3, найти:

1) равновесную цену;

2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене;

3) изменение спроса (в процентах) и изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на a%.

Таблица 3 – Исходные данные к задаче 2

№ вар.	**данные**			**№ вар.**	**данные**		
	$D = D(P)$	$S = S(P)$	***a%***		$D(P)$	$S = S(P)$	***a%***
1	$D = 30 - 0{,}9P$	$S = 16 + 1{,}2P$	25	**2**	$D = 10 - 2P$	$S = 1 + 4P$	4
3	$D = 9 - P$	$S = 1 + P$	10	**4**	$D = 13 - 5P$	$S = 5 + 11P$	3,5
5	$D(P) = 7 - p$	$S(P) = p + 1$	5	**6**	$D = 8 - 2P$	$S = 2 + 6P$	1,5
7	$D(P) = \frac{p+8}{p+2}$	$S(P) = p + 0{,}5$	5	**8**	$D(P) = \frac{p+10}{p+1}$	$S(P) = p^2$	2,5
9	$D(P) = \frac{1}{p^2}$	$S(P) = p^2$	3	**10**	$D(P) = \frac{1}{p}$	$S(P) = p^2$	11
11	$D(P) = \frac{1}{p^{0,5}}$	$S(P) = p^{0,4}$	3	**12**	$D(P) = \frac{1}{p^2}$	$S(P) = p^3$	7,5
13	$D = 19 - 2P$	$S = 3 + 2P$	11	**14**	$D = 10 - 3P$	$S = 2 + 6P$	4,5
15	$D = 11 - 3P$	$S = 3 + P$	8	**16**	$D(P) = \frac{3}{p}$	$S(P) = 27p$	3
17	$D = 15 - 3P$	$S = 1 + 4P$	6	**18**	$D(P) = \frac{48}{p}$	$S(P) = 3p$	5
19	$D = 23 - 3P$	$S = 5 + 6P$	1,5	**20**	$D(P) = \frac{32}{p}$	$S(P) = 8p$	5,5

Задача 3. Предельные показатели в экономике и оптимизация производства

Производитель реализует свою продукцию по цене $P(Q) = p - cQ$ за единицу, а издержки при этом задаются кубической зависимостью $C(Q) = aQ + \lambda Q^3$ ($a < p$, $\lambda > 0$). Используя данные таблицы 4, найти:

1) оптимальный для производителя объём выпуска продукции Q_0 и соответствующую ему прибыль: а) при отсутствии налогообложения; б) при налоге β на единицу продукции; в случае б) найти максимальный налог на прибыль;

2) средние и предельные издержки при уровне выпуска Q_0;

3) среднюю и предельную выручку при уровне выпуска Q_0;

4) определить, какой тип экономической структуры (монополии или совершенной конкуренции) имеет место в данной задаче.

Таблица 4 – Исходные данные к задаче 3

№ вар.	данные					№ вар.	данные				
	p	c	a	λ	β		p	c	a	λ	β
1	100	3	30	0,03	5	**2**	340	0	200	0,06	50
3	100	2,75	20	0,04	10	**4**	150	0	50	0,007	55
5	200	5	20	0,04	20	**6**	250	0	8	0,04	50
7	300	15	25	0,06	38	**8**	500	0	340	0,05	100
9	220	15	40	0,06	20	**10**	450	0	150	0,03	120
11	400	20	50	0,005	20	**12**	15	0	7,5	0,003	3
13	400	25	80	0,02	45	**14**	22	0	7,5	0,004	8
15	350	10	100	0,02	45	**16**	25	0	10	0,002	8
17	420	18	160	0,2	60	**18**	40	0	11	0,008	16
19	380	8	160	0,009	56	**20**	50	0	15	0,0075	25

Задача 4. Оценка равномерности распределения доходов в обществе

Найти коэффициент Джини, если реальная функция Лоренца имеет вид $y = f(x)$ (таблица 5). Выполнить чертеж.

Таблица 5 – Исходные данные к задаче 4

№ вар.	данные	№ вар.	данные	№ вар.	данные	№ вар.	данные
1	$y=\sqrt{x^3}$	**2**	$y=x^2$	**3**	$y=x^3$	**4**	$y=\sqrt[3]{x^4}$
5	$y=\sqrt{x^5}$	**6**	$y=\sqrt{x^9}$	**7**	$y=\sqrt[4]{x^9}$	**8**	$y=\sqrt[3]{x^5}$
9	$y=x^9$	**10**	$y=x^4$	**11**	$y=x^{7/5}$	**12**	$y=\frac{1}{2}\left(x^2+x^3\right)$
13	$y=x^7$	**14**	$y=x^6$	**15**	$y=x^5$	**16**	$y=x^{10}$
17	$y=x^{7/2}$	**18**	$y=x^{7/3}$	**19**	$y=1-\sqrt{1-x^2}$	**20**	$y=x^{7/4}$

Задача 5. Динамическая модель рыночного равновесия

Найти динамику цены P на товар, если прогноз спроса и предложения описывается соотношениями

$$D(t) = d_1P'' + d_2P' + d_3P + d_4,\ S(t) = s_1P'' + s_2P' + s_3P + s_4,$$

где d_i и s_i $(i=\overline{1,4})$ – заданные вещественные числа, в начальный момент времени $t=0$ равновесная цена составляла величину P_0 условных денежных единиц, а скорость изменения цены имела значение P_1 условных денежных единиц в единицу времени (таблица 6). Какое состояние описывает полученное решение: состояние устойчивого равновесия, состояние неустойчивого равновесия, состояние паники на рынке?

Таблица 6 – Исходные данные к задаче 5

№ вар.	данные									
	d_1	d_2	d_3	d_4	s_1	s_2	s_3	s_4	P_0	P_1
1	2	4	7	13	1	2	7	13	11	4
2	1	4	-3	10	2	2	-3	10	3	8
3	2	-2	6	1	1	1	4	1	3	4
4	-2	-2	6	2	-1	1	4	1	3	3
5	4	1	2	-3	3	-3	2	-3	5	-2
6	4	1	8	11	3	3	8	11	5	6
7	2	3	3	3	1	3	-1	-1	4	2
8	2	2	1	9	1	2	5	9	8	4
9	2	3	5	3	1	2	5	5	10	1
10	2	2	6	5	1	3	6	3	10	5
11	2	7	1	6	1	7	5	2	7	4
12	2	2	1	26	1	2	5	2	14	8
13	2	1	3	4	1	4	2	5	3	6
14	-2	1	3	4	-1	3	2	5	12	-11
15	2	4	3	4	1	1	2	5	12	-33
16	4	1	2	1	3	3	3	2	1,5	5
17	4	3	2	4	3	1	3	2	1,5	1
18	4	5	2	2	3	1	3	1	3	1
19	2	4	6	10	1	2	3	10	4	4
20	3	-1	-2	18	4	1	3	3	4	1

Библиографический список

1. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2 изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 1999.

2. Замков, О.О. Математические методы в экономике: учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: МГУ им М.В. Ломоносова, Изд-во ДИС, 1998.

3. Колемаев, В.А. Математическая экономика / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

4. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2005.

5. Кундышева, Е.С. Математическое моделирование в экономике / Е.С. Кундышева. – М.: Дашков и К^{о}, 2004.

6. Пинегина, М.В. Математические методы и модели в экономике: учебное пособие / М.В. Пинегина. – М.: Экзамен, 2002.

7. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Мат. программирование: учеб. пособие / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод и др.; под ред. А.В. Кузнецова, Р.А. Рутковского. – Минск: Выш. шк., 2002.

8. Шикин, Е.В. Математические методы и модели в управлении: учеб. пособие / Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. – М.: Дело, 2002.

9. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособие для вузов / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; под. ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2002.

Учебное пособие

Чихачева Ольга Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Подписано в печать __________. Тираж 20 экз.
Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета
390000, г.Рязань, ул. Право – Лыбедская, 26/53