Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Рязанский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский политехнический университет»

Кафедра «Информатика и информационные технологии»

Ю.И. Арабчикова, Т.А. Асаева

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Часть 2

Учебное пособие

Рязань
2022

УДК 51-7
ББК 22.3
А-79

Арабчикова, Ю.И.
А-79 Дифференциальные уравнения в решении физических задач. Часть 2: учебное пособие / Ю.И. Арабчикова, Т.А. Асаева. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2022. – 24 с.

Учебное пособие предназначено студентам 1-2 курсов технических специальностей. Рассмотрены основы математического анализа, необходимые для изучения курса общей физики при подготовке инженеров. Показано применение теории дифференциальных уравнений в частных производных для описания физических процессов.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

УДК 51-7
ББК 22.3

Содержание

Введение

История физики и математики дает много примеров взаимного обогащения этих наук. Союз этих наук взаимовыгоден. Неслучайно выдающийся физик Исаак Ньютон явился одним из создателей дифференциального и интегрального исчисления. Заметим, что сам Ньютон считал себя математиком и зашифровал одно из своих открытий – «Полезно решать дифференциальные уравнения».

Поэтому математическое образование специалиста любой естественнонаучной специальности не обойдется без курса дифференциальных уравнений.

Пособие не предназначено для (бесполезного) натаскивания в решении многочисленных типов дифференциальных уравнений, а учит студентов использовать многочисленные методы решения дифференциальных уравнений. Именно благодаря этому удалось вместить в этот курс все то, что должны узнать инженеры из вводного курса дифференциальных уравнений.

Физики-теоретики в своей научной работе широко используют почти весь арсенал математики. При этом часто они сами разрабатывают новые методы.

В заключение приведем высказывания ученых о математике. Эти высказывания даются для того, чтобы студенты понимали, что без освоения основ математики невозможно стать настоящими специалистами.

«Математика – это язык, которым с людьми разговаривают боги». Платон (древнегреческий философ, III–IV век до н.э.).

«Истинную философию вещает нам природа; но понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык, при помощи которого она говорит с нами. Этот язык есть математика». Галилео Галилей.

«Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой». Карл Маркс.

«Приближение к более глубокому пониманию основных принципов физики связано со все более сложными математическими методами». Альберт Эйнштейн.

1 Классификация уравнений математической физики

Основной класс уравнений математической физики составляют уравнения в частных производных. В общем случае уравнение в частных производных может быть записано в виде

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial^{k_1} x_1 ... \partial^{k_n} x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

где F – заданная функция от всех указанных в скобках величин – независимых аргументов от x_1 до x_n, искомой функции $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ и ее частных производных.

Порядок старшей производной, входящей в уравнение (1), определяет порядок дифференциального уравнения. Уравнение (1) может быть линейным, квазилинейным и нелинейным. Уравнение называется квазилинейным, если оно линейно относительно всех старших производных от искомой функции. Так, например, уравнение

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{2}$$

является квазилинейным уравнением второго порядка для двух независимых переменных, если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} не зависят от вторых производных, но могут зависеть от переменных, искомой функции и от ее первых производных. Уравнение (2) является линейным, если указанные коэффициенты зависят только от независимых переменных. Если функция $f(x_1, x_2)$ в уравнении (2) тождественно равна нулю, уравнение называют однородным.

Решением уравнения (1) или (2) является всякая функция, тождественно обращающая его при подстановке в тождество. Уравнения имеют бесконечное множество решений. Единственное решение образуется при формулировке дополнительных условий.

В этом разделе мы будем рассматривать лишь уравнения второго порядка, которые охватывают многие задачи физики.

Процесс распространения тепла и концентрации описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f_1(t,x,y,z) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f_1(t,x,y,z). \tag{3}$$

Решение этого уравнения зависит от времени t и трех пространственных координат. В уравнении (3) использовано сокращенное обозначение для оператора Лапласа Δu. Этим обозначением будем пользоваться и в дальнейшем.

Процесс распространения волн (упругих, звуковых, электромагнитных) описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f_2(t,x,y,z) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f_2(t,x,y,z). \tag{4}$$

Обратим внимание на то, что в отличие от уравнения теплопроводности (3) здесь используется вторая производная по времени, а не первая.

Стационарное состояние многих физических систем часто описывается уравнением Пуассона

$$\Delta u + f_3(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f_3(x,y,z) = 0. \tag{5}$$

В качестве искомой функции в уравнении Пуассона может быть температура, потенциал, напряженность электрического и магнитного поля.

Выписанные уравнения (3)–(5) часто называют основными уравнениями математической физики. Их исследования действительно позволяют разобраться во многих физических явлениях и решить конкретные технические задачи.

Математическая задача с физическим содержанием обычно должна удовлетворять так называемым условиям корректности. Задача считается корректно поставленной, если ее решение существует, оно единственно и устойчиво. Под устойчивостью здесь понимают слабое изменение решения при малом изменении параметров задачи.

Рассмотрим вопросы классификации уравнений на примере однородного уравнения (однородное слагаемое тип уравнения не изменяет) с двумя независимыми переменными:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f\left(x_1, x_2\right) = 0. \tag{6}$$

Характеристическим уравнением для (6) является уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0.$$

Интегралы этого уравнения (решения) называют характеристиками. Характеристическое уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}, \quad D \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22}.$$

Знак подкоренного выражения (дискриминант D) определяет тип уравнения: при $D > 0$ уравнение гиперболического типа, при $D = 0$ уравнение параболического типа, при $D < 0$ уравнение эллиптического типа. В различных частях области определения переменных уравнение может иметь различный тип. В случае постоянных коэффициентов тип уравнения один для всей области. Следует отметить, что замена переменных не меняет типа уравнений.

2 Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi\Delta u + f_1(t,x,y,z) = \chi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f_1(t,x,y,z),$$

где χ − коэффициент температуропроводности;

$f_1(t,x,y,z)$ – заданная функция, определяет мощность внутренних источников тепла.

Коэффициент температуропроводности зависит от теплопроводности среды σ, плотности ρ и удельной теплоемкости c: $\chi = \sigma / (\rho \cdot c)$. Уравнение справедливо для случая постоянных значений параметров σ, ρ, c и, следовательно, χ.

В одномерном случае (нет зависимости от координат y и z) уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_1(t,x). \qquad (7)$$

Уже было упомянуто, что уравнение теплопроводности является уравнением параболического типа. Убедимся в этом, составив дискриминант D и полагая, что первой независимой переменной является время, а второй – координата:

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1 \cdot \chi = -\chi < 0.$$

Для формулировки конкретной задачи, описываемой уравнением (7), необходимо задать функцию источников тепла, два граничных условия и начальное условие. В качестве простейшего примера рассмотрим случай без внутренних источников тепла ($f_1 = 0$) с начальным состоянием ($t=0$) в виде гармоники с номером n

$$u(0,x) = A_n \sin\left(n\pi x / l\right) \tag{8}$$

при нулевых граничных значениях на концах рассматриваемого интервала по x от $x = 0$ до $x = l$

$$u(t,0) = 0,\ u(t,l) = 0. \tag{9}$$

Легко проверить, что точным решением поставленной задачи является функция

$$u(t,x) = A_n \sin\left(n\pi x / l\right) \cdot e^{-\chi\left(n^2\pi^2/l^2\right)t}.$$

Отметим свойства этого решения. Во-первых, видно, что любые гармоники монотонно по экспоненциальному закону убывают с течением времени. Во-вторых, гармоники с большим номером убывают быстрее.

Медленнее всего убывает первая гармоника с $n = 1$. Из закона убывания первой гармоники находится характерное время выравнивания неоднородности по температуре:

$$t_* = \frac{l^2}{\pi^2\chi} \approx 0{,}1\left(l^2 / \chi\right). \tag{10}$$

За характерное время амплитуда первой гармоники уменьшается в e раз (e – основание натуральных логарифмов, $e \approx 2{,}718$). Согласно формуле (10) характерное время пропорционально квадрату длины и обратно пропорционально коэффициенту температуропроводности.

Рассмотрим расширение поставленной задачи, напомнив, что использованное начальное условие было выбрано в виде одной гармоники с номером n (8). Расширение задачи позволяет использовать в качестве начального условия произвольную функцию координаты

$$u(0,x)=\varphi(x)\,. \qquad (11)$$

В этом случае задача решается с помощью разложения функции (11) в ряд Фурье

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{N}A_n\sin\left(n\pi x/l\right). \qquad (12)$$

Из математического анализа известно, что любая гладкая функция может быть представлена в виде сходящегося ряда (12). Это означает, что при достаточно большом значении числа слагаемых N погрешность представления (12) оказывается малой. После замены функции, задающей начальное условие, приближенное решение задачи имеет вид

$$u(t,x)\approx\sum_{n=1}^{N}A_n\sin\left(n\pi x/l\right)\cdot e^{-\chi\left(n^2\pi^2/l^2\right)t}\,. \qquad (13)$$

Использованный нами принцип суперпозиции (сумма решений уравнения также является решением уравнения) справедлив для линейных задач. Точность решения (13) определяется числом слагаемых и гладкостью функции $\phi(x)$. Продолжим расширение постановки задачи, напомнив, что в качестве граничных условий мы использовали нулевые значения (9). Если граничные условия первого рода (заданные постоянные значения) имеют вид

$$u(t,0)=A,\; u(t,l)=B,$$

решение задачи следует искать в виде

$$u(t,x)=A+\left(\frac{B-A}{l}\right)x+\sum_{n=1}^{N}\tilde{A}_n\sin\left(n\pi x/l\right)\cdot e^{-\chi\left(n^2\pi^2/l^2\right)t}\,,$$

в котором коэффициенты $\tilde{A}_n$ аппроксимируют функцию

$$\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)-A-\left(\frac{B-A}{l}\right)x\,.$$

Разобранные примеры относятся к граничным условиям первого рода. Ситуация меняется, если граничные условия иного рода. Решить задачу при произвольных граничных условиях помогает метод разделения переменных.

3 Метод разделения переменных

Метод разделения переменных позволяет найти решение многих уравнений математической физики (не только уравнения теплопроводности).

Однако описание метода выполним для разобранного выше уравнения параболического типа. Метод предполагает, что решение уравнения можно представить в виде произведения функций только от одной независимой переменной. В случае одномерного уравнения теплопроводности в декартовых координатах метод предлагает находить решение в виде

$$u(t,x) = T(t)\cdot X(x), \tag{14}$$

где *T(t)* − функция только времени;

X(x) − функция только координаты.

Подстановка представления (14) в однородное уравнение теплопроводности дает соотношение

$$T'(t)\cdot X(x) = \chi T(t)\cdot X''(x).$$

После деления на $\chi T(t)\cdot X(x)$ соотношение приводится к виду, из которого вытекает, что

$$\frac{T'}{\chi T} = \frac{X''}{X} = const \equiv -\lambda, \tag{15}$$

где λ − параметр разделения.

Утверждение (15) следует из того факта, что комбинации функций различных независимых аргументов могут быть равны лишь в случае их равенства одинаковой постоянной. Следствием (15) являются два уравнения:

$$T' + \lambda\chi T = 0\ , \tag{16}$$

$$X'' + \lambda X = 0\ . \tag{17}$$

Для уравнения (16) нужно использовать начальные условия, а для уравнения (17) – граничные условия.

Дальнейший этап метода заключается в поиске решений уравнения (17). Рассмотрим вначале применение нулевых граничных условий. В этом случае для нахождения решения *X(x)* образуется так называемая задача Штурма – Лиувилля. Известно, что всегда существует нулевое решение *X(x)=0*, которое называют тривиальным. Нас же интересуют нетривиальные решения. Оказывается, что такие решения существуют не при любых значениях параметра разделения, а лишь при определенных значениях, которые называются собственными значениями. Соответствующие функции, удовлетворяющие уравнению, называются собственными функциями.

С помощью проверки легко убедиться, что решением уравнения (17) могут быть тригонометрические функции

$$X_n^{(1)}(x) = \sin\left(x\sqrt{\lambda_n}\right), \quad X_n^{(2)}(x) = \cos\left(x\sqrt{\lambda_n}\right).$$

Выбор функций и набор собственных значений λ_n определяется граничными условиями для задачи Штурма – Лиувилля. В случае нулевых граничных условий подходит лишь первое решение $X_n^{(1)}(x)$ с синусом, так как $X_n^{(2)}(x) = \cos(0) = 1 \neq 0$. Задание нулевого значения собственной функции на правой границе $x = l$ приводит к требованию определенных значений λ_n

$$l\sqrt{\lambda_n} = \pi n, \quad \lambda_n = \left(\pi n / l\right)^2, \ n = 1, 2, ...$$

Таким образом, найден бесконечный набор собственных значений и собственных функций для случая нулевых граничных условий

$$X_n(x) = \sin\left(\pi n x / l\right), \quad n = 1, 2, ...$$

После решения задачи Штурма – Лиувилля необходимо найти решения уравнения (16) для найденных собственных значений

$$T' + \lambda_n \chi T = 0 \ . \qquad (18)$$

Нетрудно с помощью проверки убедиться в том, что решениями уравнения (18) являются экспоненциальные функции

$$T_n(t) = T_n(0) \cdot e^{-\chi\lambda_n t}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Согласно принципу суперпозиции и предположению (14) решением нашей задачи будет сумма решений

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cdot e^{-\chi\lambda_n t} \cdot \sin\left(\lambda_n x\right). \tag{19}$$

В практических расчетах число слагаемых в (19) ограничено. Это вносит некоторую погрешность в решение. Оценка этой погрешности может быть сделана путем перебора значения числа слагаемых N.

В построенном решении не определены пока начальные значения $T_n(0)$. Их значения определяются из заданного начального условия

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cdot \sin\left(\pi n x / l\right) = \varphi(x).$$

Отсюда видно, что коэффициенты $T_n(0)$ являются коэффициентами разложения известной функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье и могут быть определены путем интегрирования

$$T_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\pi n x / l\right) dx.$$

Мы разобрали подробно случай граничных условий первого рода. При других граничных условиях меняется решение задачи Штурма – Лиувилля. Рассмотрим пример с граничными условиями

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \quad u(t,l) = 0.$$

В этом случае требуется найти решение уравнения (17) с граничными условиями $X'(0) = 0,\ X(l) = 0$. Левое граничное условие подсказывает нам выбор функции

$$X_n(x) = X_n^{(2)}(x) = \cos(\lambda x),$$

так как производная от косинуса в нуле равна нулю. Правое граничное условие требует, чтобы

$$X_n(l) = \cos(\lambda_n l) = 0, \ \lambda_n = \left(2n+1\right)\pi / 2l, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Дальнейшие этапы метода аналогичны, но следует помнить, что суммирование начинается с нуля и начальная функция $\phi(x)$ раскладывается в ряд не по синусам, а по косинусам.

4 Уравнения эллиптического типа

Типичным примером эллиптического уравнения является уравнение Пуассона

$$\Delta u + f = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(x, y, z) = 0 .$$

При отсутствии функции $f(x, y, z)$ это уравнение Лапласа. Пример решения уравнений эллиптического типа опишем на двумерном уравнении

$$\Delta u + f = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y) = 0 . \tag{20}$$

Кроме того, будем полагать, что областью определения является прямоугольник ($0 \le x \le l_1$, $0 \le y \le l_2$), на границах которого заданы значения искомой функции

$$u(0, y) = f_1(y),\ u(x, l_2) = f_2(x),\ u(l_1, y) = f_3(y),\ u(x, 0) = f_4(x) . \tag{21}$$

Сформулированная задача (20)-(21) с заданными значениями функции на границе называется внутренней задачей Дирихле. Если требуется найти решения вне заданной области, задача называется внешней задачей Дирихле. Соответствующие определения годятся и для трехмерной задачи. Доказано, что задача Дирихле корректно поставлена и потому имеет единственное решение.

5 Волновое уравнение

Волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

где c − скорость распространения волны.

Уравнение предполагает, что скорость распространения волн одинакова для волн любой длины (нет дисперсии и нет затухания). В качестве неизвестной функции $u(t, x, y, z)$ для упругих колебаний может выступать какая- либо характеристика отклонения от равновесия (смещение, плотность, давление). В случае электромагнитной волны в качестве неизвестной функции может выступать напряженность электрического или магнитного поля. При изучении волн на воде неизвестной функцией является высота поверхности жидкости. Скорость распространения электромагнитной волны в вакууме равна скорости распространения света в вакууме. В среде с показателем преломления n эта скорость уменьшается в n раз. Скорость распространения звука в идеальном газе выражается формулой

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} \,,$$

где K − модуль объемной упругости;

ρ − плотность газа;

γ – отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме;

R − универсальная газовая постоянная;

T − абсолютная температура газа;

μ − молекулярный вес газа.

Для твердых тел различают продольные и поперечные волны. Скорости этих волн различны и определяются через соответствующие модули упругости. Простейшей моделью для изучения волнового уравнения являются поперечные колебания струны. Скорость распространения волн в струне зависит от силы натяжения F, плотности ρ и площади поперечного сечения S: $c = \sqrt{F/(\rho S)}$.

Колебания струны описываются одномерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,. \qquad (22)$$

Прямой подстановкой доказывается, что общим решением уравнения (22) для бесконечно длинной струны является любая функция аргумента $(x \pm ct)$

$$u(t,x) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct).$$

Это решение называют решением Д'Аламбера. Первая функция описывает распространение возмущения по оси x вправо (прямая волна), а вторая – в противоположном направлении (обратная волна). Таким образом, решение Д'Аламбера является суммой прямой и обратной волн. Аргументы функции в решении Д'Аламбера определяют фазу. Приравняв фазу первой функции нулю, получим скорость перемещения фазы

$$x - ct = 0,\;\; x = ct,\;\; x/t \equiv V_{\Phi} = c.$$

Отметим, что первая функция является общим решением также более простого уравнения – уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Дифференцирование уравнения переноса по времени дает волновое уравнение (22).

Мы рассмотрели общие решения волнового уравнения без упоминания начальных условий. При заданных начальных условиях

$$u(0,x) = \varphi_0(x),\;\; \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_1(x), \tag{23}$$

мы имеем так называемую задачу Коши. Решением задачи Коши является формула Д'Аламбера:

$$u(0,t) = \frac{\varphi_0(x-ct)+\varphi_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\varphi_1(s)ds. \tag{24}$$

Из этой формулы видна очевидная однозначность решения и его непрерывная зависимость от начальных условий. Формула описывает обычное (классическое) решение задачи в предположении, что функция $\varphi_0(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а функция $\varphi_1(x)$ − до первого.

Для волнового уравнения типичными простейшими решениями являются гармонические функции

$$u(t,x) = a_1 \sin(kx - \omega t) + a_2 \sin(kx + \omega t), \qquad (25)$$

где a_1, a_2 – амплитуды волн, распространяющихся в противоположных направлениях;

k – волновое число, $k = 2\pi/\lambda$;

λ – длина волны;

ω– циклическая частота.

Решения вида (25) описывают плоские волны, фронт такой волны (координаты с одинаковым значением фазы) представляет в пространстве плоскости перпендикулярные оси x. Приравняв фазу первого слагаемого нулю, получим значение фазовой скорости

$$V_{\Phi} = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi n}{2\pi/\lambda} = n\lambda = \frac{\lambda}{T},$$

где n – частота колебаний;

T – период колебаний, $T = 1/n$.

Воспользоваться решениями вида (25) для задачи Коши можно, вспомнив, что начальные функции можно разложить в ряд Фурье, и воспользовавшись принципом суперпозиции. Опишем подобный подход для полной начально-краевой задачи.

Решения вида (24) описывают распространение возмущений для бесконечной струны. В случае конечной струны необходимо учесть граничные условия на концах струны. Будем полагать, что имеем дело со струной конечной длины l с закрепленными концами

$$u(t,0) = 0,\ u(t,l) = 0.$$

Формула Д’Аламбера годится и в этом случае. Однако необходимо учесть, что решение должно быть определено лишь в интервале по x от нуля до l, и потому необходимо уметь учитывать отражение волн от концов струны. Обычно это не делают, а решают новую начально-краевую задачу методом разделения переменных.

Метод разделения приводит к двум уравнениям

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = 0,\ X(l) = 0,$$

$$T'' + \lambda c^2 T = 0. \tag{26}$$

Первое уравнение с выписанными граничными условиями дает задачу Штурма – Лиувилля. Решение этой задачи дает набор собственных функций и собственных значений

$$X_n(x) = \sin\left(\pi n x / l\right),\ \ \lambda_n = \left(\pi n / l\right)^2,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Теперь необходимо решить уравнение (26) при значениях параметра разделения $\lambda = \lambda_n$. Общее решение (26) выражается через тригонометрические функции вида

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} ct\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} ct\right).$$

Коэффициенты этого уравнения пока произвольны. Они определятся с помощью начальных условий и представления функций, задающих начальные условия в ряд Фурье. В силу принципа суперпозиции решений общее решение может быть представлено рядом

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} ct\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} ct\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \tag{27}$$

Требуя выполнимости двух начальных условий (23), приходим к формулам для вычисления коэффициентов

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \cdot \sin\left(\pi n x / l\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{\pi n c} \int_0^l \varphi_1(x) \cdot \sin\left(\pi n x / l\right) dx. \tag{28}$$

Формула (27) с коэффициентами (28) дает решение начально-краевой задачи для струны. Его можно записать в эквивалентном виде с одной тригонометрической формулой, содержащей время

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l} ct + \delta_n\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

В этой записи $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ - амплитуда *n-ой* гармоники, а $\omega_n = \frac{\pi n}{l} c$ - циклическая частота гармоники. Самая низкая частота (самый низкий тон) колебаний соответствует первой гармонике $\omega_1 = \frac{\pi c}{l}$. Вес последующих гармоник образует тембр звучания струны. Как видно из решения, тембр звучания зависит от способа возбуждения струны или, по-иному, от начальных условий.

Мы подробно рассмотрели решение одномерного волнового уравнения. Находить решение двумерных и трехмерных волновых уравнений в общем случае, конечно, сложнее. Однако следует помнить, что решения вида (25) годятся и для трехмерного уравнения в случае так называемой плоской волны, не зависящей от других координат.

6 Уравнение Шредингера

Уравнение Шредингера описывает квантово-механическое поведение микрочастиц. Оно имеет вид

$$-\frac{\tilde{h}}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\tilde{h}^2}{2m}\Delta\Psi + U(\vec{r},t), \tag{29}$$

где $\tilde{h} = \frac{h}{2\pi}$, h − постоянная Планка;

i − мнимая единица;

m – масса частицы;

$U(\vec{r},t)$ − потенциальная энергия частицы в рассматриваемом силовом поле;

Δ − оператор Лапласа;

Ψ − искомая волновая функция.

Уравнение справедливо для частиц со скоростями гораздо меньше скорости света.

Важно понять, что волновая функция позволяет лишь вычислить вероятность нахождения частицы в интересуемом объеме по формуле

$$P = \int_V |\Psi|^2 dV .$$

В общем случае задача нахождения волновой функции оказывается очень сложной. Сложность решения определяется потенциальной энергией поля $U(\vec{r},t)$, геометрией области и граничными условиями. Рассмотрим простейшие задачи, связанные с решением уравнения Шредингера. Для большого числа физических явлений микромира в постоянном по времени потенциальном поле важно найти стационарное решение уравнения Шредингера. Соответствующее стационарное уравнение Шредингера получается методом разделения переменных при условии, что волновая функция уравнения может быть представлена в виде произведения двух функций

$$\Psi(t,x,y,z) = \varphi(t)\cdot\psi(x,y,z) . \tag{30}$$

Подстановка (30) в уравнение Шредингера (29) дает соотношение

$$\frac{\tilde{h}}{i}\frac{1}{\varphi(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\tilde{h}^2}{2m}\frac{\Delta\psi}{\psi} - U(x,y,z) \equiv -W \tag{31}$$

с константой разделения *W*, имеющей размерность энергии. Соотношение (31) распадается на два

$$\frac{\tilde{h}}{i}\frac{1}{\varphi(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -W , \tag{32}$$

$$\frac{\tilde{h}^2}{2m}\frac{\Delta\psi}{\psi} - U(x,y,z) \equiv -W . \tag{33}$$

Уравнение (33) называют стационарным уравнением Шредингера. Обычно его записывают в виде

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\tilde{h}^2}(W-U)\psi = 0 .$$

Функции, удовлетворяющие стационарному уравнению Шредингера, называют собственными функциями, а значения энергии *W*, для которых существуют собственные функции, называют собственными значениями. Как видно, ситуация напоминает задачу Штурма-Лиувилля.

Решение уравнения (32) для временной зависимости $\phi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t)=\varphi(0)\cdot e^{-\frac{iWt}{\tilde{h}}}. \qquad (34)$$

Функция описывает колебательное решение. Увидеть это можно, если вспомнить знаменитую формулу Эйлера

$$e^{iz}=\cos(z)+i\sin(z).$$

Применение формулы Эйлера к функции (34) дает следующую зависимость

$$\varphi(t)=\varphi(0)\cdot\left(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right),$$

где ω – циклическая частота колебаний, $\omega=W/\tilde{h}$.

Рассмотрим теперь конкретные ситуации. При свободном движении частицы (потенциальная энергия $U=0$) полная энергия частицы совпадает с ее кинетической энергией

$$W=\frac{mv^2}{2}.$$

Направим ось x вдоль движения частицы. В этом случае стационарное уравнение Шредингера записывается в более простом виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\left(\frac{2mW}{\tilde{h}^2}\right)\psi=0. \qquad (35)$$

Общее решение этого уравнения таково

$$\psi(x)=c_1\cdot e^{ikx}+c_2\cdot e^{-ikx},\ \ k=\sqrt{2mW}/\tilde{h}.$$

Вспоминая полное значение волновой функции (30), имеем

$$\Psi(t,x)=c_1\cdot e^{-i(\omega t-kx)}+c_2\cdot e^{-i(\omega t+kx)}.$$

Видно, что это решение является суперпозицией двух монохроматических волн с частотой $\omega=W/\tilde{h}$, распространяющихся в противоположных направлениях. Таким образом, свободная частица в квантовой механике описывается плоской монохроматической волной. При этом длина этой волны соответствует длине волны Де Бройля. Действительно, согласно введенным обозначениям, имеем

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\tilde{h}}{\sqrt{2mW}} = \frac{h}{\sqrt{2mW}} = \frac{h}{\sqrt{2m\frac{mv^2}{2}}} = \frac{h}{mv}.$$

Рассмотрим второй пример точного решения стационарного уравнения Шредингера (35) для так называемого случая потенциальной ямы. В этой задаче потенциальная энергия частицы внутри потенциальной ямы (ящика) равна нулю, а за пределами ящика – бесконечности

$$U(x) = 0,\ \ x \in [0, L];\quad U(x) = \infty,\ \ x \notin [0, L].$$

Постановка этой задачи является упрощением (моделью) задачи о поведении электронов внутри металлов. Бесконечная высота потенциального барьера упрощает задачу нахождения решения. Мы рассматриваем одномерный вариант задачи, хотя задача легко может быть решена и для трехмерного «ящика» размером $L_1 \times L_2 \times L_3$.

При сформулированных условиях нам необходимо решить стационарное уравнение Шредингера (35). Бесконечность потенциальной энергии за пределами потенциальной ямы позволяет считать, что вероятность обнаружить частицу вне ямы равна нулю, и потому можно положить, что

$$\psi(0) = 0,\ \psi(L) = 0. \tag{36}$$

Отметим, что в случае конечного потенциального барьера за счет туннельного эффекта нельзя использовать простые условия (36). Легко проверить, что общее решение уравнения (35) имеет вид

$$\psi(t) = c_1 \cdot \cos(kx) + c_2 \cdot \sin(kx)$$

с волновым числом $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{2mW}}{h}$ и неопределенными пока коэффициентами c_1 и c_2. Использование граничного условия при $x = 0$ приводит к тому, что коэффициент при косинусе должен быть равен нулю: $c_1 = 0$.

Граничное условие на правом конце интервала ($x = L$) требует выполнения равенства

$$kL = \pi n,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Данные равенства ведут к важным следствиям. Оказывается, что волновое число может принимать только дискретные значения

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, ...$$

Дискретность волнового числа приводит к дискретности длин волн Де Бройля:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, ... \qquad (37)$$

Физический (а точнее геометрический) смысл требования (37) весьма прост – на длине потенциальной ямы должно укладываться целое число полуволн. Квантование волн приводит к важному выводу – о квантовании полной энергии частицы

$$W_n = \frac{h^2}{2m\lambda_n^2} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, \quad n = 1, 2, ... \qquad (38)$$

Таким образом, энергия микрочастицы в потенциальном ящике не может принимать любые значения, а может принимать только «разрешенные» – квантованные значения согласно (38). Этот вывод справедлив и для многих более сложных задач квантовой механики. В частности, он справедлив для квантовых состояний электронов в атомах. Этот факт четко подтвержден линейчатым спектром атомов и молекул.

Полезно уметь делать оценки из полученных формул. Вычислим для примера разницу между соседними энергиями частиц в потенциальной яме

$$\Delta W_n \equiv W_{n+1} - W_n = (2n+1)\Delta W_0, \quad \Delta W = \frac{h^2}{8mL^2}, \quad n = 1, 2, ...$$

Для электрона при $L = 10^{-10}$ *м*, $\Delta W_0 \approx 0{,}68$ *эВ*. В случае размера $L = 1$*см* эта величина ничтожно мала ($\Delta W_0 \approx 0{,}68 \cdot 10^{-16}$ *эВ*). Из этого примера видно, что разница уровней энергии значима лишь для размеров порядка размеров атома. При больших размерах квантованием можно пренебречь и считать, что допустимы любые (непрерывные) значения энергии.

Библиографический список

1. Зельдович, Я.Б. Высшая математика для начинающих физиков и техников /Я.Б. Зельдович, И.М. Яглом. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

2. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Физматлит, 1963. – 660 с.

3. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

4. Мандельштам, Л.И. Лекции по колебаниям / Л.И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972. – 470 с.

5. Трофимова, Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 542 с.

Учебное издание

Арабчикова Юлия Ивановна

Асаева Татьяна Александровна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
В РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Часть 2

Учебное пособие

Подписано в печать__________. Тираж 5 экз.

Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета
390000, г. Рязань, ул. Право-Лыбедская, 26/53